

**Билеты к курсу «Функциональный анализ»  
5 семестр (осень 2012)**

1. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Полнота и сепарабельность. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.
2. Нормированные пространства. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства  $M$  части банахова пространства  $B(M)$  и существование пополнения  $M$ .
3. Топологические пространства. Компактные множества и их свойства.
4. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей.
5. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.
6. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
7. Критерии компактности в  $B(\Omega)$ ,  $C[a, b]$  (теорема Асколи–Арцела) и  $l^2$ .
8. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера.
9. Евклидовы пространства. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
10. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
11. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса–Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
12. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора.
13. Теорема Банаха–Штейнгауза.
14. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
15. Теорема Хана–Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Отделение выпуклых множеств (без доказательства).
16. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам (без доказательства).
17. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.
18. Топология  $\sigma(E, F)$  и совпадение  $F$  с сопряженным к  $E$  с топологией  $\sigma(E, F)$ . Слабая и \*-слабая топологии в случае нормированных пространств.
19. Теорема о \*-слабой компактности шара в сопряженном пространстве (без доказательства). Выделение \*-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном нормированном пространстве. Слабая сходимости и слабая компактность в гильбертовом пространстве.
20. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.

Зав. кафедрой  
теории функций и функционального анализа,  
академик РАН, профессор  
лектор, профессор

Б. С. Кашин  
В. И. Богачев