**Программа курса «Функциональный анализ»**
**3 курс, отделение «механика», 6 семестр, 2012 год.**
**Лектор: доцент И. А. Шейпак.**[1]

1. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.
2. Теорема Хана–Банаха: вещественное пространство.
3. Теорема Хана–Банаха для комплексного пространства. Следствия из теоремы Хана–Банаха.
4. Общий вид функционала в $C[a, b]$.
5. Теорема Банаха–Штейнгауза. Слабая сходимость. Слабо ограниченные множества.
6. Слабая компактность. Теорема о слабой компактности единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве.
7. Сопряженный оператор. Самосопряжённые операторы. Равенство $\|A\| = \|A^*\|$.
8. Компактные операторы. Свойства компактных операторов (сумма, композиция с ограниченным, предельный переход).
9. Теорема о действии компактного оператора на слабо сходящуюся последовательность в нормированном пространстве.
10. Компактность интегральных операторов в пространствах $C[a; b]$ и $L_2[a; b]$.
11. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряжённого оператора (в гильбертовом пространстве).
12. Обратный оператор. Теорема Банаха (без доказательства). Обратимость оператора близкого к обратимому. Представление резольвенты в виде ряда Лорана.
13. Спектр и резольвентное множество ограниченного оператора. Свойства спектра (замкнутость, ограниченность, непустота).
14. Классификация спектра. Спектр сопряжённого оператора (в гильбертовом пространстве).
15. Свойства спектра самосопряжённого оператора. Квадратичная форма самосопряжённого оператора.
16. Теорема Гильберта–Шмидта.
17. Спектральный радиус оператора. Формула для вычисления спектрального радиуса (без доказательства). Спектральный радиус самосопряжённого оператора.
18. Замкнутость образа оператора $I - A$, где $A$ — компактный оператор. Первая теорема Фредгольма.
19. Вторая теорема Фредгольма.
20. Третья теорема Фредгольма.
21. Спектр компактного оператора.
22. Основные пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$. Сходимость в этих пространствах. Пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$.
23. Плотность $\mathcal{D}$ в $S$, $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.

[1]см. на обороте

24. Сингулярные и регулярные обобщенные функции. Сингулярность $\delta$-функции.
25. Действия над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных.
26. Решение простейших дифференциальных уравнений в пространстве обобщённых функций. ($y' = 0$, $xy = 0$).
27. Существование первообразной в $\mathcal{D}'$. Предельный переход в $\mathcal{D}'$.
28. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его свойства. Инъективность преобразования Фурье (без доказательства).
29. Теорема о связи гладкости интегрируемой функции со скоростью убывания её преобразования Фурье. Теорема о связи скорости убывания интегрируемой функции с гладкостью преобразования Фурье.
30. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}$ и его непрерывность. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Формула обращения.
31. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, теорема Планшереля.
32. Теорема об отображении спектра для многочлена от оператора.
33. Унитарные операторы. Спектр унитарных операторов. Спектр оператора преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.
34. Полнота системы функций Чебышёва–Эрмита в $L_2(\mathbb{R})$.
35. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$.
36. Свёртка функций из $L_1(\mathbb{R})$. Свойства свёртки (линейность, ассоциативность, дифференцируемость, связь с преобразованием Фурье).
37. Свёртка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свёртки для решения уравнения теплопроводности.
38. Подобные операторы в банаховых пространствах. Теорема о спектрах подобных операторов.
39. Последовательность Вейля. Спектр оператора умножения на ограниченную функцию в $L_2(\mathbb{R})$.
40. Оператор свёртки с интегрируемой функцией в $L_2(\mathbb{R})$. Спектр оператора свёртки.
41. Теорема Хеллингера–Теплица. Область определения сопряжённого оператора. Неограниченные самосопряжённые и симметрические операторы.
42. График оператора. Теорема о графике сопряжённого оператора. Замкнутые операторы.
43. Критерий самосопряжённости симметрического оператора.
44. Спектр гармонического осциллятора.

Лектор доцент И.А.Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа
академик РАН, профессор Б. С. Кашин