ЗАДАЧИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ,

предлагавшиеся на лекциях для I потока математиков, весенний семестр 2012 г..

Лектор А.Я. Хелемский.

1. Классическая сходимость последовательностей в $C^\infty[a,b]$ не может быть задана с помощью одной нормы.

2. Вейерштрассова сходимость последовательностей в $\mathcal{O}(\mathbb{D}^0)$ не может быть задана с помощью одной нормы.

3. Покоординатная сходимость последовательностей в c_∞ не может быть задана с помощью одной нормы.

4. Описать сходящиеся последовательности в сильнейших полинормированных пространствах.

5. Хаусдорфово полинормированное пространство нормируемо $\iff$ его систем преднорм содержит эквивалентную ей конечную подсистему.

6. Хаусдорфово полинормированное пространство метризуемо $\iff$ его систем преднорм содержит эквивалентную ей не более чем счетную подсистему.

7. Оператор дифференцирования в $\mathcal{O}(\mathbb{D}^0)$ непрерывен.

8. Оператор покоординатного умножения на последовательность в c_∞ непрерывен.

9. Операторы умножения слева и справа на ограниченный оператор в полинормированных пространствах $(\mathcal{B}(H), so)$ и $(\mathcal{B}(H), wo)$ непрерывны.

10. Описать непрерывные функционалы в c_∞.

11. Описать непрерывные функционалы в $(\mathcal{B}(H), wo)$.

12*. В l_1 нормовая и слабая сходимости *последовательностей* совпадают.

13. Из ограниченной по норме последовательности в пространстве, сопряженном к сепарабельному, можно выделить слабо* сходящуюся подпоследовательность.

14. Последовательность φ_n сходится в $\mathcal{S} \iff t^p\varphi_n(t); t \in \mathbb{R}$ сходится классически.

15. В пространстве $\mathcal{D}$ топология $\mathbf{d}$ строго сильнее топологии $\mathbf{s}$, последняя строго сильнее топологии $\mathbf{e}$.

16. Ни одно из трех пространств пробных функции не нормируемо.

17. Пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ метризуемы.

18. Пространство $\mathcal{D}$ не метризуемо.

19. $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{E}$.

20. Оператор дифференцирования в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ непрерывен.

21. Оператор умножения на гладкую функцию в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ непрерывен.

22. Оператор умножения на умеренно растущую гладкую функцию в $\mathcal{S}$ непрерывен.

23. Функционал $\varphi \mapsto v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ – это обобщенная функция порядка 1.

24. Функционал $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$ – это обобщенная функция бесконечного порядка.

25. Непрерывная функция порождает регулярную обобщенную-функцию-с-компактным носителем $\Longleftrightarrow$ она имеет компактный носитель.

26. Последовательность горбушек, сосредоточенных на отрезках $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]; n = 1, 2, \ldots$ и имеющих интеграл 1, сходится в $\mathcal{D}^*$ к δ-функции.

27. Всякая регулярная обобщенная функция есть $(m+1)$-кратная производная от некоторой m раз гладкой регулярной обобщенной функции.

28. Найти производную функции Хевисайда.

29*. Найти производную функции $\ln |t|$.

30. Любая обобщенная функция обладает первообразной, и все её первообразные отличаются на постоянную.

31. Определить оператор дифференцирования в $\mathcal{S}^*$.

32. Определить оператор умножения на гладкую функцию в $\mathcal{D}^*$.

33*. Любая обобщенная функция, сосредоточенная в нуле, есть линейная комбинация δ-функции и её производных.

34. Верно ли, что в действительном гильбертовом пространстве только нулевой оператор может иметь нулевую квадратичную форму?

35. Для $T \geq 0$ единственный положительный оператор, дающий в квадрате T – это $\sqrt{T}$.

36-38. Найти семейство подпространств, ассоциированных с проектором, с оператором умножения на независимую переменную в $L_2[a, b]$ и с компактным самосопряженным диагональным оператором в l_2.

39*. Спектр самосопряженного оператора совпадает со множеством точек возрастания ассоциированного семейства подпространств.

40**. Охарактеризовать точечный спектр самосопряженного оператора в терминах ассоциированного семейства подпространств.

41-43. Проверить, что спектральная теорема в её аналитической форме верна для проектора, оператора умножения на независимую переменную в $L_2[a, b]$ и компактного самосопряженного оператора в l_2.

44-45. Проверить, что спектральная теорема в её геометрической форме верна для проектора и компактного самосопряженного оператора в l_2.

46. Найти преобразование Фурье ступеньки и проверить, что эта функция не интегрируема по Лебегу.

47. Найти преобразование Фурье первых четырех функций Эрмита.

48. Если $e^{b|t|}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}); b > 0$, то $F(\varphi)$ продолжается до голоморфной функции в полосе $\{z : |Im(z)| < b\}$.

49. Если $e^{b|t|}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}); b > 0$, и $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) dt = 0; n = 0, 1, 2 \ldots$, то $\varphi = 0$ почти всюду.

50. Система Эрмита является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$.

51. Указать коммутативные диаграммы, связывающие классическое преобразование Фурье, оператор сдвига и оператор умножения на e^{-iat}.

52. Свёртка горбушки со ступенькой даёт шляпу.

53. Свёртка функции из $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ с функцией $\psi \in \mathcal{D}$ даёт функцию из $\mathcal{E}$. При этом $(\varphi * \psi)' = \varphi * \psi'$.

54. Последовательность свёрток функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ с горбушками, сосредоточенными на отрезках $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]; n = 1, 2, \ldots$ и имеющими интеграл 1, сходится к φ в $L_1(\mathbb{R})$.

55. Свёртка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_\infty(\mathbb{R})$ существует, ограничена и равномерно непрерывна.

56*. Свёртка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_2(\mathbb{R})$ существует и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

57. $L_1(\mathbb{R})$ – это банахова инволютивная алгебра со свёрточным умножением и инволюцией $\varphi^*(t) := \overline{\varphi(-t)}$.

58. Оператор $\sqrt{2\pi}F : L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ – это инволютивный гомоморфизм банаховых инволютивных алгебр.

59*. Определить свёртку обобщенной функции из $\mathcal{D}^*$ с пробной функцией из $\mathcal{D}$ по аналогии с определением дифференцирования в $\mathcal{D}^*$.

60. Верно ли следующее утверждение: если $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ и $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) dt = 0; n = 0, 1, 2 \ldots,$ то $\varphi = 0$ почти всюду?

61*. Не существует слабо* непрерывного оператора в $\mathcal{D}^*$, продолжающего преобразование Фурье в $\mathcal{S}$.

62. Преобразование Фурье умеренно растущих обобщенных функций является продолжением классического преобразования Фурье. Вывести отсюда теорему единственности классического преобразования Фурье.

63. Разновидность теоремы обращения: если $F(\varphi)$ интегрируем , то $\breve{F}F\varphi = \varphi$ почти всюду.

64. Указать коммутативные диаграммы, связывающие преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, оператор сдвига и оператор умножения на e^{-iat}.

65. Найти оператор в l_2, являющийся моделью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

66. Найти оператор в $L_2[a, b]$, являющийся моделью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

67**. Множество функций вида $\varphi * \psi; \varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$ есть в точности образ классического преобразования Фурье.