Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (3 курс отделения механики, 2011/2012 гг.)[1]

1. Метрические пространства. Свойства полных метрических пространств (принцип сжимающих отображений, теорема о замкнутых шарах).
2. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Сепарабельные пространства. Критерий полноты подпространства метрического пространства.
3. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрического пространства. Теорема Бэра.
4. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
5. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
6. Критерий предкомпактности множества в пространствах ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$.
7. Критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$.
8. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского. Теорема об ортогональном дополнении.
9. Ортонормированные системы. Полные, замкнутые системы. Условия, эквивалентные тому, что ортонормированная система образует базис в гильбертовом пространстве.
10. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
11. Системы множеств (полукольцо, кольцо, алгебра, σ-алгебра). Примеры. Аддитивные и σ-аддитивные меры.
12. Структура минимального кольца, порождённого полукольцом. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо с сохранением σ-аддитивности.
13. Свойства меры на кольце (монотонность, полуаддитивность, σ-полуаддитивность, непрерывность). Счетная аддитивность меры Лебега–Стилтьеса.
14. Внешняя мера Лебега. Свойства внешней меры на $R(S)$. σ-полуаддитивность внешней меры.
15. Измеримые множества относительно заданной внешней меры. Теорема об измеримых по Лебегу множествах (*без доказательства*).
16. Измеримые функции. Свойства измеримых функций (сумма, произведение, верхний и нижний предел последовательности).
17. Сходимость измеримых функций почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере. Связь между сходимостью почти всюду и по мере.
18. Интеграл Лебега для простых функций и его основные свойства.
19. Определение интеграла Лебега для произвольной измеримой функции и его свойства.
20. Теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.
21. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
22. Теорема Б. Леви и теорема Фату.
23. Произведение пространств и мер. σ-аддитивность произведения мер. Теорема Фубини (*без доказательства*).
24. Неравенства Гёльдера и Минковского. Норма в пространстве $L_p(\Omega, \mu)$ и ℓ_p.
25. Полнота пространств $L_1(\Omega, \mu)$.
26. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации и их свойства. Абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Лебега. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных. Примеры.

[1] см. на обороте

27. Линейные операторы и функционалы. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Непрерывные операторы. Эквивалентность ограниченности и непрерывности для линейных операторов.

28. Полнота пространства $\mathcal{B}(X,Y)$, где Y — банахово. Сопряжённое пространство X^* и его полнота.

29. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах ℓ_p при $1 \leqslant p < \infty$. Полнота пространств ℓ_p при $1 < p \leqslant \infty$.

30. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах c_0 и $L_p(\Omega,\mu)$ ($1 \leqslant p < \infty$, *только достаточность*). Полнота пространств $L_p(\Omega,\mu)$ при $1 < p \leqslant \infty$ и ℓ_1 .

Лектор, доцент	И.А. Шейпак
Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, член-корр. РАН, профессор	Б. С. Кашин