

1. Преднормированное и нормированное пространство. Примеры. Сопряженно-билинейный функционал и полярное тождество.
2. Скалярное произведение. Почти-гильбертово пространство. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертова норма и непрерывность по ней скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Теорема фон Нойманна-Йордана (без док.).
3. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные системы. Их свойства и их примеры. Процесс ортогонализации. Определение функций и многочленов Эрмита.
4. Ряд Фурье в почти-гильбертовом пространстве. Предложение о ближайшем векторе в конечномерном подпространстве. Неравенство Бесселя. Предложение о тотальных ортонормированных системах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Понятие о базисе Шаудера.
5. Ограниченный оператор между преднормированными пространствами. Пространство  $\mathcal{B}(E, F)$  и операторная преднорма; (достаточное) условие, когда это норма. Случай почти-гильбертовых пространств. Сопряженное пространство. Мультипликативное неравенство для операторной преднормы.
6. Некоторые классы операторов: сжимающие, изометрические, коизометрические. Топологические, изометрические, унитарные изоморфизмы. Примеры операторов.
7. Характеризация ограниченных операторов как непрерывных. Возможность продолжения операторов в линейной алгебре (без док.). Пример Филлипса оператора, не продолжаемого с сохранением ограниченности (без док.).
8. Теорема Хана-Банаха; случай действительного поля скаляров и сепарабельного пространства.
9. Комплексная версия теоремы Хана-Банаха. Достаточность семейства ограниченных функционалов на нормированном пространстве. Теорема Рисса об описании ограниченных функционалов на  $C[a, b]$  (без док.).
10. Банахово и гильбертово пространство. (Достаточное) условие, когда  $\mathcal{B}(E, F)$  банахово. Суммируемые векторные ряды и "признак Вейерштрасса". Принцип продолжения по непрерывности. Случай изометрического изоморфизма.
11. Теорема Рисса-Фишера. Предложение о ближайшем векторе в замкнутом подпространстве.
12. Ортогональное дополнение к подмножеству и его свойства. Теорема об ортогональном дополнении. Условие тотальности системы в гильбертовом пространстве.
13. (Орто)проектор. Теорема Рисса об описании ограниченных функционалов на гильбертовом пространстве. Банахов сопряженный оператор.
14. Гильбертов сопряженный оператор. Соотношения сопряженности. Свойства операции "гильбертова звездочка". Связь между ядром оператора и образом его сопряженного. Алгебраическая характеристика проектора.
15. Теорема Банаха-Штейнхауса. Теорема Банаха об обратном операторе (без док.).
16. Пополнение нормированного пространства. Примеры. Теорема единственности и теорема существования пополнения.
17. Топология и топологическое пространство. Первые примеры. База и предбаза топологии. Топология метрического пространства и метризуемость. Хаусдорфово пространство.
18. Непрерывное отображение топологических пространств и гомеоморфизм. Компактное топологическое пространство. "Теорема Вейерштрасса".
19. Сверхограниченное (= вполне ограниченное) метрическое пространство. Эквивалентные условия сверхограниченности. Эквивалентные условия компактности метрического пространства.
20. Сверхограниченность ограниченных множеств в  $C_1^n$ . Свойства конечномерных нормированных пространств (топологическая изоморфность нормированных пространств одной размерности, полнота и др.).
21. Лемма о почти перпендикуляре. Теорема Рисса о сверхограниченных единичных шарах. Теорема Арцела (без док.).

22. Компактный оператор. Пространство  $\mathcal{K}(E, F)$  и его замкнутость в  $\mathcal{B}(E, F)$ . Компактность интегрального оператора.
23. Свойство аппроксимации и его наличие у гильбертовых пространств. Понятие о примере Энфлю (без док.).
24. Теорема Шмидта о строении компактных операторов между гильбертовыми пространствами.
25. Теорема Гильберта-Шмидта о строении компактных самосопряженных операторов между гильбертовыми пространствами. Унитарно эквивалентные операторы. Унитарно эквивалентная модель компактного самосопряженного оператора в  $l_2$ .
26. Ядерный оператор в гильбертовом пространстве и его след.
27. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Коядро оператора. Фредгольмов оператор и его индекс. Мультипликативное свойство индекса (без док.).
28. Теорема о фредгольмовости компактного возмущения тождественного оператора.
29. Альтернатива Фредгольма.
30. Третья теорема Фредгольма (об индексе компактного возмущения тождественного оператора). Тройная теорема Фредгольма в "традиционной" формулировке. Понятие о теореме Аргираса-Хойдена (без док.).
31. Спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве. Точечный, непрерывный и остаточный спектр. Строение спектра компактного оператора в гильбертовом пространстве.
32. Алгебра и спектр ее элемента. Поведение спектров при гомоморфизме. Полиномиальное исчисление от элемента алгебры. Закон отображения спектров для полиномиального исчисления. Спектр обратного элемента.
33. Банахова алгебра. Открытость множества ее обратимых элементов и непрерывность перехода к обратному элементу. Ограниченность и замкнутость спектра элемента банаховой алгебры. Местоположение спектра унитарного оператора.
34. Резольвентная функция и тождество Гильберта. Теорема о непустоте спектра. Формула спектрального радиуса (без док.).

Лектор, профессор

А.Я. Хелемский

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, акад. РАН, профессор

Б. С. Капин