

Билеты по курсу «Функциональный анализ» (Механики, 6-й семестр)

1. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
2. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
3. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса–Фишера.
4. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве.
5. Применение теоремы Рисса к теореме Радона–Никодима. Теорема о представлении непрерывного линейного функционала на $C[a, b]$ в виде интеграла (без доказательства). Понятие об интеграле Лебега–Стилтьеса.
6. Локально выпуклые пространства. Пространства \mathbb{R}^∞ , \mathcal{D} и \mathcal{S} . Теорема Хана–Банаха (без доказательства) и ее следствия. Сопряженное пространство.
7. Обобщенные функции классов \mathcal{D}' и \mathcal{S}' и обобщенные производные. Примеры.
8. Преобразование Фурье в L^1 и его основные свойства. Формула обращения (без доказательства). Равенство Парсеваля для преобразований Фурье.
9. Свертка интегрируемых функций и ее свойства. Свертка обычной и обобщенной функций.
10. Преобразование Фурье в L^2 .
11. Преобразование Фурье обобщенных функций. Применение к решению дифференциальных уравнений.
12. Пространства Соболева $W^{2,k}$: определения через пополнения и обобщенные производные, описание через преобразование Фурье.
13. Сопряженный оператор и его норма. Примеры.
14. Теорема Банаха–Штейнгауза. Слабая сходимость.
15. Теоремы Банаха об обратном операторе (без доказательства) и замкнутом графике.
16. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.
17. Спектр оператора. Компактность спектра. Спектр оператора умножения на функцию.
18. Спектр компактного оператора и альтернатива Фредгольма (без доказательства). Применение к интегральным уравнениям.
19. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Спектр унитарного оператора. Функции Эрмита и спектр оператора преобразования Фурье.
20. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и их квадратичные формы. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
21. Равенства $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|: \lambda - \text{точка спектра } A\}$ для самосопряженного оператора A .
22. Теорема Гильберта–Шмидта.
23. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов. Эквивалентность общего самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (без доказательства).
24. Неограниченные самосопряженные операторы. Примеры: операторы умножения и дифференцирования, операторы Штурма–Лиувилля.

Зав. кафедрой
теории функций и функционального анализа,
член-корр. РАН, профессор
лектор, профессор

Б.С. Кашин
В.И. Богачев