Программа экзамена по курсу «Функциональный анализ»
6 семестр, 2011

1. Полинормированные пространства, определение топологии в полинормированном пространстве, локальная выпуклость. Примеры. Функционал Минковского и его свойства.

2. Счетно-нормированного пространства. Пространства Фреше. Критерий метризуемости полинормированного пространства.

3. Лемма об оценке линейного непрерывного функционала в счетно-нормированном пространстве.

4. Пространства основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Метризуемость и полнота двух последних пространств. Плотность $\mathcal{D}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ (в случае $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$).

5. Критерий сходимости функций в $\mathcal{D}(\Omega)$. Полнота, но неметризуемость пространства $\mathcal{D}(\Omega)$.

6. Пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Инъективность вложения $L_{1,loc} \to \mathcal{D}'(\Omega)$ (в случае $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$). Примеры сингулярных обобщённых функций.

7. Операции с обобщенными функциями. Носитель обобщённой функции. Компактность носителя для функций из $\mathcal{E}'(\Omega)$.

8. Теорема о представлении обобщенной функции с компактным носителем.

9. Теорема о представлении обобщенной функции умеренного роста.

10. Преобразование Фурье осуществляет топологический изоморфизм пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на себя. Преобразование Фурье — унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R})$. Теорема Планшереля.

11. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = x^k$.

12. Свёртка регулярных функций и её свойства. Прямые произведения и свёртки обобщённых функций. Вычислить свертку $\{\delta(x+1) - \delta(x-1)\} * \chi[a, b]$, где $\chi[a, b]$ — индикатор отрезка $[a, b]$.

13. Определение свертки обобщенных функций. Фундаментальные решения. Решения уравнений с постоянными коэффициентами.

14. Теорема Соболева о вложении $W^{2,k}(\mathbb{R}^d)$ в $C_0(\mathbb{R}^d)$ при $k > d/2$.

15. Теорема Теплица–Хаусдорфа о выпуклости числового образа оператора.

16. Теорема о спектральном радиусе.

17. Лемма о существовании левого обратного оператора (или замкнутости образа). Оценки

резольвенты оператора вне числового образа. Спектр самосопряжённого оператора.

18. Ограниченный оператор самосопряжен, если и только если его числовой образ веществен. Спектр самосопряжённого оператора. Принадлежность спектру экстремальных значений числового образа самосопряженного оператора. Равенство $r(A) = \|A\|$.

19. Теорема Гильберта–Шмидта для самосопряжённых компактных операторов.

20. Теорема Фишера-Куранта о минимаксных свойствах собственных чисел.

21. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве (равномерность приближения конечномерными).

22. Теорема Фредгольма для оператора $1+K$ с оператором K конечного ранга. Равенство размерностей ядер $1+K$ и $1+K^*$. Обобщение этой теоремы на случай компактного оператора K.

23. Аналитическая теорема Фредгольма. Теорема Рисса о спектре компактного оператора.

24. Точечный и предельный спектры. Спектр сжатия. Примеры (операторы сдвига в l_2). Дискретный и существенный спектры. Спектр самосопряженного оператора состоит из существенного и дискретного.

25. Теорема Вейля о сохранении существенного спектра самосопряжённого оператора при компактных возмущениях. Сохранение точечного спектра при компактных возмущениях для произвольного оператора.

26. Теорема о сильном пределе монотонной последовательности операторов. Существование квадратного корня из положительного оператора.

27. Теорема о сильном пределе монотонной последовательности операторов. Единственность неотрицательного квадратного корня.

28. Спектральная теорема в терминах функционального исчисления.

29. Спектральная теорема в интегральной форме (формулировка). Существование спектральных проекторов $E(\lambda)$. Их монотонность по λ.

Задачи по курсу «Функциональный анализ»
6 семестр, 2011

1. Найти спектр оператора сдвига $S\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{0, x_1, x_2, \ldots\}$.

2. Найти спектр оператора двустороннего сдвига $S\{x_n\} = \{x_{n+1}\}$ в пространстве двусторонних квадратично суммируемых последовательностей.

3. Доказать, что система функций $\{x^n e^{-x^2/2}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

4. Доказать, что спектр оператора Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ состоит из четырех точек $\{1\}, \{-1\}$,{i}, $\{-i\}$.

5. Найти спектр оператора сдвига $Sf(x) = f(x+a)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

6. Найти спектр оператора свёртки $Af(x) = \varphi(x) * f(x)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, если $\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

7. Оператор A называется фредгольмовым, если его образ замкнут, а ядро конечномерно. По определению точка λ принадлежит существенному спектру оператора A (пишем $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$), если $A-\lambda$ не фредгольмов. Доказать, что всякая граничная не изолированная точка спектра принадлежит существенному спектру.

8. По определению точка λ принадлежит дискретному спектру оператора A, если она изолированная точка спектра и является собственным значением конечной кратности. Пусть оператор A самосопряжен. Доказать, если λ принадлежит спектру A и не является точкой дискретного спектра, то существует ортонормированная система $\{f_n\}$ такая, что $\|(A-\lambda)f_n\| \to 0$ (такая последовательность называется последовательностью Вейля).

9. Найти непрерывный спектр оператора умножения $Af(x) = \varphi(x)\, f(x)$ в случае: а) $\varphi(x) \in C[0,1]$, б) $\varphi(x) \in L_\infty[0,1]$.

10. Найти существенный спектр оператора сдвига $S\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{0, x_1, x_2, \ldots\}$.

11. Доказать $\|A^*A\| = \|AA^*\|$. Доказать, что $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$.

12. Найти норму в $L_2[0,1]$ оператора интегрирования $Af(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. (Указание: записать оператор A^*A, решить уравнение на собственные значения $A^*Af = \lambda f$ и воспользоваться вторым равенством в предыдущей задаче).

13. Для каких функций $g(x) \in L_2(0,\pi)$ разрешимо уравнение

$$f(x) - \int_0^\pi \sin(x+y)\, f(y)\, dy = g(x)?$$

14. Доказать, что обобщённые функции

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$
$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

сингулярны.

15. Доказать в смысле обобщённых функций тождество Сохоцкого

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - \pi i \delta(x).$$

16. Найти пределы в $\mathcal{D}'$ функций

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n t}$.

17. Доказать, что всякая обобщённая функция $f(x) \in D'(\mathbb{R})$ с носителем в точке 0 имеет представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(x),$$

где c_k — числовые коэффициенты.

18. Найти все решения в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнений:

а) $f'(x) = \theta(x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

б) $x^2 f''(x) = 0$.

19. Вычислить свёртки обобщённых функций:

а) $\chi_{[a,b]}(x) * \chi_{[c,d]}(x)$,

б) $\delta'(x) * \theta(x)$.

20. Доказать, что $f * g \in L_2(\mathbb{R})$, если $f \in L_2(\mathbb{R})$, а $g \in L_1(\mathbb{R})$.

21. Найти преобразования Фурье обобщённых функций:

а) $\dfrac{1}{x + \alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$,

б) $\delta(x)$,

в) 1,

г) $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, где $a \in \mathbb{R}$,

д) $\theta(x)e^{-ax}$, где $a \geqslant 0$,

е) $\operatorname{sign} x$.

22. Доказать, что спектр оператора $Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ состоит только из 0, и явно вычислить резольвенту.

23. Пусть S — оператор сдвига в l_2, а K — конечномерный оператор. Доказать, что спектр оператора $S+K$ состоит из единичного круга и собственных значений конечной кратности, которые могут накапливаться только к границе круга.

24. Найти спектральные функции операторов умножения

$$Af(x) = x^k f(x), \qquad \text{где } k = 1, 2.$$