

**Программа курса «Действительный анализ»
Мех-мат, 2 курс, 1 поток, весна 2025/26 уч.г.**

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Связь σ -аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в $\mathbb{R}^n$ и ее σ -аддитивность.
4. Внешняя мера Лебега, ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
5. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счётная аддитивность меры Лебега.
6. σ -конечные меры и их продолжение по Лебегу (без обоснования). Пространство с мерой. Теорема о структуре измеримых множеств.
7. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
8. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
9. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова. C -свойство Лузина (без доказательства).
10. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
11. Определение интеграла Лебега в общем случае. Элементарные свойства интеграла Лебега.
12. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
13. Теорема Лебега о предельном переходе. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.
14. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
15. Произведение мер, его σ -аддитивность. Прямое произведение мер. Интеграл Лебега как мера подграфика.
16. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Теорема Фубини. Теорема Тонелли.
17. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p .
18. Полнота пространств L_p .
19. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
20. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима.
21. Функции ограниченной вариации. Связь непрерывности функции ограниченной вариации и непрерывности её вариации с переменным верхним пределом. Интеграл Римана — Стильтьеса и его связь с интегралом Лебега по мере Лебега — Стильтьеса.
22. Теорема Витали о покрытии.
23. Дифференцируемость монотонных функций почти всюду.
24. Абсолютно непрерывные функции. Теорема об абсолютно непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду.
25. Производная неопределенного интеграла Лебега. Критерий представимости функции в виде неопределенного интеграла Лебега от своей производной.
26. Интегрирование по частям в интеграле Лебега. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру.

27. Замена переменной в интеграле Лебега.
28. Ортонормированные системы в евклидовых пространствах. Свойства, равносильные базисности системы (без доказательства). Ряды Фурье в пространстве $L_1(X)$, $\mu X < \infty$. Лемма о плотных в L_p множествах. Теорема Мерсера о коэффициентах.
29. Формулы для частичных сумм и средних Фейера тригонометрического ряда Фурье. Сходимость средних Фейера для тригонометрических рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы.
30. Признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Признак Жордана (без доказательства). Система Радемахера. Система Уолша и ее полнота.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН

Б. С. Капин