

ПРОГРАММА КУРСА "ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ"

(весна 2024/25 уч. г., лектор – д.ф.-м.н., профессор М.И. Дьяченко)

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры и т.д.). Минимальные кольца и их свойства. Связь между σ -кольцами и δ -кольцами.
2. Меры на полукольцах. Вспомогательные леммы.
3. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в $\mathbb{R}^n$ и ее σ -аддитивность.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Внешняя мера Лебега. Ее полуаддитивность.
6. Продолжение меры по Лебегу. Мера Лебега и ее свойства.
7. Меры Лебега – Стильтьеса.
8. σ -конечная мера Лебега.
9. Связь σ -аддитивности и непрерывности. Полнота мер. Мера Бореля.
10. Теорема о существовании неизмеримого подмножества в любом измеримом, относительно классической меры Лебега, множестве положительной меры.
11. Теорема о структуре открытых подмножеств прямой.
12. Теорема Витали.
13. Измеримые функции. Их арифметические свойства. Измеримость функции $f(g(x))$, где f – непрерывная, а g – измеримая функции.
14. Измеримые функции и предельный переход.
15. Сходимость по мере и ее свойства, включая теорему о сохранении сходимости по мере при применении непрерывной функции к последовательности, сходящейся по мере на множестве конечной меры.
16. Сходимость почти всюду. Критерий этой сходимости на множествах конечной меры.
17. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Пример Рисса. Теорема о существовании в сходящейся по мере последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
18. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
19. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
20. Определение интеграла Лебега в общем случае. Утверждение и лемма о монотонных последовательностях простых функций.
21. Линейность интеграла Лебега по функции и по множеству для неотрицательных функций. Линейность интеграла Лебега относительно умножения на константу.
22. Линейность интеграла Лебега по функции в общем случае. Интегрирование неравенств.
23. Теорема Леви о предельном переходе и ее следствия.
24. Теоремы Фату и Лебега.
25. Линейность интеграла Лебега по множеству. Неравенство Чебышева и его следствие. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
26. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
27. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в $\mathbb{R}^n$.
28. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
29. Теорема Радона - Никодима.
30. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$.
31. Полнота пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$.
32. Теорема о плотности некоторых функциональных семейств в L_p , $1 \leq p < \infty$ на отрезке.
33. Абсолютно непрерывные функции и их свойства (арифметические свойства,

- абсолютная непрерывность композиции $f(g(x))$, где f и g – абсолютно непрерывны и g монотонна).
34. Ограниченность вариации абсолютно непрерывной функции. Абсолютная непрерывность вариации абсолютно непрерывной функции.
 35. N-свойство Лузина и его роль при непрерывных отображениях отрезка.
 36. Абсолютно непрерывные функции и N-свойство.
 37. Лемма об индикатрисе Банаха.
 38. Теорема Банаха-Зарецкого (доказательство достаточности совокупности трех условий для абсолютной непрерывности).
 39. Теорема о дифференцировании интеграла Лебега по переменному верхнему пределу.
 40. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной с помощью интеграла Лебега.
 41. Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Лебега.
 42. Прямое произведение мер и теоремы Фубини (без доказательства).

Лектор
д.ф.-м.н., профессор

М.И.Дьяченко

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа
академик РАН, профессор

Б.С.Кашин