

**ПРОГРАММА КУРСА "ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ"**  
(весна 2023/24 уч. г., лектор -- д.ф.-м.н., профессор М.И. Дьяченко)

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры и т.д.). Минимальные кольца и их свойства. Связь между  $\sigma$ -кольцами и  $\delta$ -кольцами.
2. Меры на полукольцах. Вспомогательные леммы.
3. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в  $\mathbb{R}^n$  и ее  $\sigma$ -аддитивность.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Внешняя мера Лебега. Ее полуаддитивность.
6. Продолжение меры по Лебегу. Мера Лебега и ее свойства.
7.  $\sigma$ -конечная мера Лебега.
8. Связь  $\sigma$ -аддитивности и непрерывности. Полнота мер. Другие способы определения меры (б/д).
9. Теорема о существовании неизмеримого подмножества в любом измеримом, относительно классической меры Лебега, множестве положительной меры.
10. Теорема о структуре открытых подмножеств прямой.
11. Теорема Витали.
12. Измеримые функции. Их арифметические свойства. Измеримость функции  $f(g(x))$ , где  $f$  – непрерывная, а  $g$  – измеримая функции.
13. Измеримые функции и предельный переход.
14. Сходимость по мере и ее свойства, включая теорему о сохранении сходимости по мере при применении непрерывной функции к последовательности, сходящейся по мере на множестве конечной меры.
15. Сходимость почти всюду. Критерий этой сходимости на множествах конечной меры.
16. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема о существовании в сходящейся по мере последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
17. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
18. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
19. Определение интеграла Лебега в общем случае. Две леммы о монотонных последовательностях простых функций.
20. Линейность интеграла Лебега по функции и по множеству для неотрицательных функций. Линейность интеграла Лебега относительно умножения на константу.
21. Линейность интеграла Лебега по функции в общем случае. Интегрирование неравенств.
22. Теорема Леви о предельном переходе и ее следствия.
23. Теоремы Фату и Лебега.
24. Линейность интеграла Лебега по множеству. Неравенство Чебышева и его следствие. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
25. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
26. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в  $\mathbb{R}^n$ .
27. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
28. Теорема Радона - Никодима.
29. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .
30. Полнота пространств  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .
31. Теорема о плотности некоторых функциональных семейств в  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$  на отрезке.
32. Абсолютно непрерывные функции и их свойства (арифметические свойства,

- абсолютная непрерывность композиции  $f(g(x))$ , где  $f$  и  $g$  – абсолютно непрерывны и  $g$  монотонна).
33. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации. N-свойство Лузина. Абсолютно непрерывные функции и N-свойство. Теорема Банаха-Зарецкого (достаточность б/д).
34. Теорема о дифференцировании интеграла Лебега по переменному верхнему пределу.
35. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной с помощью интеграла Лебега. Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Лебега.

Лектор  
д.ф.-м.н., профессор

М.И.Дьяченко

Заведующий кафедрой теории  
функций и функционального анализа  
академик РАН, профессор

Б.С.Кашин