

**Программа по курсу действительного анализа**  
**2 курс, 1 поток, 2022-2023 учебный год**  
**Лектор профессор В. А. Скворцов**

1. Системы множеств (полукольцо, кольцо,  $\sigma$ -кольцо, алгебра,  $\sigma$ -алгебра). Структура элементов минимального кольца, порожденного полукольцом.
2. Теорема о продолжении меры с полукольца на порожденное им кольцо.
3. Счетная полуаддитивность счетно-аддитивной меры на кольце. Внешняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Связь с внешней мерой Жордана.
4. Определение измеримых по Каратеодори множеств. Теорема: измеримые по Каратеодори множества образуют  $\sigma$ -алгебру, на которой мера  $\sigma$ -аддитивна. Непрерывность меры.
5. Метрическая внешняя мера. Измеримость борелевских множеств.
6. Метричность внешней меры Лебега в  $\mathbb{R}^n$ . Пример неизмеримого по Лебегу множества.
7. Понятие измеримой оболочки множества. Борелевская регулярность внешней меры Лебега в  $\mathbb{R}^n$ . Эквивалентность в  $\mathbb{R}^n$  измеримости по Каратеодори и по Лебегу (через внутреннюю меру).
8. Определение и основные свойства измеримых функций на  $(X, \mathcal{M})$ . Теорема о пределе последовательности измеримых функций.
9. Теорема о приближении любой измеримой функции простыми измеримыми функциями.
10. Сходимость по мере. Связь со сходимостью почти всюду.
11. Теорема Егорова.
12. Определение и основные свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций, заданных на  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Интеграл от простой функции.
13. Эквивалентное определение интеграла Лебега через монотонную последовательность простых функций.
14. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега от функций любого знака.
15. Теорема о почленном интегрировании ряда из неотрицательных функций.
16. Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для монотонной последовательности неотрицательных функций. Теорема Б. Леви.
17. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе.
18. Теорема о  $\sigma$ -аддитивности интеграла Лебега. Критерий интегрируемости в терминах срезки.
19. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана (собственным и несобственным) и с интегралом Ньютона.
20. Метрика пространства  $L(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Приближение по этой метрике суммируемой функции ограниченными и непрерывными (в случае  $\mathbb{R}$ ) функциями.
21. Неравенство Чебышева. Связь между сходимостью по мере и сходимостью в  $L(X, \mathcal{M}, \mu)$ .
22.  $\sigma$ -аддитивная функция множества (заряд), её непрерывность. Неравенства в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности множеств.
23. Верхняя, нижняя и полная вариации аддитивной функции множества. Их конечность.
24.  $\sigma$ -аддитивность верхней, нижней и полной вариации аддитивной функции множества. Разложение Жордана.
25. Разложение Хана.
26. Обобщенное разложение Хана.
27. Абсолютно непрерывные и сингулярные заряды. Эквивалентность двух определений абсолютной непрерывности. Интеграл Лебега как функция множества, его абсолютная непрерывность.
28. Лебеговское разложение заряда. Теорема Радона–Никодима.
29. Теорема Витали о покрытии.

30. Производные числа Дини. Теорема о дифференцируемости монотонной функции и интегрируемости ее производной.
31. Класс  $AC$ -функций на отрезке, связь с классом  $VB$ -функций. Дифференцируемость почти всюду.  $N$ -свойство  $AC$ -функций.
32. Дифференцируемость неопределенного интеграла Лебега на действительной прямой, равенство производной подынтегральной функции.
33. Свойство вариации  $AC$ -функции. Представление  $AC$ -функции в виде разности двух монотонных  $AC$ -функций.
34. Абсолютная непрерывность меры Лебега-Стилтьеса, порожденной  $AC$ -функцией, и её представление в виде интеграла Лебега.
35. Характеристическое свойство неопределенного интеграла Лебега на действительной прямой.
36. Интегралы Лебега-Стилтьеса по мере, порожденной  $AC$ -функцией.
37. Связь интеграла Лебега с интегралом Хенстока (в одномерном случае).
38. Прямое произведение мер множеств, его  $\sigma$ -аддитивность.
39. Лемма о приближении измеримого множества множествами из полукольца.
40. Теорема Фубини и теорема Тонелли, примеры их применения.
41. Пространства  $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$  ( $p \geq 1$ ). Неравенства Гельдера и Минковского.
42. Полнота пространства  $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$  ( $p \geq 1$ ).
43. Пространство  $L_2[a, b]$  как гильбертово пространство. Примеры ортонормированных систем в нем (тригонометрическая система, системы Радемахера, Уолша, Хаара).
44. Теорема Мерсера о коэффициентах Фурье суммируемой функции по ограниченной ортонормированной системе.
45. Теорема Рисса–Фишера.
46. Ряды Фурье–Лебега по тригонометрической системе. Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке.

### Литература

1. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл, Факториал Пресс, Москва, 2002.
2. Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П., Обобщенные интегралы (изд. 2-е), URSS, Москва, 2011

### Дополнительная литература

1. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарьян К.С., Сифуэнтэс П., Действительный анализ в задачах, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.
2. Богачов В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс (изд. 2-ое), URSS, Москва, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа (имеется много изданий. Все издания годятся).
4. Сакс С., Теория интеграла, URSS, Москва, 2004.

Заведующий кафедрой  
теории функций и  
функционального  
анализа,  
академик РАН

/Б. С. Кашин/

Профессор кафедры  
теории функций и  
функционального  
анализа

/В. А. Скворцов./