

**Программа курса «Действительный анализ»  
Мех-мат, 2 курс, 2 поток, весна 2021/22 уч.г.**

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Связь  $\sigma$ -аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в  $\mathbb{R}^n$  и ее  $\sigma$ -аддитивность.
4. Внешняя мера Лебега, ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
5. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега.
6.  $\sigma$ -конечные меры и их продолжение по Лебегу (без обоснования). Пространство с мерой. Теорема о структуре измеримых множеств.
7. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
8. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
9. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова.  $C$ -свойство Лузина (без доказательства).
10. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
11. Определение интеграла Лебега в общем случае. Элементарные свойства интеграла Лебега.
12. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность.
13. Теорема Лебега о предельном переходе. Критерий Лебега интегрируемости по Риману, связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.
14. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
15. Произведение мер, его  $\sigma$ -аддитивность. Прямое произведение мер.
16. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Интеграл как мера подграфика. Теоремы Фубини и Тонелли.
17. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства  $L_p$ .
18. Полнота пространств  $L_p$ .
19. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
20. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима.
21. Функции ограниченной вариации. Связь непрерывности функции ограниченной вариации и непрерывности её вариации с переменным верхним пределом. Интеграл Римана — Стилтеса и его связь с интегралом Лебега по мере Лебега — Стилтеса.
22. Теорема Витали о покрытии.
23. Дифференцируемость монотонных функций почти всюду.
24. Абсолютно непрерывные функции. Теорема об абсолютно непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду.
25. Производная неопределенного интеграла Лебега. Критерий представимости функции в виде неопределенного интеграла Лебега от своей производной.
26. Интегрирование по частям в интеграле Лебега. Замена переменной в интеграле Лебега.
27. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру. Малая теорема Фубини.
28. Ортонормированные системы в сепарабельных евклидовых и гильбертовых пространствах. Свойства, равносильные полноте системы (без доказательства). Ряды Фурье в пространстве  $L_1([a, b])$ . Теорема Мерсера о коэффициентах.
29. Формулы для частичных сумм и средних Фейера тригонометрического ряда Фурье. Сходимость средних Фейера для тригонометрических рядов Фурье непрерывных функций.

Полнота тригонометрической системы.

30. Точки Лебега интегрируемой функции. Сходимость средних Фейера для тригонометрических рядов Фурье интегрируемых функций.

31. Признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Признак Жордана (без доказательства). Система Радемахера. Система Уолша и ее полнота.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН

Б. С. Кашин