ПРОГРАММА КУРСА "ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ"
(весна 2021/22 уч. г., лектор -- д.ф.-м.н., профессор М.И. Дьяченко)

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры и т.д.). Минимальные кольца и их свойства. Связь между σ-кольцами и δ-кольцами.
2. Меры на полукольцах. Вспомогательные леммы.
3. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в R^n и ее σ-аддитивность.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Внешние меры Лебега и Жордана. Их полуаддитивность.
6. Продолжение меры по Лебегу и по Жордану. Меры Лебега и Жордана. Их свойства.
7. Меры Лебега -- Стилтьеса на прямой. Мера Бореля.
8. σ-конечные меры Лебега.
9. Связь σ-аддитивности и непрерывности. Полнота мер.
10. Теорема о существовании неизмеримого подмножества в любом измеримом, относительно классической меры Лебега, множестве положительной меры.
11. Теоремы о структуре измеримых по Лебегу множеств и о структуре открытых подмножеств прямой.
12. Теорема Витали.
13. Измеримые функции. Их арифметические свойства. Измеримость функции f(g(x)), где f – непрерывная, а g – измеримая функции.
14. Измеримые функции и предельный переход. Теорема об измеримости производной непрерывной функции.
15. Сходимость по мере и ее свойства, включая теорему о сохранении сходимости по мере при применении непрерывной функции к последовательности, сходящейся по мере на множестве конечной меры.
16. Критерий Коши для сходимости по мере.
17. Сходимость почти всюду. Критерий этой сходимости на множествах конечной меры.
18. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема о существовании в сходящейся по мере последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
19. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
20. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
21. Определение интеграла Лебега в общем случае. Две леммы о монотонных последовательностях простых функций.
22. Линейность интеграла Лебега по функции и по множеству для неотрицательных функций. Линейность интеграла Лебега относительно умножения на константу.
23. Линейность интеграла Лебега по функции в общем случае. Интегрирование неравенств.
24. Теорема Леви о предельном переходе и ее следствия.
25. Теоремы Фату и Лебега.
26. Линейность интеграла Лебега по множеству. Неравенство Чебышева и его следствие. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
27. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
28. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в R^n.
29. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
30. Теорема Радона - Никодима.
31. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p, $1\le p\le\infty$.
32. Полнота пространств L_p, $1\le p\le\infty$.

33. Теорема о представлении интеграла от p-ой ($1 \le p < \infty$)степени измеримой функции с помощью функции распределения.
34. Теорема о плотности некоторых функциональных семейств в L_p, $1 \le p < \infty$ на отрезке и на прямой.
35. Абсолютно непрерывные функции и их свойства (арифметические свойства, абсолютная непрерывность композиции f(g (x)), где f и g – абсолютно непрерывны и g монотонна).
36. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации. Абсолютная непрерывность вариации абсолютно непрерывной функции.
37. N-свойство Лузина. Связь сохранения класса измеримых множеств и N-свойства для непрерывных отображений. Абсолютно непрерывные функции и N-свойство.
38. Индикатриса Банаха. Теорема Банаха-Зарецкого.
39. Теорема о дифференцировании интеграла Лебега по переменному верхнему пределу.
40. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной с помощью интеграла Лебега.
41. Точки плотности измеримого множества. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Лебега.

Лектор
д.ф.-м.н., профессор М.И.Дьяченко

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа
академик РАН, профессор Б.С.Кашин