Программа экзамена по действительному анализу

1) Система множеств: алгебры и σ-алгебры. Основные примеры алгебр и σ-алгебр. Порожденная системой подмножеств σ-алгебра, ее существование и единственность. Борелевская σ-алгебра.

2) Аддитивные и счетно-аддитивные функции множества, меры. Примеры. Базовые свойства аддитивной неотрицательной функции. Эквивалентное описание счетной аддитивности для аддитивной функции множества, свойства непрерывности меры.

3) Компактные классы, примеры. Теорема о приближающем компактном классе. Счетная аддитивность длины на алгебре конечных объединений попарно непересекающихся полуинтервалов.

4) Верхняя (внешняя) мера, система измеримых множеств. Основные свойства верхней меры. Теорема о продолжении счетно аддитивной функции множества на алгебре до меры на σ-алгебре всех измеримых множеств.

5) Мера Лебега на кубе и в $\mathbb{R}^d$. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов.

6) Функция распределения борелевской меры на прямой. Свойства функции распределения. Взаимооднозначное соответствие функций распределения и борелевских мер на прямой.

7) Измеримые функции. Эквивалентное определение измеримых функций и отображений с измеримыми компонентами. Основные свойства измеримых функций (композиция с непрерывной, сумма, произведение, предельный переход, супремум). Расширенное понятие измеримости для функций на пространстве с мерой, корректность.

8) Сходимости по мере и почти всюду, их взаимосвязь на пространстве с конечной мерой (лемма Бореля–Кантелли, теорема Рисса).

9) Конструкция интеграла Лебега для простых функций, корректность определения. Основные свойства: линейность, монотонность. Конструкция интеграла Лебега для ограниченных функций, корректность определения. Основные свойства: линейность, монотонность, равенство нулю интеграла у равной нулю почти всюду функции.

10) Конструкция интеграла Лебега для неотрицательных функций, корректность определения. Основные свойства: линейность, монотонность, равенство нулю интеграла у равной нулю почти всюду функции. Конструкция интеграла Лебега в общем случае, корректность определения и интегрируемость модуля. Основные свойства: линейность, монотонность, равенство нулю интеграла у равной нулю почти всюду функции, неравенство Чебышева, ревенство нулю неотрицательной функции, интеграл от которой равен нулю, оценка модуля интеграла интегралом модуля.

11) Интеграл по множеству, как функция множества. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Лебега для конечных и бесконечных мер. Теоремы Беппо Леви и Фату.

12) Пространства $L^p(\mu)$. Неравенства Гельдера и Минковского, норма на пространстве $L^p(\mu)$. Полнота пространств $L^p(\mu)$.

13) Произведение пространств с мерами и произведение мер. Монотонные классы и теорема о монотонном классе. Свойства сечения множеств из произведения σ-алгебр. Построение произведения двух мер.

14) Свойства сечения множеств из σ-алгебры всех измеримых множеств относительно произведения мер. Теорема Фубини.

15) Незнакопостоянные меры, разложение Хана и разложение Жордана.

16) Абсолютно непрерывные меры и теорема Радона–Никодима.