

## Программа курса лекций "Действительный анализ",

мехмат, 2020/21, 2 курс, 2 поток

1. Системы множеств: полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры. Примеры. Стандартная мера на полукольце промежутков в  $\mathbb{R}^n$  и ее счетная аддитивность.
2. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
3. Сохранение счетной аддитивности при продолжении с полукольца на минимальное кольцо. Эквивалентность счетной полуаддитивности и счетной аддитивности меры на полукольце.
4. Связь счетной аддитивности и непрерывности меры. Пример меры на полукольце, не являющейся счетно-аддитивной.
5. Внешняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Совпадение внешней меры Лебега с мерой на элементах исходного кольца.
6. Измеримые по Лебегу множества образуют алгебру.
7. Мера Лебега. Аддитивность меры Лебега.
8. Измеримые множества образуют сигма-алгебру. Счетная аддитивность меры Лебега.
9. Существование неизмеримых по Лебегу подмножеств отрезка.
10. Измеримые функции. Свойства измеримых функций.
11. Сходимость почти всюду. Измеримость предела п.в. последовательности измеримых функций.
12. Сходимость по мере. Связь между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере.
13. Сходимость по мере. Теорема Рисса о подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
14. Теорема Егорова.
15. Теорема Лузина.
16. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
17. Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега.
18. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Счетная аддитивность интеграла Лебега. Приближение интегрируемых на отрезке функций кусочно-постоянными функциями.
19. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
20. Теорема Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
21. Счетная аддитивность произведения счетно-аддитивных мер. Прямое произведение мер.
22. Теорема Фубини для индикаторов множеств.
23. Теорема Фубини для счетно-простых и интегрируемых функций.
24. Заряды. Разложение Хана.
25. Теорема Радона-Никодима.
26. Полнота пространства  $L_1$ . Пространства  $L_p$ . Неравенства Гельдера и Минковского (б/д).
27. Ортонормированная система Радемахера-Уолша в  $L_2[0, 1]$ .

28. Теорема Витали о дизъюнктном покрытии.
29. Монотонные функции, верхняя и нижняя производные, две леммы о мере образов множеств, определенных через эти производные.
30. Монотонная на отрезке функция дифференцируема почти всюду. Интегрируемость производной монотонной функции.
31. Абсолютно непрерывные функции. Их представление в виде разности двух монотонных функций. Если производная абсолютно непрерывной функции п.в. равна 0, то функция является постоянной.
32. Производная первообразной от интегрируемой функции почти всюду совпадает с этой функцией. Формула Ньютона-Лейбница для абсолютно непрерывных функций.
33. Формула интегрирования по частям абсолютно непрерывных функций.
34. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Понятие интеграла Римана-Стилтьеса.