Задачи по курсу действительного анализа
2 курс, 1 поток, 2020-2021 учебный год,
лектор профессор В. А. Скворцов

1. Доказать, что у любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество локальных строгих максимумов не более чем счетно.

2. Доказать, что у любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество разрывов первого рода не более чем счетно.

3. Замкнутость относительно каких пар операций $\cup, \triangle, \cap, \setminus$ дает эквивалентное определение кольца?

4. Проверить, что кольцо является полукольцом.

5. Если для любого $\alpha \in A$ R_α является кольцом, то и $\bigcap\limits_{\alpha \in A} R_\alpha$ — кольцо.

6. Доказать, что на полукольце прямоугольников площадь является σ-аддитивной мерой.

7. Пусть мера m на полукольце $S = \big\{[a, b) \subset [0, 1]\big\}$, задана равенством $m\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$, где F — монотонно возрастающая на $[0, 1]$ функция. Доказать: мера m на полукольце S σ-аддитивна $\Leftrightarrow F(x - 0) = F(x)$ $\forall x \in (0, 1]$.

8. Доказать, что величина внешних мер Лебега и Жордана не изменится если в их определениях рассматривать покрытия только системами *попарно непересекающихся* элементов полукольца.

9. Доказать, что внешния мера Лебега μ^*, определенная через покрытия элементами полукольца, на кольце, порожденном полукольцом, совпадает с мерой m', полученной естественным продолжением меры m, которая на полукольце является σ-аддитивной.

10. Доказать, что элементы кольца, порожденного полукольцом, измеримы по Каратеодори относительно внешней меры, полученной продолжением меры с полукольца методом Лебега.

11. Привести пример плоского множества, измеримого по Лебегу, но не измеримого по Жордану.

12. Привести пример борелевского множества, не являющегося $\mathcal{F}_\sigma$-множеством ($\mathcal{G}_\delta$-множеством).

13. Является ли множество рациональных точек на отрезке $[0, 1]$ $\mathcal{G}_\delta$-множеством?

14. Определить борелевский класс множества точек непрерывности функции на отрезке.

15. Существует ли функция, у которой множество точек непрерывности совпалает с множеством рациональных точек?

16. Доказать, что если множество E в $\mathbb{R}^n$ замкнуто, ограничено и для него $\mu_L E = 0$, то оно измеримо и по Жордану и $\mu_J E = 0$.

17. Доказать, что расстояние между множествами $d(A, B) = m_L^*(A \triangle B)$ удовлетворяет аксиоме треугольника.

18. Для любого множества положительной меры Лебега на действительной прямой построить множество, содержащееся в нем и не измеримое по Лебегу.

19. Построить на $[0, 1]$ нигде не плотное множество наперед заданной меры $p < 1$.

20. Найти меру совершенного множества канторовского типа с отношением длины выбрасываемого на n-м шаге интервала к длине отрезка, из которого он выбрасывается, равной $1/(\alpha + n)^2$, $\alpha > 0$.

21. Привести пример множества меры нуль, которое нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

22. Доказать, что в любом множестве положительной меры на действительной прямой найдутся две точки, расстояние между которыми рационально.

23. Доказать, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ существует замкнутое множество F_ϵ и открытое множество G_ϵ такие, что $F_\epsilon \subset E \subset G_\epsilon, \quad \mu G_\epsilon - \mu F_\epsilon < \epsilon$.

24. Доказать эквивалентность определения измеримости функции через измеримость множеств любого из типов:
$$\{f(x) \leqslant C\}, \{f(x) < C\}, \{f(x) \geqslant C\}, \{f(x) > C\}.$$

25. Привести пример неизмеримой функции $f(x)$, для которой множество $\{x\colon\ f(x) = C\}$ измеримо для любого $C \in \mathbb{R}$.

26. Привести пример неизмеримой функции f, такой что $|f|$ измерима.

27. Показать, что для измеримости функции f необходимо и достаточно, чтобы для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}$ его прообраз был измерим.

28. Доказать измеримость производной $f'(x)$, если измеримая функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду.

29. Будет ли измерима функция $g(\phi(x))$, где a) g — измеримая, а ϕ — непрерывная функция; b) g — непрерывная функция, а ϕ — измеримая?

30. Пусть f — счетно-простая функция, принимающая значения a_k на множествах E_k, $k = 1, 2, \ldots$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Показать, что она измерима тогда и только тогда, когда все E_k измеримы.

31. Доказать критерий Коши сходимости по мере.

32. Доказать, что из последовательности измеримых функций, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду (теорема Рисса).

33. Доказать, что теорема Егорова неверна, если мера всего пространства равна $+\infty$.

34. Получить теорему Лузина о С-свойстве из теоремы Егорова.

35. Пусть функция f измерима на множестве E конечной меры. Доказать, что сходимость каждого из рядов
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\mu\{x \in E\colon\ k \leq |f(x)| < k+1\},\ \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\{x \in E\colon\ |f| \geq k\}$$
необходима и достаточна для интегрируемости f на E.

36. Проверить интегрируемость по Лебегу функции x^α на $[0,1]$ и на $[1,\infty]$ при различных действительных α.

37. Привести пример функции $f(x)\colon\ E \to \mathbb{R}$, и измеримых множеств E, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких что $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k$, и при этом f интегрируема по Лебегу на каждом E_k, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} f\, d\mu$ абсолютно сходится, но f не интегрируема по Лебегу на E.

38. Доказать, что суммируемость счетно–простой функции, принимающей значения a_k на E_k ($E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k$), эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|\mu E_k$.

39. Следует ли из существования конечного предела $\lim\limits_{N\to\infty} \int_E [f]^N\, d\mu$ (где $[f]^N$ — срезка функции f) суммируемость функции f?

40. Показать, что в теореме Беппо Леви условие $f_1(x) \in L(E)$ нельзя отбросить.

41. $\mathbb{Q}\colon = \{r_n\}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}$ сходится почти всюду.

42. Привести пример, когда в заключении теоремы Фату строгое неравенство.

43. Доказать, что
$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}}\, dx = 1.$$

44. Показать, что теорема Лебега о мажорируемой сходимости остается справедливой, если в ней условие сходимости последовательности почти всюду заменить сходимостью по мере.

45. Доказать, что для неотрицательных функций из интегрируемости по Риману в несобственном смысле следует интегрируемость по Лебегу.

46. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E, $E_k = \{x \in E\colon\ |f(x)| > k\}$. Доказать, что $\mu E_k = \bar{\bar{o}}(1/k)$ при $k \to \infty$.

47. Привести пример измеримой и неинтегрируемой по Лебегу функции, для которой $\mu\{|f(x)| > k\} = \bar{\bar{o}}(1/k)$ при $k \to \infty$.

48. Привести пример такой ограниченной измеримой функции, что любая функция, совпадающая с ней почти всюду, неинтегрируема по Риману.

49. Доказать, что если аддитивная функция множества является одновременно абсолютно непрерывной и сингулярной, то она тождественно равна нулю.

50. Доказать, что аддитивная функция множества абсолютно непрерывна (сингулярна) тогда и только тогда, когда абсолютно непрерывны (сингулярны) ее верхняя и нижняя вариации.

51. Доказать, что линейная комбинация абсолютно непрерывных (сингулярных) аддитивных функций множества также абсолютно непрерывна (сингулярна).

52. Пусть последовательность $\{\phi_k\}$ аддитивных абсолютно непрерывных (сингулярных) функций множества сходится на каждом измеримом множестве A к значению $\phi(A)$. Тогда функция ϕ также абсолютно непрерывна (сингулярна).

53. Доказать, что аддитивная функция множества ϕ сингулярна на E тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E_0 \subset E$ такое, что $\mu(E_0) < \varepsilon$ и $V(E \setminus E_0, \phi) < \varepsilon$.

54. Доказать, что канторова лестница не является AC-функцией.

55. Привести пример непрерывной функции, обладающей N-свойством, но не принадлежащей классу AC.

56. Доказать линейность классов AC и VB.

57. При каких α и β функции $x^\alpha \sin x^\beta$, $x^\alpha \cos x^\beta$ принадлежат классам AC и VB на $[0, 1]$?

58. Доказать, что вариация V_a^x функции ограниченной вариации непрерывна в точке непрерывности функции.

59. Доказать, что для произвольной функции на прямой множество точек $\{x : D_-F(x) > D^+F(x)\}$ не более чем счетно.

60. Доказать, что почти все точки измеримого множества на прямой являются его точками плотности.

61. Привести пример функции, всюду дифференцируемой на отрезке, которая не принадлежит классу AC.

62. Доказать, что для каждой функции, всюду дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, найдется интервал $(c, d) \subset [a, b]$, на котором она принадлежит классу AC.

63. Привести пример функции, всюду дифференцируемой на отрезке, у которой производная не интегрируема по Лебегу ни в какой окрестности некоторого множества положительной меры.

64. Привести пример функции, всюду дифференцируемой на отрезке, у которой производная ограничена, но не интегрируема по Риману ни в какой окрестности некоторого множества положительной меры.

65. Вычислить интеграл Лебега–Стилтьеса $\int\limits_a^b f\, d\mu_\nu$, где мера μ_ν определена функцией скачков некоторой функции ограниченной вариации.

66. Для функций $f, g \in L(\mathbb{R})$ доказать существование свертки $(f * g)(y) = \int\limits_{\infty}^{\infty} f(x)g(y - x)\, dx$ при почти всех y и ее интегрируемость на $\mathbb{R}$.

67. Доказать, что функция f интрегрируема по Лебегу на измеримом множествве E тогда и только тогда, когда функция $\mu\{x \in E : |f(x)| > t\}$ интегрируема на $[0, \infty)$, причем

$$\int\limits_E |f(x)|\, d\mu = \int\limits_E \mu\{x \in E : |f(x)| > t\} dt.$$

68. Показать несовпадение пространств $L^p(E)$ при различных p (для $E = [0, 1]$ и $E = [1, \infty)$).

69. Выяснить связь между сходимостью в $L^p(E)$ и сходимостью почти всюду и по мере.

70. Доказать неравенство Чебышева для $L^p(E)$:

$$\mu\{x\colon\ |f(x)| \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{1}{\alpha^p} \int\limits_E |f(x)|^p\, d\mu.$$

71. Доказать, что если $\|f\|_p \leqslant C < \infty$ при всех $p \geqslant 1$, то f эквивалентна ограниченной функции.

72. При каких α ряд $\sum n^{-\alpha} \cos nx$ будет рядом Фурье функции из L^2?

73. Будет ли ряд $\sum \frac{\cos nx}{\ln n}$ рядом Фурье непрерывной функции?

74. Доказать сходимость ряда Фурье-Лебега функции $f \in L(0, 2\pi)$ в точке, в которой все производные числа Дини этой функции конечны.