

**Программа курса «Действительный анализ»
Мех-мат, 2 курс, вечернее отделение, весна 2018/19 уч.г.**

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры и т.п.). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Связь σ -аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в \mathbb{R}^n и ее σ -аддитивность.
4. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
5. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега.
6. σ -конечные меры и их продолжение по Лебегу (без обоснования). Теорема о структуре измеримых множеств.
7. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
8. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
9. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова. C -свойство Лузина (без доказательства).
10. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
11. Определение интеграла Лебега в общем случае. Элементарные свойства интеграла Лебега.
12. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность.
13. Теорема Лебега о предельном переходе. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.
14. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
15. Прямое произведение мер, его σ -аддитивность.
16. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Интеграл как мера подграфика. Теоремы Фубини и Тонелли.
17. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства $L_p(X, M, \mu)$.
18. Полнота пространств $L_p(X, M, \mu)$.
19. Заряды. Разложения Хана и Жордана. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима (без доказательства).
20. Функции ограниченной вариации и их свойства. Непрерывность вариации с переменным верхним пределом для непрерывной функции.
21. Интеграл Римана — Стильтьеса и его свойства. Связь интеграла Римана — Стильтьеса с интегралом Лебега по мере Лебега — Стильтьеса. Теорема о дифференцируемости монотонных функций (без доказательства). Оценка интеграла от производной неубывающей функции.
22. Теорема Витали о покрытии.
23. Абсолютно непрерывные функции. Теорема об абсолютно непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду.
24. Производная неопределенного интеграла Лебега. Критерий представимости функции в виде неопределенного интеграла Лебега от своей производной.
25. Замена переменной в интеграле Лебега.
26. Интегрирование по частям в интеграле Лебега. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру.
27. Ортонормированные системы в (сепарабельных) гильбертовых пространствах. Свойства, равносильные полноте (без доказательства). Полнота тригонометрической системы. Ряды Фурье в пространстве $L_1([a, b])$. Теорема Мерсера о коэффициентах.
28. Признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Система Уолша и ее полнота.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН

Б. С. Кашин