

Программа по курсу действительного анализа
2 курс, 1 поток, 2018-2019 учебный год
Лектор профессор В. А. Скворцов

1. Системы множеств (полукольцо, кольцо, σ -кольцо, алгебра, σ -алгебра). Структура элементов минимального кольца, порожденного полукольцом.
2. Теорема о продолжении меры с полукольца на порожденное им кольцо.
3. Счетная полуаддитивность счетно-аддитивной меры на кольце. Внешняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Связь с внешней мерой Жордана.
4. Определение измеримых по Каратеодори множеств. Теорема: измеримые по Каратеодори множества образуют σ -алгебру, на которой мера σ -аддитивна. Непрерывность меры.
5. Метрическая внешняя мера. Измеримость борелевских множеств.
6. Метричность внешней меры Лебега в \mathbb{R}^n . Пример неизмеримого по Лебегу множества.
7. Понятие измеримой оболочки множества. Борелевская регулярность внешней меры Лебега в \mathbb{R}^n . Эквивалентность измеримости по Каратеодори и по Лебегу (через внутреннюю меру).
8. Мера Лебега–Стилтьеса, определенная монотонной функцией, ее σ -аддитивность на полукольце полуинтервалов.
9. Определение и основные свойства измеримых функций на (X, \mathcal{M}) . Теорема о пределе последовательности измеримых функций.
10. Теорема о приближении любой измеримой функции простыми измеримыми функциями.
11. Сходимость по мере. Связь со сходимостью почти всюду.
12. Теорема Егорова.
13. Определение и основные свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций, заданных на (X, \mathcal{M}, μ) . Интеграл от простой функции.
14. Эквивалентное определение интеграла Лебега через монотонную последовательность простых функций.
15. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега от функций любого знака.
16. Теорема о почленном интегрировании ряда из неотрицательных функций. Теорема о σ -аддитивности интеграла Лебега.
17. Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для монотонной последовательности функций. Теорема Б. Леви.
18. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе. Критерий интегрируемости в терминах срезки.
19. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана (собственным и несобственным) и с интегралом Ньютона.
20. Метрика пространства $L(X, \mathcal{M}, \mu)$. Приближение по этой метрике суммируемой функции ограниченными и непрерывными (в случае \mathbb{R}) функциями.
21. Неравенство Чебышева. Связь между сходимостью по мере и сходимостью в $L(X, \mathcal{M}, \mu)$.
22. σ -аддитивная функция множества (заряд), её непрерывность. Неравенства в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности множеств.
23. Верхняя, нижняя и полная вариации аддитивной функции множества. Их конечность и σ -аддитивность. Разложение Жордана.
24. Разложение Хана.
25. Обобщенное разложение Хана.
26. Абсолютно непрерывные и сингулярные заряды. Эквивалентность двух определений абсолютной непрерывности. Интеграл Лебега как функция множества, его абсолютная непрерывность.

27. Лебеговское разложение заряда. Теорема Радона–Никодима.
28. Теорема Витали о покрытии.
29. Производные числа Дини. Теорема о дифференцируемости монотонной функции и интегрируемости производной.
30. Вариация функции. Классы VB -функций и AC -функций, связь между ними. Дифференцируемость. Представление AC -функции в виде разности двух монотонных AC -функций.
31. N -свойство AC -функции на множестве. Условие монотонности функции, обладающей N -свойством.
32. Дифференцируемость неопределенного интеграла Лебега на действительной прямой. Его характеристическое свойство.
33. Определение ACG -функций и её N -свойство. Условие монотонности ACG -функции. Интеграл Данжуа–Хинчина, его единственность.
34. Абсолютная непрерывность меры Лебега–Стилтьеса, порожденной AC -функцией, и её представление в виде интеграла Лебега.
35. Интегралы Лебега–Стилтьеса по мере, порожденной AC -функцией.
36. Прямое произведение мер множеств, его σ -аддитивность.
37. Лемма о приближении измеримого множества множествами из полукольца.
38. Теорема Фубини и теорема Тонелли, примеры их применения.
39. Пространства $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ ($p \geq 1$). Неравенства Гельдера и Минковского.
40. Полнота пространства $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ ($p \geq 1$).
41. Пространство $L_2[a, b]$. Ортонормированные системы в нем, примеры. Теорема о наилучшем приближении в L_2 полиномами по данной системе.
42. Неравенство Бесселя. Теорема Мерсера о коэффициентах Фурье суммируемой функции по ограниченной ортонормированной системе.
43. Теорема Рисса–Фишера.
44. Полнота ортонормированной системы и равенство Парсеваля.
45. Ряды Фурье–Лебега по тригонометрической системе. Признак Дини сходимости ряда в точке.

Литература

1. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл, Факториал Пресс, Москва, 2002.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс (изд. 2-ое), URSS, Москва, 2011
3. Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П., Обобщенные интегралы (изд. 2-е), URSS, Москва, 2011

Дополнительная литература

1. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарьян К.С., Сифуэнтэс П., Действительный анализ в задачах, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.
2. Сакс С., Теория интеграла, URSS, Москва, 2004.

Заведующий кафедрой
теории функций и функ-
ционального анализа,
академик РАН

/Б. С. Капин/

Профессор кафедры тео-
рии функций и функци-
онального анализа

/В. А. Скворцов./