ПРОГРАММА КУРСА "ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ"
(весна 2017/18 уч. г., лектор -- д.ф.-м.н., профессор М.И. Дьяченко)

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры и т.д.). Минимальные кольца и их свойства. Связь между σ-кольцами и δ-кольцами.
2. Меры на полукольцах. Вспомогательные леммы.
3. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в R^n и ее σ-аддитивность.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Внешние меры Лебега и Жордана. Их полуаддитивность.
6. Продолжение меры по Лебегу и по Жордану. Меры Лебега и Жордана. Их свойства.
7. σ-конечные меры.
8. Связь σ-аддитивности и непрерывности. Полнота мер.
9. Меры Лебега -- Стилтьеса на прямой. Мера Бореля.
10. Теорема о существовании неизмеримого подмножества в любом измеримом, относительно классической меры Лебега, множестве положительной меры.
11. Теоремы о структуре измеримых по Лебегу множеств и о структуре открытых подмножеств прямой.
12. Теорема Витали.
13. Измеримые функции. Их арифметические свойства. Измеримость функции f(g(x)), где f – непрерывная, а g – измеримая функции.
14. Измеримые функции и предельный переход. Теорема об измеримости производной непрерывной функции.
15. Сходимость по мере и ее свойства.
16. Критерий Коши для сходимости по мере.
17. Сходимость почти всюду. Критерий этой сходимости на множествах конечной меры.
18. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема о существовании в сходящейся по мере последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
19. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
20. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
21. Определение интеграла Лебега в общем случае. Две леммы о монотонных последовательностях простых функций.
22. Линейность интеграла Лебега по функции и по множеству для неотрицательных функций. Линейность интеграла Лебега относительно умножения на константу.
23. Линейность интеграла Лебега по функции в общем случае. Интегрирование неравенств.
24. Теорема Леви о предельном переходе и ее следствия.
25. Теоремы Фату и Лебега.
26. Линейность интеграла Лебега по множеству. Неравенство Чебышева и его следствие. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
27. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
28. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в R^n.
29. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
30. Теорема Радона - Никодима.
31. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p, $1\le p\le\infty$.
32. Полнота пространств L_p, $1\le p\le\infty$.
33. Теорема о представлении интеграла от p-ой ($1\le p<\infty$)степени измеримой функции с помощью функции распределения.
34. Теорема о плотности некоторых функциональных семейств в L_p, $1\le p<\infty$ на отрезке и на

прямой.

35. Абсолютно непрерывные функции и их свойства (арифметические свойства, абсолютная непрерывность композиции f(g (x)), где f и g – абсолютно непрерывны и g монотонна).
36. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации. Теорема об индикатрисе Банаха.
37. N-свойство Лузина. Связь сохранения класса измеримых множеств и N-свойства для непрерывных отображений. Абсолютно непрерывные функции и N-свойство.
38. Теорема Банаха-Зарецкого.
39. Теорема о дифференцировании интеграла Лебега по переменному верхнему пределу.
40. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной с помощью интеграла Лебега. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Лебега.
41. Прямое произведение мер.
42. Теоремы Фубини.

Лектор
д.ф.-м.н., профессор М.И.Дьяченко

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа
академик РАН, профессор Б.С.Кашин