Программа по курсу действительного анализа
2 курс, 1 поток, 2016-2017 учебный год
Лектор профессор В. А. Скворцов

1. Системы множеств (полукольцо, кольцо, σ-кольцо, алгебра, σ-алгебра). Структура элементов минимального кольца, порожденного полукольцом.

2. Теорема о продолжении меры с полукольца на порожденное им кольцо.

3. Счетная полуаддитивность счетно-аддитивной меры на кольце. Внешняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Связь с внешней мерой Жордана.

4. Определение измеримых по Каратеодори множеств. Теорема: измеримые по Каратеодори множества образуют σ-алгебру, на которой мера σ-аддитивна. Непрерывность меры.

5. Метрическая внешняя мера. Измеримость борелевских множеств.

6. Метричность внешней меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пример неизмеримого по Лебегу множества.

7. Борелевская регулярность внешней меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Эквивалентность измеримости по Каратеодори и по Лебегу (через внутреннюю меру).

8. Мера Лебега–Стилтьеса, определенная монотонной функцией, ее σ-аддитивность на полукольце полуинтервалов.

9. Определение и основные свойства измеримых функций на $(X, \mathcal{M})$. Теорема о пределе последовательности измеримых функций.

10. Теорема о приближении любой измеримой функции простыми измеримыми функциями.

11. Сходимость по мере. Связь со сходимостью почти всюду.

12. Теорема Егорова.

13. Определение и основные свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций, заданных на $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Интеграл от простой функции.

14. Эквивалентное определение интеграла Лебега через монотонную последовательность простых функций.

15. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега от функций любого знака.

16. Теорема о почленном интегрировании ряда из неотрицательных функций. Теорема о σ-аддитивности интеграла Лебега.

17. Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для монотонной последовательности функций. Теорема Б. Леви.

18. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе. Критерий интегрируемости в терминах срезки.

19. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана (собственным и несобственным) и с интегралом Ньютона.

20. Метрика пространства $L(X, \mathcal{M}, \mu)$. Приближение по этой метрике суммируемой функции ограниченными и непрерывными (в случае $\mathbb{R}^n$) функциями.

21. Неравенство Чебышева. Связь между сходимостью по мере и сходимостью в $L(X, \mathcal{M}, \mu)$.

22. σ-аддитивная функция множества (заряд), её непрерывность. Неравенства в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности множеств.

23. Верхняя, нижняя и полная вариации аддитивной функции множества. Их конечность и σ-аддитивность. Разложение Жордана.

24. Разложение Хана.

25. Обобщенное разложение Хана.

26. Абсолютно непрерывные и сингулярные заряды. Эквивалентность двух определений абсолютной непрерывности. Интеграл Лебега как функция множества, его абсолютная непрерывность.

27. Лебеговское разложение заряда. Теорема Радона–Никодима.

28. Теорема Витали о покрытии.

29. Теорема о дифференцируемости монотонной функции и интегрируемости производной.

30. Классы VB-функций и AC-функций, связь между ними.Дифференцируемость. Представление AC-функции в виде разности двух монотонных AC-функций.

31. N-свойство AC-функции на множестве. Условие монотонности функции, обладающей N-свойством.

32. Дифференцируемость неопределенного интеграла Лебега на действительной прямой. Его характеристическое свойство.

33. Определение ACG-функций и её N-свойство. Условие монотонности ACG-функции. Интеграл Данжуа-Хинчина, его единственность.

34. Абсолютная непрерывность меры Лебега-Стилтьеса, порожденной AC-функцией, и её представление в виде интеграла Лебега.

35. Интегралы Лебега-Стилтьеса по мере, порожденной AC-функцией. Связь с интегралом Римана-Стилтьеса в простейших случаях.

36. Прямое произведение мер множеств, его σ-аддитивность.

37. Лемма о приближении измеримого множества множествами из полукольца.

38. Теорема Фубини и теорема Тонелли, примеры их применения.

39. Пространства $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ $(p \geq 1)$. Неравенства Гельдера и Минковского.

40. Полнота пространства $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ $(p \geq 1)$.

41. Пространство $L_2[a, b]$. Ортонормированнные системы в нем, примеры. Теорема о наилучшем приближении в L_2 полиномами по данной системе.

42. Неравенство Бесселя. Теорема Мерсера о коэффициентах Фурье суммируемой функции по ограниченной ортонормированной системе.

43. Теорема Рисса–Фишера.

44. Полнота ортонормированной системы и равенство Парсеваля.

45. Ряды Фурье–Лебега по тригонометрической системе. Признак Дини сходимости ряда в точке.

Литература

1. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл, Факториал Пресс, Москва, 2002.

2. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс (изд. 2-ое), URSS, Москва, 2011

3. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарьян К.С., Сифуэнтэс П., Действительный анализ в задачах, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.

Дополнительная литература

1. Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П., Обобщенные интегралы (изд. 2-е), URSS, Москва, 2011

2. Сакс С., Теория интеграла, URSS, Москва, 2004.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН /Б. С. Кашин/

Профессор кафедры теории функций и функционального анализа /В. А. Скворцов./