

**Программа курса «Действительный анализ»  
Мех-мат, 2 курс, 2 поток, весна 2015/16 уч.г.**

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры и т.п.). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Связь  $\sigma$ -аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в  $\mathbb{R}^n$  и ее  $\sigma$ -аддитивность.
4. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
5. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега.
6.  $\sigma$ -конечные меры и их продолжение по Лебегу.
7. Теорема о структуре измеримых множеств.
8. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
9. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимости почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
10. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова.
11.  $C$ -свойство Лузина.
12. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
13. Определение интеграла Лебега в общем случае. Элементарные свойства интеграла Лебега.
14. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность.
15. Теорема Лебега о предельном переходе.
16. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
17. Признак Лебега интегрируемости по Риману. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.
18. Прямое произведение мер, его  $\sigma$ -аддитивность и ассоциативность.
19. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Интеграл как мера подграфика. Теорема Фубини.
20. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства  $L_p$ .
21. Полнота пространств  $L_p$ .
22. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
23. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима.
24. Функции ограниченной вариации и их свойства. Непрерывность вариации с переменным верхним пределом для непрерывной функции. Связь интеграла Римана — Стилтеса с интегралом Лебега по мере Стилтеса.
25. Теорема Витали о покрытии.
26. Дифференцируемость монотонных функций почти всюду.
27. Абсолютно непрерывные функции. Теорема об абсолютно непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду.
28. Производная неопределенного интеграла Лебега. Критерий представимости функции в виде неопределенного интеграла Лебега от своей производной.
29. Интегрирование по частям в интеграле Лебега. Замена переменной в интеграле Лебега.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН

Б. С. Кашин