Список задач по действительному анализу
(весенний семестр 2015 года, второй поток)

1. Доказать, что неотрицательная (конечно аддитивная) мера, определенная на алгебре подмножеств некоторого множества, может быть продолжена до меры, определенной на σ-алгебре всех подмножеств этого множества.

2. Пусть K — канторово подмножество отрезка $[0,1]$. Показать, что $K+K=[0,2]$.

Далее символ $\hat{L}_0(0,1)$ обозначает векторное пространство всех измеримых по Лебегу функций на $[0,1]$, а символ $L_0(0,1)$ — его факторпространство по подпространству всех функций, почти всюду равных нулю.

3. Показать, что ни на $\hat{L}_0(0,1)$, ни на $L_0(0,1)$ не существует топологии, сходимость относительно которой совпадает со сходимостью почти всюду.

4. Показать, что равенство $r(g,f)=\int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx$ определяет метрику на пространстве $L_0(0,1)$, сходимость относительно которой совпадает со сходимостью по мере. Показать, что на пространстве $\hat{L}_0(0,1)$ метрики с таким же свойством не существует. Показать также, что если V — открытое в метрике r непустое подмножество пространства $L_0(0,1)$, то $V=L_0(0,1)$.

5. Привести пример измеримой ограниченной функции на $[0,1]$, обладающей следующим свойством: всякая функция, совпадающая с ней почти всюду, всюду разрывна.

6. Пусть f и g — две функции на [0,1], принимающие значения в $[0,1]$, причем функция f измерима (по Лебегу), а функция g непрерывна. Показать, что тогда функция $g(f(\cdot))$ измерима, а функция $f(g(\cdot))$ может не быть измеримой.

7. Привести пример $\sigma-$ кольца подмножеств некоторого множества, не являющегося алгеброй подмножеств.

8. Показать, что пересечение двух полуколец подмножеств может не быть полукольцом (М.К.Потапов).

9. Показать, что на полукольце P подмножеств может существовать неотрицательная функция ν, не являющаяся мерой, но тем не менее обладающая следующим свойством: каковы бы ни были непересекающиеся множества $A,B\in P$, справедливо равенство $\nu(A\cup B)=\nu A+\nu B$.

10. Пусть ν — счетно аддитивная мера на $\sigma-$алгебре борелевских подмножеств полного сепарабельного метрического пространства. Тогда, каковы бы ни были борелевское подмножество B этого пространства и $\varepsilon>0$, существует такое компактное подмножество $K\subset B$, что $\nu(B\backslash K)<\varepsilon$ (Улам).

11. Показать, что в предыдущем упражнении как полнота, так и сепарабельность метрического пространства существенны.

12. Привести пример знакопеременной счетно аддитивной меры, определенной на алгебре множеств, множество значений которой не ограничено.

13. Пусть ν — мера на алгебре множеств, состоящей из конечных подмножеств множества натуральных чисел и их дополнений, равная нулю на каждом конечном множестве и единице на его дополнении. Доказать, что она не является счетно аддитивной.

14. Пусть ν — мера на алгебре множеств, состоящей из не более чем счетных подмножеств вещественной прямой и их дополнений, равная нулю на каждом не более чем счетном множестве и единице на его дополнении. Доказать, что она является счетно аддитивной.

15. Доказать, что существует гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на себя, отображающий некоторые множества нулевой меры в множества положительной меры.

16. Доказать, что всякая измеримая по Лебегу функция на $[0,1]$ почти всюду совпадает с некоторой борелевской функцией.

17. Доказать, что если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них также имеет мощность континуума.

18. Доказать, что если объединение не более чем счетного семейства множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них также имеет мощность континуума.

19. Доказать, что интервал $(0,1)$ не является объединением не более чем счетного множества попарно непересекающихся замкнутых множеств.

20. Построить функцию вещественного переменного, множество точек разрыва которой совпадает с множеством рациональных чисел.

21. Доказать, что не существует функции вещественного переменного, множество точек разрыва которой совпадает с множеством иррациональных чисел.

22. Привести пример нигде не плотного множества положительной меры на $[0,1]$.

23. Привести пример множества первой категории на $[0,1]$, мера которого равна единице.

24. Привести пример множества второй категории на $[0,1]$, мера которого равна нулю.

25. Привести пример строго монотонной бесконечно дифференцируемой функции на $[0,1]$, производная которой обращается в нуль на множестве положительной меры.

26. Пусть f — функция Кантора на $[0,1]$ и ν — мера на $\sigma-$алгебре борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, такая, что, каковы бы ни были $\alpha, \beta \in [0,1]$ $\nu[\alpha,\beta) = \nu[\alpha,\beta] = f(\beta) - f(\alpha)$. Тогда мера ν и мера Лебега на $[0,1]$ взаимно сингулярны.

27. Доказать, что на вещественной прямой существует такое подмножество, что всякое измеримое по Лебегу множество положительной меры пересекается как с самим этим множеством, так и с его дополнением (конечно, такое множество не является измеримым).

28. Доказать, что всякое измеримое по Лебегу подмножество вещественной прямой, имеющее положительную меру Лебега, содержит неизмеримое подмножество, внешняя мера которого совпадает с мерой исходного множества, а внутренняя мера равна нулю.

29. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$ и ν — счетно аддитивная мера на $\sigma-$ алгебре $\mathcal{A}$ всех подмножеств множества Ω, значение которой на каждом конечном подмножестве равно числу его элементов. Тогда $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в точности тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится, причем в этом случае $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{\Omega} f(n)\nu(dn)$.

30. Привести пример измеримого по Лебегу подмножества квадрата $[0,1]\times[0,1]$, обе проекции которого являются неизмеримыми подмножествами соответствующих отрезков $[0,1]$.

31. Показать, что если неотрицательная функция f на отрезке $[0,1]$ измерима, то множество $\{(x,z) \in [0,1]\times\mathbb{R} : z \leq f(x)\}$ измеримо по Лебегу (как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$), причем его мера Лебега равна интегралу $\int_0^1 f(x)dx$.

32. Пусть $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \nu_n), n = 1,2$ — две копии пространства с мерой из задачи 65. Пусть функции f и g на $\Omega_1 \times \Omega_2$ определяются так: $f(n,n) = 1, f(n,n+1) = -1, (n \in \Omega)$, $f(n,k) = 0$ в остальных случаях, $g(n,n) = 1, g(n+1,n) = g(n,n+1) = -1(n \in \Omega), f(n,k) = 0$ в остальных случаях. Доказать, что функции f и g не являются интегрируемыми по мере $\nu_1 \otimes \nu_2$, однако повторные интегралы от этих функций существуют, причем для функции g они равны друг другу, а для функции f — не равны.

33. Привести пример (=доказать существование) неотрицательной конечной меры, определенной на $\sigma-$алгебре множеств, но не являющейся счетно аддитивной.

34. Доказать, что если $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ — пространство с конечной мерой,$1 \leq p < q \leq \infty, f \in$

$L_q(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, то $f \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, и показать, что для пространств с бесконечной мерой это не так.

35. Доказать, что если $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ — пространство с конечной мерой, то из сходимости почти всюду последовательности определенных на $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ измеримых функций вытекает ее сходимость по мере, но что это неверно для пространств с мерой, которая может принимать бесконечные значения.

36. Привести пример последовательности измеримых функций, сходящейся по мере, но не сходящейся ни в одной точке.

37. Доказать, что на вещественной прямой существует измеримое по Лебегу множество, не являющееся борелевским.

38. Пусть F_K —функция Кантора и ν_K — борелевская мера на $\mathbb{R}$, функция распределения которой совпадает с F_K. Пусть мера μ на $\mathbb{R}$ определяется равенством $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-x)\nu(dx)$. Показать, что носитель меры μ(пересечение замкнутых множеств, на дополнении к каждому из которых мера μ обращается в нуль) совпадает с отрезком $[0, 2]$, но что тем не менее мера μ сингулярна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$.

39. Пусть f — измеримая по Лебегу функция на $[0, 1]$. Доказать, что тогда существует такое $c \in R^1$, что функция g, определяемая равенством $g(x) = \frac{1}{f(x)-c}$, не является интегрируемой.

40. Привести пример последовательности функций из $L_p([0, 1]) \cap L_1([0, 1])$, сходящейся в $L_1([0, 1])$, но не в $L_p([0, 1])$.