Программа курса

«ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (*2 курс, вечерние отд. матем.*)

1. Определение систем множеств: кольца, полукольца, алгебры, σ-кольца и σ-алгебры. Структура минимального кольца, порожденного полукольцом.

2. Основные свойства конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер, определенных на полукольце. Продолжение меры на минимальное кольцо.

3. Построение меры Стилтьеса на прямой. Необходимое и достаточное условие счетной аддитивности меры Стилтьеса.

4. Определение внешней меры и измеримых множеств. Теорема Каратеодори о внешней мере.

5. Продолжение меры по Лебегу. Построение меры Лебега на прямой $\mathbb{R}$ и меры Лебега–Стилтьеса.

6. Свойства измеримых функций. Теорема Егорова о почти равномерно сходимости. Взаимосвязь между сходимостью по мере и почти всюду.

7. Критерий измеримости функции. Теорема Лузина о почти непрерывности измеримой функции в пространстве с регулярной мерой (C-свойство Лузина).

8. Определение интеграла Лебега и его свойства. Теорема Лебега о монотонной сходимости последовательности измеримых функций.

9. Неравенство Чебышева. Лемма Фату и теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

10. Свойства функций ограниченной вариации. Разложение Жордана. Сравнение интеграла Стилтьеса и интеграла Лебега-Стилтьеса.

11. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона–Никодима (без доказательства). Свойства абсолютно непрерывных функций на отрезке.

12. Характеристическое свойство абсолютно непрерывных функций на отрезке. Доказательство того, что функция Кантора не является абсолютно непрерывной.

13. Произведение мер. Свойство счетной аддитивности произведения конечного числа счетно-аддитивных мер.

14. Лемма о вычислении меры при помощи сечений. Теорема Фубини о повторных интегралах.

15. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Критерий измеримости множества по Лебегу. Вычисления образа меры Лебега при линейном преобразовании.

16. Критерий интегрируемости функции по Риману в $\mathbb{R}^n$. Сравнение несобственного интеграла Римана и интеграла Лебега в $\mathbb{R}$.

17. Пространство $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского. Обобщенное неравенство Минковского.

18. Теорема о полноте пространства $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

19. Плотность множества простых измеримых функций и множества непрерывных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{T})$ при $1 \leqslant p < \infty$.

20. Теорема Рисса о представлении ограниченного линейного функционала в пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$ в виде скалярного произведения.

21. Вариация аддитивной функции множества. Разложение Жордана аддитивных функций ограниченной вариации. Теорема Радона–Никодима.

22. Ряды Фурье функций из пространства $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{T})$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Лемма Римана–Лебега. Условие Дини сходимости ряда Фурье в точке.

23. Теорема Фейера о сходимости средних арифметических частичных сумм ряда Фурье в метрике $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{T})$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Признак Жордана сходимости ряда Фурье для функции ограниченной вариации.

Дополнительная литература.

1. Федоров В. М. «Лекции по функциональному анализу». Пятый семестр.
2. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
3. Вулих Б. З. «Краткий курс теории функций вещественной переменной».
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».

Весна 2014 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*