

ПРОГРАММА КУРСА "ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ"
(весна 2012/13 уч. г., лектор -- д.ф.-м.н., профессор М.И. Дьяченко)

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры и т.д.). Минимальные кольца и их свойства. Связь между σ -кольцами и δ -кольцами.
2. Меры на полукольцах. Вспомогательные леммы.
3. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в \mathbb{R}^n и ее σ -аддитивность.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Внешние меры Лебега и Жордана. Их полуаддитивность.
6. Меры Лебега и Жордана. Их свойства.
7. Связь σ -аддитивности и непрерывности. Полнота мер.
8. Меры Лебега -- Стильеса на прямой. Мера Бореля.
9. σ -конечные меры.
10. Теорема о существовании неизмеримого подмножества в любом измеримом, относительно классической меры Лебега, множестве положительной меры.
11. Теорема Витали.
12. Измеримые функции. Их арифметические свойства. Измеримость функции $f(g(x))$, где f – непрерывная, а g – измеримая функции.
13. Измеримые функции и предельный переход. Теорема об измеримости производной непрерывной функции.
14. Сходимость по мере и ее свойства.
15. Критерий Коши для сходимости по мере.
16. Сходимость почти всюду. Критерий этой сходимости на множествах конечной меры.
17. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
18. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
19. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
20. Определение интеграла Лебега в общем случае. Две леммы о монотонных последовательностях простых функций.
21. Линейность интеграла Лебега по функции и по множеству для неотрицательных функций. Линейность интеграла Лебега относительно умножения на константу.
22. Линейность интеграла Лебега по функции в общем случае. Интегрирование неравенств.
23. Теорема Леви о предельном переходе и ее следствия.
24. Теоремы Фату и Лебега.
25. Линейность интеграла Лебега по множеству. Неравенство Чебышева и его следствие.
26. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
27. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
28. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в \mathbb{R}^n .
29. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p , $1 \leq p < \infty$.
30. Полнота пространств L_p , $1 \leq p < \infty$.
31. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
32. Теорема Радона - Никодима.
33. Прямое произведение мер.
34. Теорема о структуре измеримых множеств.
35. Теоремы Фубини.
36. Абсолютно непрерывные функции и их свойства (арифметические свойства, абсолютная непрерывность композиции $f(g(x))$, где f и g – абсолютно непрерывны и g монотонна).

37. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации. N-свойство Лузина. Теорема Банаха-Зарецкого (без доказательства достаточности).
38. Теорема о дифференцировании интеграла Лебега по переменному верхнему пределу.
39. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной с помощью интеграла Лебега. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Лебега.

Лектор
д.ф.-м.н., профессор

М.И.Дьяченко

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа
академик РАН, профессор

Б.С.Кашин