

**Программа курса «Действительный анализ»**  
**Мех-мат, 2 курс, вечернее отделение, весна 2011/12 уч.г.**

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры и т.д.). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Связь  $\sigma$ -аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в  $\mathbb{R}^n$  и ее  $\sigma$ -аддитивность.
4. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
5. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега.
6.  $\sigma$ -конечные меры и их продолжение по Лебегу.
7. Теорема о структуре измеримых множеств.
8. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
9. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимости почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
10. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова. Теорема Лузина (без док-ва).
11. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
12. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.
13. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва.
14. Теорема Лебега о предельном переходе.
15. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
16. Произведения и прямые произведения мер.
17. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Теорема Фубини.
18. Заряды. Разложения Хана и Жордана. Теорема Радона — Никодима (без док-ва).
19. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства  $L_p$ .
20. Полнота пространств  $L_p$ .
21. Функции ограниченной вариации и их свойства. Непрерывность вариации с переменным верхним пределом для непрерывной функции.
22. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке. Связь интеграла Римана — Стильтьеса с интегралом Лебега по мере Стильтьеса, достаточные условия существования интеграла Римана — Стильтьеса.
23. Теорема Витали о покрытии.
24. Дифференцируемость монотонных функций почти всюду.
25. Абсолютно непрерывные функции. Теорема об абсолютно непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду.
26. Производная неопределенного интеграла Лебега. Критерий представимости функции в виде неопределенного интеграла Лебега от своей производной.
27. Интегрирование по частям в интеграле Лебега. Замена переменной в интеграле Лебега.