Задачи по курсу действительного анализа
2 курс, 2 поток, 2011-2012 учебный год.
Лектор профессор В. А. Скворцов.

1. Замкнутость относительно каких пар операций $\cup, \triangle, \cap, \setminus$ дает эквивалентное определение кольца?
2. Проверить, что кольцо является полукольцом.
3. Если для любого $\alpha \in A$, R_α является кольцом, то и $\bigcap\limits_{\alpha \in A} R_\alpha$ — кольцо.
4. Доказать, что на полукольце прямоугольников площадь является σ-аддитивной мерой.
5. Привести пример борелевского множества, не являющегося $\mathcal{F}_\sigma$-множеством ($\mathcal{G}_\delta$-множеством).
6. Определить борелевский класс множества точек непрерывности функции на отрезке.
7. Привести пример плоского множества, измеримого по Лебегу, но не измеримого по Жордану.
8. Доказать, что если множество E в $\mathbb{R}^n$ замкнуто, ограничено и для него $\mu_L E = 0$, то оно измеримо и по Жордану и $\mu_J E = 0$.
9. Доказать, что элементы минимального кольца, порожденного полукольцом, измеримы по Каратеодори относительно внешней меры Лебега.
10. Пусть внешняя мера Лебега μ^* является продолжением меры, заданной на некотором кольце. Доказать, что множество A μ^*-измеримо по Каратеодори тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент кольца B_ε такой, что $\mu^*(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$.
11. Пусть S — полукольцо множеств на X, μ — σ-аддитивная мера на S, $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} X_i$, $X_i \in S$. Множество $A \subset X$ измеримо, по определению, если для $\forall i$ множество $A \cap X_i$ измеримо, при этом $\mu A = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap X_i)$. Доказать, что так определенная мера не зависит от разбиения X на $X_i \in S$, σ-аддитивна, что измеримые множества образуют σ-алгебру, а множества конечной меры — σ-кольцо.
12. Для любого множества положительной меры Лебега на действительной прямой построить множество, содержащееся в нем и не измеримое по Лебегу.
13. Построить на $[0, 1]$ нигде не плотное множество наперед заданной меры $p < 1$.
14. Найти меру совершенного множества канторовского типа с отношением длины выбрасываемого на n-м шаге интервала к длине отрезка, из которого он выбрасывается, равной $1/(\alpha + n)^2$, $\alpha > 0$.
15. Привести пример множества меры нуль, которое нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.
16. Доказать, что в любом множестве положительной меры на действительной прямой найдутся две точки, расстояние между которыми рационально.
17. Доказать эквивалентность определения измеримости функции через измеримость множеств любого из типов:
$$\{f(x) \leqslant C\}, \{f(x) < C\}, \{f(x) \geqslant C\}, \{f(x) > C\}.$$
18. Привести пример неизмеримой функции $f(x)$, для которой множество $\{x\colon\ f(x) = C\}$ измеримо для любого $C \in \mathbb{R}$.
19. Для измеримости функции f необходимо и достаточно, чтобы для любого борелевского множества E из $\mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(E)$ был измерим.
20. Доказать измеримость производной $f'(x)$, если измеримая функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду.
21. Будет ли измерима функция $g(\phi(x))$, где a) g — измеримая, а ϕ — непрерывная функция; b) g — непрерывная функция, а ϕ — измеримая?
22. Пусть f — простая функция, принимающая значения a_k на множествах E_k, $k = 1, \ldots, n$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Показать, что она измерима тогда и только тогда, когда все E_k измеримы.
23. Привести пример последовательности измеримых функций $\{f_k(x)\}$, сходящейся почти всюду, но не сходящейся по мере.

24. Доказать критерий Коши сходимости по мере.

25. Доказать, что из последовательности измеримых функций, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

26. Доказать, что теорема Егорова неверна, если мера всего пространства равна $+\infty$.

27. Получить теорему Лузина о C-свойстве из теоремы Егорова.

28. Привести пример неизмеримой функции f, такой что $|f|$ измерима.

29. Пусть функция f измерима на множестве E конечной меры. Доказать, что сходимость каждого из рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\mu\{x \in E\colon\ k \leq |f(x)| < k+1\},\ \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\{x \in E\colon\ |f| \geq k\}$$

необходима и достаточна для интегрируемости f на E.

30. Привести пример функции $f(x)\colon\ E \to \mathbb{R}$, измеримых множеств E, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких что $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k$, и при этом f интегрируема по Лебегу на E_k, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int f\, d\mu$ абсолютно сходится, но f не интегрируема по Лебегу на E.

31. Доказать, что суммируемость счетно–простой функции, принимающей значения a_k на E_k ($E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k$), эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|\mu E_k$.

32. Следует ли из существования конечного предела $\lim\limits_{N\to\infty} \int_E [f]^N\, d\mu$ (где $[f]^N$ — срезка функции f) суммируемость функции f?

33. Показать, что в теореме Беппо Леви условие $f_1(x) \in L(E)$ нельзя отбросить.

34. $\mathbb{Q}\colon = \{r_n\}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{|x-r_k|}}$ сходится почти всюду.

35. Привести пример, когда в заключении теоремы Фату строгое неравенство.

36. Доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}}\, dx = 1.$$

37. Доказать, что для неотрицательных функций из интегрируемости по Риману в несобственном смысле следует суммируемость.

38. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E, $E_k = \{x \in E\colon\ |f(x)| > k\}$. Доказать, что $\mu E_k = \bar{\bar{o}}(1/k)$ при $k \to \infty$.

39. Привести пример измеримой и неинтегрируемой по Лебегу функции, для которой $\mu\{|f(x)| > k\} = \bar{\bar{o}}(1/k)$ при $k \to \infty$.

40. Привести пример такой ограниченной измеримой функции, что любая функция, совпадающая с ней почти всюду, неинтегрируема по Риману.

41. Доказать, что если аддитивная функция множества является одновременно абсолютно непрерывной и сингулярной, то она тождественно равна нулю.

42. Доказать, что аддитивная функция множества абсолютно непрерывна (сингулярна) тогда и только тогда, когда абсолютно непрерывны (сингулярны) ее верхняя и нижняя вариации.

43. Пусть последовательность $\{\phi_k\}$ аддитивных абсолютно непрерывных (сингулярных) функций множества сходится на каждом измеримом множестве A к значению $\phi(A)$. Тогда функция ϕ также абсолютно непрерывна (сингулярна).

44. Доказать, что аддитивная функция множества ϕ сингулярна на E тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E_0 \subset E$ такое, что $\mu(E_0) < \varepsilon$ и $V(E \setminus E_0, \phi) < \varepsilon$.

45. Доказать, что канторова лестница не является AC-функцией.

46. Доказать линейность классов AC и VB.

47. Доказать, что для произвольной функции на прямой множество точек $\{x : D_-F(x) > D^+F(x)\}$ не более чем счетно.

48. При каких α и β функции $x^\alpha \sin x^\beta$, $x^\alpha \cos x^\beta$ принадлежат классам AC и VB на $[0,1]$?

49. Привести пример функции из класса ACG, которая не принадлежит классу AC.

50. Доказать, что каждая функция, всюду дифференцируемая на отрезке, принадлежит классу ACG.

51. Привести пример функции из класса ACG, которая не дифференцируема на множестве положительной меры.

52. Доказать, что для каждой функции из класса ACG на $[a,b]$ найдется интервал $(c,d) \subset [a,b]$, на котором она дифференцируема почти всюду.

53. Вычислить интеграл Лебега–Стилтьеса для функции скачков.

54. Доказать для случая $\phi \in AC$ равенство:

$$(LS)\int\limits_a^b f\,d\phi = (L)\int\limits_a^b f\phi'\,dx.$$

55. Доказать существование свертки $(f * g)(y) = \int\limits_{\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx$ для почти всех y, где $f, g \in L(\mathbb{R})$.

56. Показать несовпадение пространств $L^p(E)$ при различных p (для $E = [0,1]$ и $E = [1,\infty)$).

57. Выяснить связь между сходимостью в $L^p(E)$ и сходимостью почти всюду и по мере.

58. Доказать неравенство Чебышева для $L^p(E)$:

$$\mu\{x\colon\ |f(x)| \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{1}{\alpha^p}\int\limits_E |f(x)|^p\,d\mu.$$

59. Доказать, что если $\|f\|_p \leqslant C < \infty$ при всех $p \geqslant 1$, то f эквивалентна ограниченной функции.

60. При каких α ряд $\sum n^{-\alpha}\cos nx$ будет рядом Фурье функции из L^2?

61. Будет ли ряд $\sum \frac{\cos nx}{\ln n}$ рядом Фурье непрерывной функции?