Программа по курсу действительного анализа
2 курс, 2 поток, 2011-2012 учебный год.
Лектор профессор В. А. Скворцов.

1. Системы множеств (полукольцо, кольцо, σ-кольцо, алгебра, σ-алгебра). Структура элементов минимального кольца, порожденного полукольцом.

2. Теорема о продолжении меры с полукольца на порожденное им кольцо.

3. Счетная полуаддитивность счетно-аддитивной меры на кольце. Внешняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Внешняя мера Жордана.

4. Определение измеримых по Каратеодори множеств. Теорема: измеримые по Каратеодори множества образуют σ-алгебру, на которой мера σ-аддитивна. Непрерывность меры.

5. Метрическая внешняя мера. Измеримость борелевских множеств.

6. Метричность внешней меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пример неизмеримого по Лебегу множества.

7. Борелевская регулярность внешней меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Эквивалентность измеримости по Каратеодори и по Лебегу (через внутреннюю меру).

8. Мера Лебега–Стилтьеса, определенная монотонной функцией, ее σ-аддитивность на полукольце полуинтервалов.

9. Определение и основные свойства измеримых функций на $(X, \mathcal{M})$. Теорема о пределе последовательности измеримых функций.

10. Теорема о приближении любой измеримой функции простыми измеримыми функциями.

11. Сходимость по мере. Связь со сходимостью почти всюду.

12. Теорема Егорова.

13. Определение и основные свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций, заданных на $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Интеграл от простой функции.

14. Эквивалентное определение интеграла Лебега через монотонную последовательность простых функций.

15. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега от функций любого знака.

16. Теорема о почленном интегрировании ряда из неотрицательных функций. Теорема о σ-аддитивности интеграла Лебега.

17. Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для монотонной последовательности функций. Теорема Б. Леви.

18. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе. Критерий интегрируемости в терминах срезки.

19. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана (собственным и несобственным) и с интегралом Ньютона.

20. Метрика пространства $L(X, \mathcal{M}, \mu)$. Приближение по этой метрике суммируемой функции ограниченными и непрерывными (в случае $\mathbb{R}^n$) функциями.

21. Неравенство Чебышева. Связь между сходимостью по мере и сходимостью в $L(X, \mathcal{M}, \mu)$.

22. σ-аддитивная функция множества (заряд). Верхняя, нижняя и полная вариации аддитивной функции множества. Их σ-аддитивность. Разложение Жордана.

23. Абсолютно непрерывные и сингулярные заряды. Эквивалентность двух определений абсолютной непрерывности. Интеграл Лебега как функция множества, его абсолютная непрерывность.

24. Разложение Хана.

25. Обобщенное разложение Хана.

26. Лебеговское разложение заряда. Теорема Радона–Никодима.

27. Теорема Витали о покрытии.

28. Теорема о дифференцируемости монотонной функции.

29. Классы VB-функций и AC-функций, связь между ними. Вариация функции на отрезке и ее аддитивность. Представление VB-функции и AC-фунукции в виде разности двух монотонных из того же класса.

30. Дифференцируемость неопределенного интеграла Лебега на действительной прямой. Его характеристическое свойство.

31. Определение ACG-функций. N-свойство. Условие монотонности ACG-функции. Интеграл Данжуа-Хинчина.

32. Абсолютная непрерывность меры Лебега-Стилтьеса, порожденной AC-функцией.

33. Интегралы Лебега-Стилтьеса по абсолютно-непрерывной мере. Связь с интегралом Римана-Стилтьеса в простейших случаях.

34. Прямые произведения мер множеств.

35. Лемма о приближении измеримого множества множествами из полукольца.

36. Теорема Фубини, примеры ее применения.

37. Пространства $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ $(p \geq 1)$. Неравенства Гельдера и Минковского.

38. Полнота пространства $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ $(p \geq 1)$.

39. Пространство $L_2[a, b]$. Ортонормированнные системы в нем, примеры. Теорема о наилучшем приближении в L_2 полиномами по данной системе.

40. Неравенство Бесселя. Теорема Мерсера о коэффициентах Фурье суммируемой функции по ограниченной ортонормированной системе.

41. Теорема Рисса–Фишера.

42. Ряды Фурье–Лебега по тригонометрической системе. Признак Дини сходимости в точке.

Литература

1. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл, Факториал Пресс, Москва, 2002.

2. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс (изд. 2-ое), URSS, Москва, 2011

3. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарьян К.С., Сифуэнтэс П., Действительный анализ в задачах, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.

Дополнительная литература

1. Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П., Обобщенные интегралы (изд. 2-е), URSS, Москва, 2011

2. Сакс С., Теория интеграла, URSS, Москва, 2004.