Программа курса лекций «Действительный анализ»
2 курс, группы 201-206, весенний семестр, 2012 год.

1. Квадирируемые плоские фигуры, пример неквадрируемого множества. Внешняя мера в $\mathbb{R}^n$. Измеримые по Лебегу множества.
2. Критерий измеримости подмножества в $\mathbb{R}^n$.
3. Счетная аддитивность внешней меры на измеримых подмножествах куба в $\mathbb{R}^n$.
4. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пример неизмеримого подмножества окружности.
5. Измеримые функции. Интеграл Лебега ограниченной измеримой функции на множестве конечной меры в $\mathbb{R}^n$.
6. Совпадение интегралов Римана и Лебега для функций, интегрируемых по Риману.
7. Счетная аддитивность меры Лебега в $\mathbb{R}^n$.
8. Продолжение меры с полукольца S на кольцо $\mathcal{R}(S)$ и сохранение при этом σ-аддитивности.
9. Измеримые множества. Теорема о лебеговском продолжении σ-аддитивной меры, заданной на полукольце с единицей.
10. Конструкция Стилтьеса конечных мер на прямой.
11. Измеримые функции и действия над ними.
12. Предельный переход в классе измеримых функций. Теорема Егорова.
13. Интеграл Лебега, его свойства (случай функций на пространстве с конечной мерой).
14. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (случай ограниченной сходимости).
15. Теорема о мажорированной сходимости.
16. Теоремы Фату и Леви.
17. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры (на примере $\mathbb{R}$). Теорема о мажорированной сходимости.
18. Пространства L_1 и L_2, их полнота.
19. Разложение L_2 в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения.
20. Общий вид линейного ограниченного функционала на L_2.
21. Теорема Радона–Никодима.
22. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского, пространства L_p.
23. Вывод формулы для производной неопределенного интеграла Лебега из теоремы о дифференцируемости п.в. монотонной функции.
24. Функции ограниченной вариации, представление их в виде суммы монотонных.
25. Абсолютно непрерывные функции, их представление неопределенным интегралом Лебега.
26. σ-аддитивность произведения σ-аддитивных мер.
27. Теорема Фубини.

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа
академик РАН, профессор Б. С. Кашин

Лектор, профессор А.М. Степин