

**Программа курса «Действительный анализ»
весна 2010/11 уч. г., лектор – д.ф.-м.н., профессор М.И. Дьяченко**

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры и т.д.). Минимальные кольца и их свойства. Связь между σ -кольцами и δ -кольцами.
2. Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в \mathbb{R}^n и ее σ -аддитивность.
3. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
4. Внешние меры Лебега и Жордана. Их полуаддитивность.
5. Меры Лебега и Жордана. Их свойства.
6. Связь σ -аддитивности и непрерывности. Полнота мер.
7. Меры Лебега – Стильгеса на прямой. Мера Бореля.
8. σ -конечные меры.
9. Теорема о существовании неизмеримого подмножества в любом измеримом, относительно классической меры Лебега, множестве положительной меры.
10. Измеримые функции. Их арифметические свойства. Измеримость функции $g(f(x))$, где f – непрерывная, а g – измеримая функции.
11. Измеримые функции и предельный переход. Теорема об измеримости производной непрерывной функции.
12. Сходимость по мере и ее свойства.
13. Сходимость почти всюду. Критерий этой сходимости на множествах конечной меры.
14. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
15. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
16. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
17. Определение интеграла Лебега в общем случае. Лемма о приближении измеримой неотрицательной функции монотонной последовательностью простых функций.
18. Линейность интеграла Лебега по функции и по множеству для неотрицательных функций. Линейность интеграла Лебега относительно умножения на константу.
19. Линейность интеграла Лебега по функции в общем случае. Интегрирование неравенств.
20. Теорема Леви о предельном переходе и ее следствия.
21. Теоремы Фату и Лебега.
22. Линейность интеграла Лебега по множеству. Неравенство Чебышева и его следствие.
23. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
24. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
25. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в \mathbb{R}^n .
26. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
27. Теорема Радона - Никодима.
28. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p .
29. Полнота пространств L_p .
30. Представление интеграла от p -той степени функции ($1 \leq p < \infty$) с помощью функции распределения.
31. Теорема о плотных множествах функций в пространствах L_p ($1 \leq p < \infty$).
32. Абсолютно непрерывные функции и их свойства (арифметические свойства, абсолютная непрерывность композиции $f(g(x))$, где f и g – абсолютно непрерывны и g монотонна).

33. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации. N -свойство Лузина. Теорема Банаха-Зарецкого (без доказательства достаточности).

34. Лемма Витали.

35. Теорема о дифференцировании интеграла Лебега по переменному верхнему пределу.

36. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной с помощью интеграла Лебега. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Лебега.

37. Прямые произведения мер(б/д). Теорема Фубини (б/д).

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

М. И. Дьяченко

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа,
член-корреспондент РАН, профессор

Б. С. Кашин