Лекция N 13 (19.05.2020)

(1) Большая теорема Пикара. Если $f \in \mathcal{O}(0<|z-a|<\varepsilon)$ имеет сущ. ос. точку при $z=a$, то $\forall w_0 \in \mathbb{C}$, кроме м.б. одного, мн-во $f^{-1}(w_0) := \{z \mid 0<|z-a|<\varepsilon,\ f(z)=w_0\}$ бесконечно.

Словами: В окр-сти сущ. ос. точки ф-ция принимает бесконечно часто все значения, кроме, может быть, одного.

Замеч. 1. Пример $f(z)=e^{1/z}$, $w_0=0$, показывает, что исключение ("кроме м.б. одного") необх-мо.

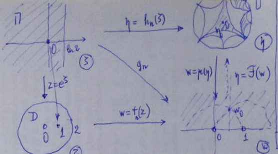
Замеч. 2 теор. Лиувилля ⇠ теор. Сохоцкого
$\cap$ $\cap$
М.Т.П. ⇠ Б.Т.П

где "$\cap$" означает "является обобщением" (причем в нек-ром смысле неулучшаемым)
"⇠" можно вывести"

Д-во большой теоремы Пикара.

От противного: пусть $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ принимаются только конечное число раз. Тогда, уменьшая ε, можно считать, что w_1, w_2 не принимаются вообще ф-цией f в проколотом круге $\{0<|z-a|<\varepsilon\}$.

Заменяя $f(z)$ на $\dfrac{f(z)-w_1}{w_2-w_1}$ и $\dfrac{2}{\varepsilon}(z-a)$ на z, можно считать, что $\boxed{f \in \mathcal{O}(D)}$, где $D=\{0<|z|<2\}$, f имеет сущ. ос. точку при $z=0$ и $f(D) \subset \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.



Св-ва F:
Обратная к $\eta = F(w)$ анал. ф-ция $w=\mu(\eta)$ однозначна и голом-на на всём круге U.
См. д-во вт. (2)

По теор. Сохоцкого $\exists$ посл-сть $z_n \to 0$ т.к. $f(z_n) \to w_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.
(точка $w_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ – произвольная, например, $w_0 = e^{\frac{\pi i}{3}}$, отвечающая $\eta_0 = 0$). Положим $f_n(z) := f(z_n z) \in \mathcal{O}(D)$ при $n \geq n_0$ т.к. $|z_n| \leq 1$)

$\boxed{\text{тогда } f_n(1) \to w_0 \text{ при } n\to\infty}$

$g_n(\zeta) := f_n(e^{\zeta})$
$h_n(\zeta) :=$ ветвь $F \circ f_n$ на Π т.ч. $h_n(0) \to \eta_0$ при $n\to\infty$
(h_n существует (и ед-на при $n \geq n_0$) по теор. о монодромии)

По принципу компактности, после выбора подпосл-сти, м. считать, что $\{h_n\}$ сх-ся равн. на компактах в Π к нек-рой $h_\infty \in \mathcal{O}(\Pi)$.
Заметим, что $h_\infty(\Pi) \subset \overline{U}$ по опр-ю. Но значение $\eta_1 \in \partial U$ не принимается, т.к. иначе по принципу максимума модуля I было бы $h_\infty \equiv \mathrm{const} = \eta_1$ вопреки тому, что $h_\infty(0) = \lim_{n\to\infty} h_n(0) = \eta_0 \in U$.
Сл-но, $\boxed{h_\infty(\Pi) \subset U}$.

Из равн. сх-сти $h_n \to h_\infty$ на комп. в Π вытекает равн. сх-ть $\underline{g_n = \mu \circ h_n}$ к $\mu \circ h_\infty$ на компактах в Π.

$$\begin{tikzcd}
K \subset \Pi \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, "g_n"] & U \arrow[d, "\mu"] \\
S^1 \subset D \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{C} \setminus \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

Сл-но, посл-сть $\{g_n\}$ равномерно ограничена на каждом компакте $K \subset \Pi$. Возьмём $K = \{i\theta \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Тогда получим, что $\exists M > 0$ т.ч. $|f_n(z)| \leq M$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $z \in S^1 = \{|z| = 1\}$.

Это означает (по опр-ю f_n), что $|f(z)| \leq M$ при $|z| = |z_n| =: r_n$
$f_n(z) = f(z_n z)$

(здесь $r_n := |z_n| \to 0$, $r_0 := 1$)
можно считать, что $1 > r_1 > r_2 > \ldots > r_n \to 0$

Тогда по принципу максимума модуля II из $|f| \leq M$ при $|z| = r_n$ и $|z| = r_{n+1}$ вытекает, что $|f(z)| \leq M$ при $r_{n+1} \leq |z| \leq r_n$ (для всех $n \in \mathbb{N}$).

Тогда $|f(z)| \leq M$ при $0 < |z| \leq 1$, т.е. особ-сть $z = 0$ устранима для f по критерию устр. о.т. Противоречие с усл-ем, что $z = 0$ — сущ. ос. точка для f. $\square$

<u>Сл-е.</u> Если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ не полином, то $\forall w_0 \in \mathbb{C}$, кроме может быть, одного, мн-во $f^{-1}(w_0)$ бесконечно. [В конце предыд. лекции это было доказано для отличных от полиномов целых ф-ций <u>конечного порядка</u>.]

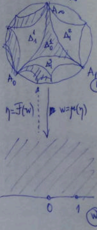
<u>Упр-я</u> (1) Пусть P — полином $\not\equiv \mathrm{const}$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Д-ть, что $P(z)e^{f(z)}$ принимает <u>все</u> значения $w \in \mathbb{C}$.

(2) Пусть $f(z)$ — не постоянная и периодическая целая ф-ция (напр. $P(\cos z, \sin z)$ и т.д.). Д-ть, что ур-е $f(z) = z$ имеет беск. много решений $z \in \mathbb{C}$.

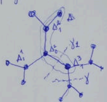
2 <u>Опр-ние и св-ва модулярной ф-ции.</u>

У нас была АФ $\eta = \mathcal{F}(w)$ на $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, все значения всех эл-тов к-рой лежат в ед. круге U.

<u>Утв.</u> Гиперб. треуг-ки Δ_k^ℓ из этой конструкции не пересекаются и объединение их замыканий равно всему замкнутому ед. кругу $\overline{U}$. Ф-ция $w = \mu(\eta)$, обратная к $\eta = \mathcal{F}(w)$, однозначна и голоморфна на всём круге U.



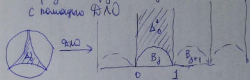
Д-во. Будем называть мн-во всех гиперб. треуг-ков Δ_x^ε сетью и докажем сначала, что образ $\forall$ треуг-ка сети при отражении относ-но любой стороны любого (другого или того же) треуг-ка сети — также является треуг-ком сети. (*)



отсюда вытекает, что все D_s состоят из треуг-ков сети

Граф, вершины к-рого — треуг-ки сети, а ребра — стороны этих треуг-ков. Любые 2 вершины можно соединить цепочкой рёбер и образ Δ [illegible] при симм. отн. γ (если γ_1, то заменить на γ) является концом соотв-щей симм-ной цепочки. Этим доказано (*), а т.к. то, что треуг-ки сети попарно не пересекаются [лежат по разные стороны от γ].

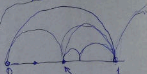
Покажем, что объединение треуг-ков сети — это весь круг. Для этого перейдём из круга в полуп-сть с помощью ДЛО



Пусть D_0 := объединение $\bar{\Delta}_0^1$ и всех образов $\bar{\Delta}_0^1$ относ-но вертик. сторон. Тогда $D_0 = \Pi \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_j^0$ (кроме вершин) для нек-рых открытых полукругов B_j^0 с диаметрами на вещ. оси (радиусы этих полукругов $= 1/2$).

Пусть D_1 := объединение D_0 и образов D_0 при отражениях отн-но верхних границ полукругов B_j^0. Тогда $D_1 = \Pi \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_j^1$ (кроме вершин) для нек-рых полукругов B_j^1 с диаметрами на $\mathbb{R}$ и радиусами $\le 1/2 \cdot 1/2$, т.к. диаметр каждого B_j^1 лежит на радиусе нек-рого B_k^0. И т.д.

26 мая — консультация



$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \to \frac{0+1}{1+1}$

$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \to \frac{0}{1}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{1}$ и т.д.

$\frac{p}{q} \quad \frac{r}{s} \to \frac{p+r}{q+s}$

Радиусы исключаемых полукругов как минимум вдвое меньше предыдущих $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ радиус $(B_j^s) \le 2^{-s-1}$ $\forall s,j$ $\Rightarrow$ объединение всех D_s равно Π т.е. $\bigcup \Delta_x^\varepsilon = U$, ч.т.д. $\square$