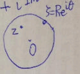
Лекция №12 (12.05.2020)

(1) Интегральная формула Шварца.

Пусть $U := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$, $f\in\mathcal{O}(U)\cap C(\overline{U})$ и $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$. Тогда $\forall z\in U$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\zeta)\,d\theta + i\,\operatorname{Im} f(0)$$



(где $\zeta = Re^{i\theta}$, т.е. $d\theta = \frac{d\zeta}{i\zeta}$).

Д-во (на прошлой лекции для $R=1$, годится для всех $R>0$). □

(2) Обобщение неравенств Коши. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{O}(|z|<R)$. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}$ и $\forall r\in(0,R)$ имеем

$$|c_n| \le \frac{2}{r^n}\left(\max_{|z|=r}\operatorname{Re} f(z) + |\operatorname{Re} f(0)|\right)$$

[по сравнению с обычными $|c_n| \le \frac{1}{r^n}\max_{|z|=r}|f(z)|$, здесь $|f(z)|$ заменен на $\operatorname{Re} f(z)$ и появился коэф-т 2]

Д-во. Запишем

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{2\zeta}{\zeta-z} - 1 = \frac{2}{1-\frac{z}{\zeta}} - 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^n} - 1 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^n},$$

при $|z|<|\zeta|=R$

начиная с этого места заменить R на r всюду

$=1=$

подставим в ф-лу Шварца и проинтегрируем почленно:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum\frac{z^n}{\zeta^n}\right)u(\zeta)\,d\theta + i\,\operatorname{Im} f(0) =$$

$$= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\zeta)}{\zeta^n}\,d\theta\right)z^n \quad \text{при } |z|<R$$

В силу ед-сти разложения в степ. ряд, отсюда вытекает, что

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\zeta)}{\zeta^n}\,d\theta \quad \text{при } n=1,2,\ldots$$

Применяя это к ф-ции $f(z)\equiv C$ (где $C := \max_{|z|=R}\operatorname{Re} f(z)$),

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{C\,d\theta}{\zeta^n} \quad \text{при } n=1,2,\ldots$$

откуда, вычитанием,

$$-c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{C-u(\zeta)}{\zeta^n}\,d\theta$$

Станд. оценка интеграла с учётом того, что $C-u(\zeta)\ge 0$, даёт:

$$|c_n| \le \cancel{\frac{1}{\pi}\max_{|\zeta|=R}\frac{C-u(\zeta)}{|\zeta|^n}\cdot 2\pi}\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{C-u(\zeta)}{\underbrace{|\zeta|^n}_{R^n}}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}(C-u(\zeta))\,d\theta = \frac{1}{\pi R^n}(2\pi C - u(0)),$$

(по теор. о среднем для $u(z)$)

что и требовалось, т.к. $C = \max_{|z|=R}\operatorname{Re} f(z)$, а $-u(0)\le|\operatorname{Re} f(0)|$. □

③ Обобщение теоремы Лиувилля.

Пусть $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\exists\, B, m, R_0 > 0$ т.ч. $\operatorname{Re} f(z) \le B|z|^m$ при $|z|\ge R_0$. Тогда f — полином степени $\le m$.

Д-во. В нер-вах $|c_n| \le \frac{2}{r^n}\left(\max\limits_{|z|=r}\operatorname{Re} f(z) + |\operatorname{Re} f(0)|\right) \le \frac{2}{r^n}\left(Br^m + B_0\right)$ устремим $r\to\infty$. Для $n>m$ это даст $c_n=0$. □

④ Теорема Адамара о целых ф-циях конечного порядка без нулей.

Если $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ удовл-ет нер-ву $|f(z)|\le Ae^{B|z|^m}$ для всех $z\in\mathbb{C}$ (где $A, B, m>0$ — некоторые константы) и не обращается в 0 нигде в $\mathbb{C}$, то $f(z)=e^{P(z)}$ для нек-рого полинома $P(z)$ степени $\le m$.

Д-во. Раз $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ не имеет нулей, то $\exists\, g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ т.ч. $f=e^g$ (по лемме о корнях и логарифмах). При этом $\operatorname{Re} g = \ln|f|$ удовл. усл-ям п. ③, сл-но g — полином степени $\le m$. □

Замечание. В усл-ях этой теоремы f наз. целой ф-ей конечного порядка (не выше m).

⑤ Лемма.

Пусть p, q, r, s, t — полиномы, причем q, s не константы и выполнено равенство $pe^q + re^s = t$ тождественно на $\mathbb{C}$. Тогда $t\equiv 0$.

Д-во. Диф-руя рав-во $pe^q+re^s=t$ по z кол-во раз, равное $1+\deg(t)$, получим $P(z)e^{q(z)} + R(z)e^{s(z)}=0$ для нек-рых полиномов $P(z)$ и $R(z)$. Из ф-лы $(pe^q)' = (p'+pq')e^q$ вытекает, что если $(pe^q)'\equiv 0$, то $p\equiv 0$ (т.к. $q'\not\equiv 0$ по усл-ю). Поэтому из предположения, что $P\equiv 0$ вытекает по индукции, что $p\equiv 0$. Кроме того, в этом случае (если $P\equiv 0$) также и $R\equiv 0$, откуда аналогично $r\equiv 0$. Тогда и $t=pe^q+re^s$ тоже $\equiv 0$, т.е. в случае $P\equiv 0$ теорема доказана.

Если $P\not\equiv 0$, то рав-во $Pe^q+Re^s=0$ влечёт, что все нули $P(z)$ являются нулями $R(z)$ той же или большей кратности, т.е. $R(z)=CP(z)$ для нек-рой константы $C\neq 0$ (с заменой местами R и P). Тогда рав-во $Pe^q+Re^s=0$ можно сократить на P и получить $e^q + Ce^s = 0$. Тогда ~~$p(-Ce^s)+Re^s=0$, т.к. $(R-CP)e^s$~~ исходное усл-е $pe^q+re^s=t$ принимает вид $p(-Ce^s)+re^s=t$, т.е. $(r-Cp)e^s=t$. Отсюда либо $r-Cp\equiv 0$ и тогда $t\equiv 0$, либо все нули $r-Cp$ явл. нулями t и получается, что e^s — полином. Противоречие. □

(6) Следствия о разрешимости трансцендентных уравнений

Сл-вие 1. Ф-ция $f(z) = z - e^z$ имеет беск. много нулей $z \in \mathbb{C}$. [Вещественных и чисто мнимых нулей нет, а из малой теор. Пикара не следует напрямую, что есть хотя бы один нуль, т.к. $w_0 = 0$ может быть исключительным значением].

Д-во. Если это не так, то по теор. Адамара (4)
$f(z) = (z-z_1)\dots(z-z_n)e^{az+b}$ для нек-рых $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (конечное мн-во нулей, возможно, $\varnothing$) и $a, b \in \mathbb{C}$. Но р-во $\underbrace{z - e^z}_{f(z)} = P(z)e^{az+b}$ по лемме (5) невозможно, т.к. $f \not\equiv 0$. □

Упр-е (A) Покажите, что ze^z, $az - \sin z$, $az + \cos z$ при всех $a \in \mathbb{C}$ принимают все значения $w_0 \in \mathbb{C}$.

(B) Для любых полиномов P, Q $(\not\equiv \text{const})$ ф-ция $P(z)e^{Q(z)}$ принимает все значения $w_0 \in \mathbb{C}$, причем все значения $w_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ бесконечно часто.

Сл-вие 2. Если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ – целая ф-ция конечного порядка (см. п. (4)), не являющаяся полиномом, то f принимает все значения $w_0 \in \mathbb{C}$, кроме м.б. одного, бесконечно часто.

(это нужно в д-ве, чтобы утверждать, что q_1, q_2 не константы)

Д-во. Если w_1 и w_2 – два значения, принимаемые конечное число раз, то

$$f(z) = w_1 + p_1(z)e^{q_1(z)}$$
$$f(z) = w_2 + p_2(z)e^{q_2(z)}$$

для некот. полиномов p_1, q_1, p_2, q_2, а это при $t(z) := w_1 - w_2 \neq 0$ противоречит лемме (5). □

Замечание. Это сл-вие верно и без предположения, что f – конечного порядка (но $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, конечно)! Это вытекает из большой теоремы Пикара, к-рую докажем на след. лекции.