28.04.2020 Лекция № 11

① Голоморфная зависимость интеграла от параметра. Пусть $\varphi : [a,b]\times D \to \mathbb{C}$ непр. ф-ция (где $D\subset\mathbb{C}$ – область), причём ф-ция $z \mapsto \varphi(t,z)$ голом-на в D при $\forall t\in[a,b]$. Тогда ф-ция

$$f(z) := \int_a^b \varphi(t,z)\,dt$$

голом-на в D.

Д-во. Ф-ция f непр-на в D в силу станд. оценки $|f(z_1)-f(z_2)| \le \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t,z_1)-\varphi(t_2,z)|\cdot(b-a)$ и равн. непр-сти φ на $[a,b]\times K$, где $K\subset D$ – любой компакт. Тогда $\forall$ откр. треуг-ка $T\subset D$ с $\overline{T}\subset D$ имеем

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T}\int_a^b \varphi(t,z)\,dt\,dz \underset{\text{теор. Фубини}}{=} \int_a^b\int_{\partial T}\varphi(t,z)\,dz\,dt \underset{\text{интегр. теор. Коши}}{=} \int_a^b 0\,dt = 0,$$

т.е. $f\in\mathcal{O}(D)$ по теор. Мореры. □

② Задача Дирихле.

Дана огранич. область $D\subset\mathbb{C}$ и непр. ф-ция $\varphi : \partial D\to\mathbb{R}$. Найти непр. ф-цию $u : \overline{D}\to\mathbb{R}$, к-рая гарм. в D и равна φ на ∂D.

Замечание о ед-сти. Если u_1, u_2 – два решения, то $u_1 = u_2$.

Д-во. Принцип максимума для u_1-u_2 и u_2-u_1. □

③ Существование решения задачи Дирихле в круге. Пусть $U = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ и $\varphi : \partial U\to\mathbb{R}$ непр. ф-ция. Тогда ф-ция

$$u(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\varphi(\zeta)\,d\theta, & z\in U \\ \varphi(z), & z\in\partial U\end{cases}$$

$\boxed{\zeta = e^{i\theta}, 0\le\theta\le 2\pi}$

непр-на в $\overline{U}$, гарм. в U и $u=\varphi$ на ∂U.

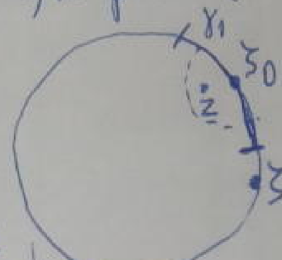
Д-во. 1) Гармоничность $u(z)$ в U вытекает из п. ① и тождества $\dfrac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2} = \operatorname{Re}\dfrac{\zeta+z}{\zeta-z}$, [для всех $\zeta\ne z\in\mathbb{C}$] влекущего, что

$$u(z) = \operatorname{Re}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\varphi(\zeta)\,d\theta}_{} = \operatorname{Re} f(z),$$

где $f\in\mathcal{O}(U)$ по утв-ю п. ①.

2) Непр-сть $u(z)$ в произв. точке $\zeta_0\in\partial U$. Обозначим

$$P(\zeta,z) := \frac{1}{2\pi}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2} > 0 \quad \forall\zeta\in\partial U\ \forall z\in U$$



Тогда $\int_0^{2\pi} P(\zeta,z)\,d\theta = 1$ по ф-ле Пуассона для $u\equiv 1$.

Сл-но, $u(z)-u(\zeta_0) = \int_0^{2\pi} P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0))\,d\theta$

1) В силу непр-сти $\varphi(\zeta)$ в точке ζ_0, $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ дуга (открытая) $\gamma_1\subset\partial U$ с центром ζ_0 т.ч. $|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)|<\varepsilon$ при $\zeta\in\gamma_1$. Сл-но,

$$\left|\int_{\gamma_1} P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0))\,d\theta\right| \le \int_{\gamma_1} P(\zeta,z)\cdot\varepsilon\,d\theta \le \varepsilon.$$

$=1=$

Причем это верно $\forall z\in U$.

2) $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ т.ч. $|z-\zeta_0|<\delta$, $\zeta\in\partial U\setminus\gamma_1$ $\Rightarrow P(\zeta,z)<\varepsilon$ (это следует прямо из ф-лы $P(\zeta,z) = \dfrac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\cdot\dfrac{1}{2\pi}$, т.к. знаменатель $\ge$ const >0, а числитель $\to 0$ при $z\to\zeta_0$). Сл-но,

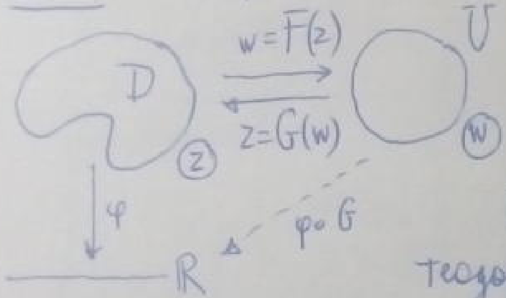
$$\left|\int_{\partial U\setminus\gamma_1} P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0))\,d\theta\right| \le \varepsilon\cdot 2M\cdot 2\pi, \text{ где } M := \max_{\zeta\in\partial U}|\varphi(\zeta)|.$$

В итоге $|u(z)-u(\zeta_0)| \le \varepsilon(1+4M\pi)$ при $|z-\zeta_0|<\delta$. □

④ Существование решения задачи Дирихле в односвязной области

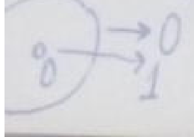
Пусть $D\subset\mathbb{C}$ – ограниченная односв. область, локально связная вблизи гр-цы. Тогда $\forall$ непр. ф-ции $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ $\exists$ (единственная) непр. ф-ция $u:\overline{D}\to\mathbb{R}$ т.ч. $u(z)$ гарм. в D и $u=\varphi$ на ∂D.

Д-во. По теор. Римана $\exists$ конф. отобр-е $F: D\to U$, где $U=\{w\in\mathbb{C}\,|\,|w|<1\}$



По теор. Каратеодори, F продолжается до гомеоморфизма $F:\overline{D}\to\overline{U}$. Сл-но, ф-ция $\varphi\circ G$ (где $G:=F^{-1}$) непр. на ∂U. Пусть $\tilde{u}:\overline{U}\to\mathbb{R}$ решение задачи Дирихле с гр. усл-ем $\varphi\circ G$ ($\exists$ по п. ③). Тогда $u:=\tilde{u}\circ F$ будет непр. на $\overline{D}$ (в силу гомеом-сти F), гарм. на D (св-во 6° предыд. лекц.) и $u=\varphi$ на ∂D по построению. □

Замеч. Без условия односв-сти теорема о разрешимости задачи Дирихле для всех φ неверна.



Пример: $D=\{0<|z|<1\}$, $\varphi(z)=0$ при $|z|=1$, $\varphi(0)=1$. Упр. Д-ть это.

⑤ Ф-ла Шварца.

Пусть $U=\{|z|<1\}$, $f\in\mathcal{O}(U)\cap C(\overline{U})$ и $u(z):=\operatorname{Re}f(z)$. Тогда $\forall z\in U$ имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\zeta)\,d\theta+i\operatorname{Im}f(0)$$

Д-во. Ф-ция $g(z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\zeta)\,d\theta$ голом-на в U (по п. ①), а её вещ. часть $\operatorname{Re}g(z)$ гарм. в U, непр-на в $\overline{U}$ и совпадает с $u(z)$ на ∂U (по д-ву п. ③). Сл-но, по пр. максимума для $\operatorname{Re}g-u$ и $u-\operatorname{Re}g$ имеем $u=\operatorname{Re}g$ на $\overline{U}$, т.е. $\operatorname{Re}(f-g)=0$ на $\overline{U}$, т.е. $f(z)-g(z)\equiv\text{const}=iC$, $C\in\mathbb{R}$, по усл-ям Коши-Римана. Чтобы найти C, подставим $z=0$. Тогда $g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\,d\theta=u(0)$ по теор. о среднем (или ф-ле Пуассона) $\Rightarrow$ $iC=f(0)-u(0)=i\operatorname{Im}f(0)$. □

Замечание. Нельзя утверждать в этих предпол-ях, что $g\in\mathcal{O}(U)\cap C(\overline{U})$, т.к. $\operatorname{Im}g$ не обязана быть непр. на $\overline{U}$.