21.04.2020 Лекция № 10

① Опр-е гармонических ф-ций. Связь с голоморфными.

Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — область. Ф-ция $u: D\to\mathbb{R}$ наз. гармонической в D, если $u\in C^2(D)$ и

$$\Delta u := u_{xx}+u_{yy}\equiv 0 \text{ в } D.$$

Утв. 1) Если $f\in\mathcal{O}(D)$, то ф-ции $u:=\operatorname{Re} f$ и $v:=\operatorname{Im} f$ гармоничны в D.

2) Если $D\subset\mathbb{C}$ — односвязная область, то $\forall$ гарм. ф-ции $u: D\to\mathbb{R}$ $\exists f\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $\operatorname{Re} f = u$ в D.

Д-во. 1) По условиям Коши-Римана $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ (и $u,v\in C^2$, т.к. f беск. диф-ма)

Сл-но, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=(v_y)_x+(-v_x)_y=0$.

Аналогично $\Delta v = v_{xx}+v_{yy} = (-u_y)_x+(u_x)_y=0$.

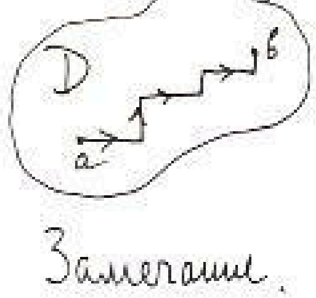
2) Пусть $u:D\to\mathbb{R}$ гарм. ф-я. Тогда $\varphi := u_x - iu_y$ будет $\mathbb{R}$-диф. в D (т.к. $u\in C^2$) и удовл-ет усл-ям Коши-Римана: $(u_x)_x = (-u_y)_y$ в силу гарм-сти u

$(u_x)_y = -(-u_y)_x$, т.к. $u\in C^2$

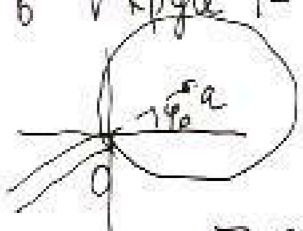
Сл-но, $\varphi\in\mathcal{O}(D)$. В силу односвязности D $\exists f\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $f'=\varphi$ в D. Если $U:=\operatorname{Re} f$ и $V:=\operatorname{Im} f$, то

$$f' = U_x + iV_x \overset{(К\text{-}Р)}{=} U_x - iU_y$$

Из рав-ва $f'=\varphi$ получаем, что $\begin{cases}U_x = u_x\\ U_y=u_y\end{cases}$ всюду в области D, т.е. $(U-u)_x = (U-u)_y\equiv 0$ в D, т.е. $U-u\equiv \text{const}$ в D (по ф-ле Ньютона-Лейбница и в силу связности D). Сл-но, $\operatorname{Re}(f-\text{const}) = u$ в D. □



Замечание. Если D не односвязна, то утв. п.2 неверно. Напр., $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $u(z)=\ln|z|$ (гарм-сть либо прямо из $u=\frac12\ln(x^2+y^2)$ диф-ем, либо из того, что в $\forall$ круге $|z-a|<|a|$ имеем $u=\operatorname{Re} f$, где



$$f(z)=\ln|z|+i\arg z$$
$$\varphi_0-\pi<\arg z<\varphi_0+\pi\,)$$

Но не $\exists f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ т.ч. $\operatorname{Re} f(z) = \ln|z|$ для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, т.к.

$$f' = u_x - iu_y = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac1z$$

Но $\int\limits_{|z|=1} f'(z)\,dz$ было бы $=0$ по ф-ле Н-Л.,

а $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\ne 0$, противоречие.

Упр. Д-ть, что любая гарм. ф-ция на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ имеет вид

$$A\ln|z| + \operatorname{Re} f(z),$$

где $A\in\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

② Свойства гарм. ф-ций

1°. (беск. дифф-сть) Всякая гарм. в D ф-ция $u(z)$ имеет частные производные $\partial_x^k\partial_y^l u$ всех порядков, к-рые также гармоничны в D.

Д-во. Дост. считать D кругом: $D=\{|z-z_0|<r\}$, а тогда $u=\mathrm{Re}\, f$ для некот. $f\in\mathcal{O}(D)$ и, сл-но, $\partial_x f = f'$, $\partial_y f = if'$ (ур-я К.-Р.), т.е. $\forall k,l$ ф-ция $\partial_x^k\partial_y^l f = i^l f^{(k+l)}$ будет $\in \mathcal{O}(D)$ и, сл-но, ф-ция $\partial_x^k\partial_y^l u = \mathrm{Re}\,\underbrace{\partial_x^k\partial_y^l f}_{i^l f^{(k+l)}}$ будет гарм. в D. □

2°. (теорема о среднем) Если ф-ция $u(z)$ гарм. в круге $|z-z_0|<R$, то $\forall r\in[0,R)$

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

Д-во. Из интегр. ф-лы Коши вытекает, что

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

для всех $f\in\mathcal{O}(|z|<R)$, в том числе для той f, у к-рой $\mathrm{Re}\, f = u$. Взяв Re, получаем требуемую ф-лу. □

3°. (теорема ед-сти) Если u_1,u_2 гарм. в области D и $\{z\in D\mid u_1(z)=u_2(z)\}$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то $u_1\equiv u_2$ в D.

Д-во. Ф-ции $\varphi_1 := (u_1)_x - i(u_1)_y$,
$\varphi_2 := (u_2)_x - i(u_2)_y$
голом-ны в D (д-во п.2 в ①) и совпадают по условию в окр-сти нек-рой точки $z_0\in D$. Тогда $\varphi_1\equiv\varphi_2$ в D по теор. ед-сти. Сл-но, $(u_1-u_2)_x = (u_1-u_2)_y \equiv 0$ в D, т.е. $u_1-u_2\equiv \mathrm{const}$ (по ф-ле Н.-Л., т.к. D — область). Так как есть точки, где $u_1=u_2$, то эта $\mathrm{const} = 0$. □

Замечание. Из того, что $\{z\in D\mid u_1(z)=u_2(z)\}$ имеет предельную точку в D, не вытекает, что $u_1\equiv u_2$ в D. Пример: $D=\mathbb{C}$, $u_1(z)\equiv 0$, $u_2(z)=\mathrm{Im}\,z$. Тогда $\{z\in\mathbb{C}\mid u_1(z)=u_2(z)\}$ — это $\mathbb{R}$, имеет пред. точки в D, но $u_1\not\equiv u_2$.

Упр-ние. Пусть $u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ гарм. ф-ция и $\{z\in\mathbb{C}\mid u(z)=0\}$ совпадает с вещ. осью $\mathbb{R}$. Д-ть, что $u(z)=A\,\mathrm{Im}\,z$ для некот. $A\in\mathbb{R}$.

4° (принцип максимума)

I. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — произв. область, $u:D\to\mathbb{R}$ гарм. ф-ция и $\exists z_0\in D$, $\varepsilon>0$ т.ч. $u(z_0)\geq u(z)$ при $|z-z_0|<\varepsilon$. Тогда $u\equiv \mathrm{const}$.

II. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — огранич. область, $u\in C(\overline{D})$ гарм. в D. Тогда

$$\max_{z\in\overline{D}} u(z)=\max_{z\in\partial D} u(z).$$

Д-во. I. В силу п. ① $\exists f\in\mathcal{O}(|z-z_0|<\varepsilon)$ т.ч. $\mathrm{Re}\, f(z)=u(z)$ при $|z-z_0|<\varepsilon$. Тогда $|e^{f(z)}|=e^{\mathrm{Re}\, f(z)}$ достигает локального нестрог. максимума при $z=z_0$ $\Rightarrow$ $e^{f(z)}\equiv \mathrm{const}$ при $|z-z_0|<\varepsilon$ (по принципу максим. модуля I). Тогда $u(z)=\ln|e^{f(z)}|$ тоже const при $|z-z_0|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ также в D по теор. ед-сти

II. Пусть $z_0 \in \overline{D}$ – точка, где достигается $\max\limits_{z\in\overline{D}} u(z)$. Если $z_0 \in \partial D$, то всё доказано. Если $z_0 \in D$, то $u \equiv \mathrm{const}$ по п. I и утв-е тоже верно. □

5°. (теорема Лиувилля) Если $u: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ гарм. и ограничена (сверху или снизу), то $u \equiv \mathrm{const}$.

Д-во. В силу односв-сти $\mathbb{C}$, $\exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ т.ч. $u = \operatorname{Re} f$. Тогда $g := e^f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ограничена по модулю (если $u(z) \le C$ для всех $z\in\mathbb{C}$; если же $u(z) \ge C$ на $\mathbb{C}$, то заменим $u(z)$ на $-u(z)$) $\Rightarrow$ по теор. Лиувилля $e^f \equiv \mathrm{const}$, и тогда $u(z) = \ln|e^{f(z)}|$ тоже const. □

6°. (инвар-сть при конф. отобр-ях) Если $F: D_1 \to D_2$ конф. отобр-е и $u: D_2 \to \mathbb{R}$ гарм. ф-ция, то $u\circ F$ есть гарм. ф-ция на D_1.

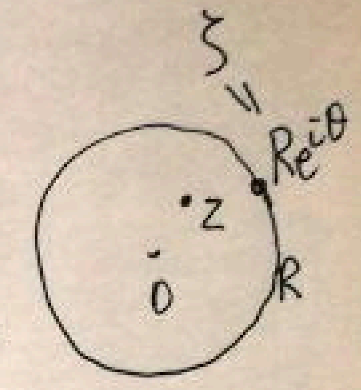
Д-во. В окр-сти $\forall$ точки $w_0 \in D_2$ имеем $u = \operatorname{Re} g$, $g \in \mathcal{O}(|w-w_0|<\varepsilon)$. Тогда $u\circ F = \operatorname{Re}(g\circ F)$ гарм. в окр-сти точки $z_0 := F^{-1}(w_0)$. □

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "u\circ F"'] & D_2 \arrow[d, "u"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Замеч. Гармоничность $F\circ u$ утверждать нельзя (напр., $u(z) = \operatorname{Re} z$, $F(w) = w^2$).

③ Ф-ла Пуассона. Пусть $D = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$, ф-ция $u: \overline{D}\to\mathbb{R}$ непр. на $\overline{D}$ и гарм. в D. Тогда $\forall z\in D$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\, u(\zeta)\,d\theta, \text{ где } \zeta = Re^{i\theta}$$



Д-во. Запишем $u = \operatorname{Re} f$, $f\in\mathcal{O}(D)$.

1) Сначала допустим, что $f\in\mathcal{O}(\overline{D})$. Тогда по интегр. ф-ле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta-z}\,d\theta \qquad (1)$$

$$(\text{при } z\neq 0)\quad 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{интегр. теорема} \\ \text{Коши, т.к. } R^2/\bar z \notin D}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - R^2/\bar z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta-R^2/\bar z}\,d\theta \qquad (2)$$

Поскольку $\dfrac{\zeta}{\zeta-z} - \dfrac{\zeta}{\zeta - \underbrace{R^2}_{\bar\zeta\zeta}/\bar z} = \dfrac{\zeta}{\zeta-z} - \dfrac{\bar z\zeta}{\bar z\zeta-\bar\zeta\zeta} = \dfrac{\zeta}{\zeta-z} - \dfrac{\bar z}{\bar z-\bar\zeta} = \dfrac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$, то вычитание (2) из (1) даст ф-лу Пуассона.

2) В общем случае запишем $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, где $f_n(z) := f\left(z\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$. Тогда $f_n\in\mathcal{O}(\overline{D})$, сл-но, по п. 1, $\forall z\in D$ имеем

$$(3)\quad u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\, u_n(\zeta)\,d\theta, \text{ где } u_n := \operatorname{Re} f_n;$$

В силу непр-сти $u(z)$ на $\overline{D}$ ф-ции $u_n(z) = u\left(z\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \rightrightarrows u(z)$ на ∂D, поэтому в (3) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $n\to\infty$. □