Лекция № 9 (14.04.2020)

① Д-во теор. Каратеодори (окончание)

Для всех $\varepsilon \in (0, r_0)$ было получено нер-во

$$\alpha^2 \ln\frac{r_0}{\varepsilon} \underset{(1)}{\le} \int_{D_1} |f'(z)|^2 \,dx\,dy \cdot 2\pi \underset{(*)}{=} \int_{D_2} du\,dv \cdot 2\pi$$

что при $\varepsilon \to 0$ даёт противоречие (справа стоит площадь ограниченной области D_2). Рав-во $(*)$ вытекает из условий Коши-Римана:

$$d_z f = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det(d_z f) = A^2 + B^2 = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$

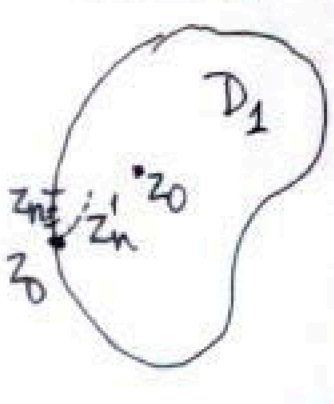
т.к. $f' = u_x + i v_x$.

(1): инт-л справа по мн-ву $\{z_0 + re^{i\theta} \mid \varepsilon < r < r_0, \theta_1(r) < \theta < \theta_2(r)\}$, лежащему в D_1 $\Rightarrow$ не превосходит интеграла от того же по D_1

Итак, 1 шаг д-ва закончен: $\forall z_0 \in \partial D_1$

$$\exists \lim_{D_1 \ni z \to z_0} f(z) =: F(z)$$

2 шаг: Полученная ф-ция $F: \overline{D}_1 \to \overline{D}_2$ непр-на на $\overline{D}_1$



Непр-сть в точках $z_0 \in D_1$ вытекает из того, что $F = f$ на D_1 (по опр-ю). Непр-сть в точке $z_0 \in \partial D_1$: если $\overline{D}_1 \ni z_n \to z_0$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists z_n' \in D_1$ т.ч. $|z_n' - z_n| < \frac{1}{n}$ и $|F(z_n) - f(z_n')| < \frac{1}{n}$ (по опр-ю $F(z_n)$ как lim-а).

Если $F(z_n) \not\to F(z_0)$, то получаем, что и $f(z_n') \not\to F(z_0)$ вопреки опр-ю $F(z_0)$ как предела.

3 шаг. Имеем непр. продолжения $F: \overline{D}_1 \to \overline{D}_2$ ф-ции f и $G: \overline{D}_2 \to \overline{D}_1$ ф-ции $g := f^{-1}$. Тогда $G \circ F: \overline{D}_1 \to \overline{D}_1$ непр. отобр-е, равное $g \circ f = \mathrm{Id}$ на D_1 $\Rightarrow$ по непр-сти $G \circ F = \mathrm{Id}$ на $\overline{D}_1$

Аналогично $F \circ G: \overline{D}_2 \to \overline{D}_2$ есть тождеств. отобр-е. Сл-но, F – гомеоморфизм $\overline{D}_1$ на $\overline{D}_2$. $\square$

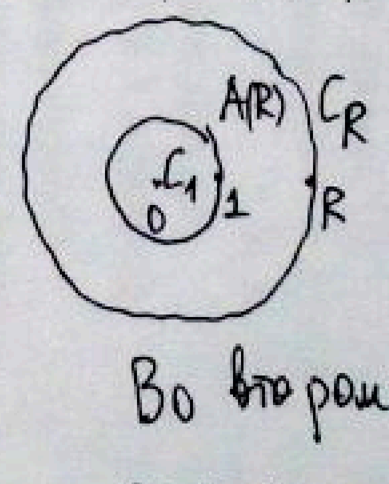
② Конформные отобр-ния колец

Для $R > 1$ пусть $A(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$.

Утв-ние. 1) $\exists$ конф. отобр-е $A(R)$ на $A(R')$ $\Leftrightarrow$ $R = R'$

2) Все конф. отобр-я $A(R)$ на себя имеют вид либо $f(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$, либо $f(z) = e^{i\theta}\frac{R}{z}$, $\theta \in \mathbb{R}$

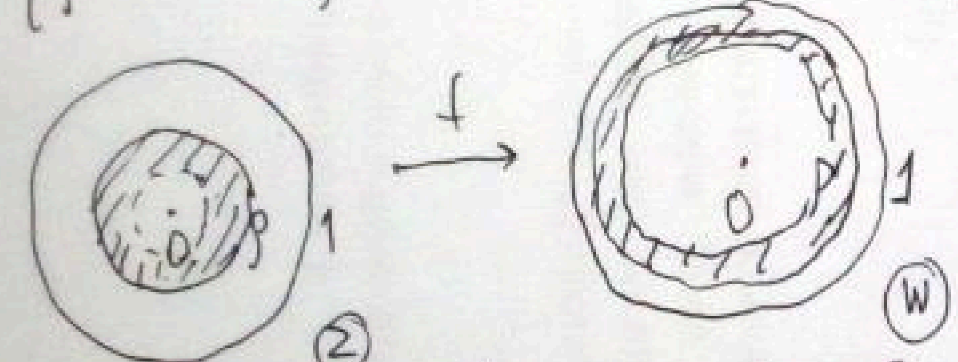
Д-во. Пусть $f: A(R) \to A(R')$ конф. отобр-е. По теор. Каратеодори, f есть гомеоморфизм $\overline{A(R)}$ на $\overline{A(R')}$.



Связные ком-ты C_1 и C_R границы $\partial A(R)$ переходят в связные к-ты C_1 и $C_{R'}$ мн-ва $\partial A(R')$ либо $C_1 \to C_1$, либо $C_1 \to C_{R'}$

Во втором случае после преобр-я $w \mapsto \frac{R'}{w}$ можно считать, что $C_1 \to C_1$.

После замены $z \mapsto \frac{1}{z}$ и $w \mapsto \frac{1}{w}$ можно считать, что f конф. отобр-ет $\{\rho<|z|<1\}$ на $\{\rho'<|w|<1\}$



($\rho = 1/R$, $\rho' = 1/R'$), причем $C_1 \to C_1$. Тогда по пр. симм. f продолжается до конф-отобр. $\{\rho^2<|z|<1\}$ на $\{(\rho')^2<|w|<1\}$ затем $\{\rho^3<|z|<1\}$ на $\{(\rho')^3<|w|<1\}$ и т. д. до $\{0<|z|<1\}$ на $\{0<|w|<1\}$ причем $f(z)\to 0$ при $z\to 0$ (из опр-я продолжения по симметрии). Сл-но, особ-сть $f\in\mathcal{O}(0<|z|<1)$ при $z=0$ устранима [по опр.] и $f\in\mathcal{O}(|z|<1)$ – конф. отобр-е $\{|z|<1\}$ на $\{|w|<1\}$ с $f(0)=0$.

По описанию конф. отобр-ий круга на себя отсюда вытекает, что $f(z)=e^{i\theta}z$ для нек. $\theta\in\mathbb{R}$. Этим доказано, что $\rho=\rho'$ (п.1) и описаны все к.о. $A(R)$ на себя (п.2). □

Упр. Д-ть, что кольцо $A(r_1,r_2)=\{r_1<|z|<r_2\}$ бигол. экв-но $A(r_1',r_2')$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_2'}{r_1'},$$

за исключением случая $r_1=0$, $r_2=\infty$, когда необходимо также $r_1'=0$, $r_2'=\infty$.

③ Гиперболические треугольники

Пусть $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ – обобщ. круг (т.е. круг или полупл-сть).

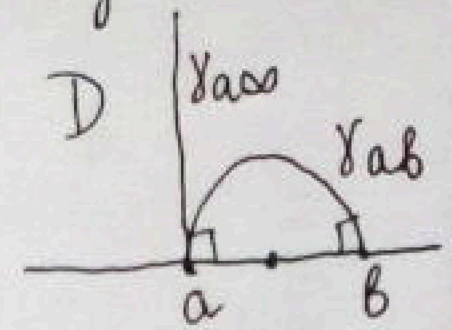


рис. 1

Тогда $\forall a\ne b\in\partial D$ $\exists$ единств. дуга γ_{ab} ($\subset D$) обобщ. окруж-сти, к-рая ортогональна ∂D в точках a и b. (см. рис. 1)

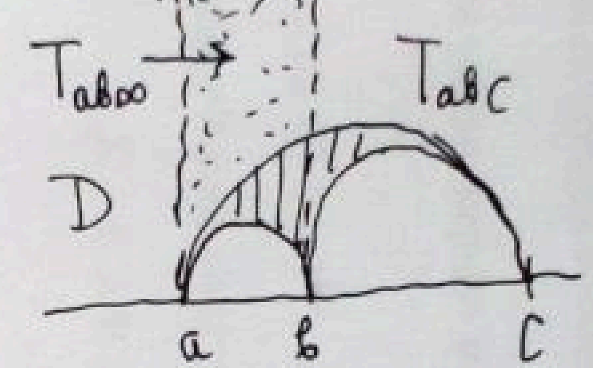


рис. 2

Для $\forall$ трех разл. точек $a,b,c\in\partial D$ область $T_{abc}\subset D$, ограниченная дугами γ_{ab}, γ_{bc}, γ_{ca}, наз. гиперб. треуг-ком в D с вершинами a,b,c (см. рис. 2)

Св-ва: 1°. Любые 2 гип. треуг-ка в D переводятся друг в друга с помощью ДЛО области D на себя.

2° Образ гип. треуг-ка в D при симметрии относ-но его стороны – это опять гиперб. треуг-к в D (д-во на рис. 3)

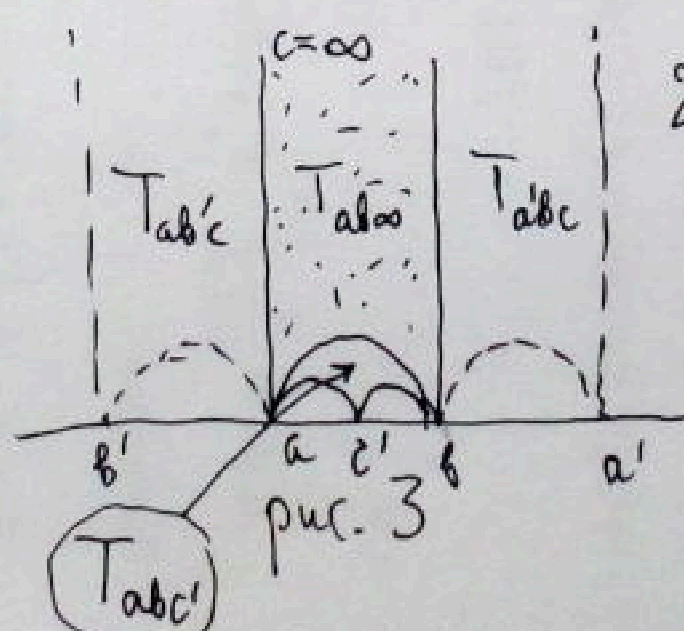
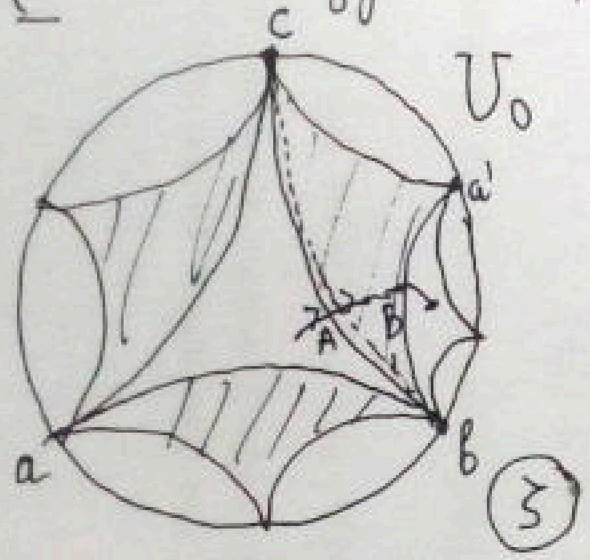


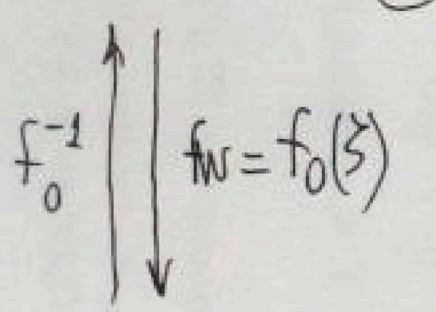
рис. 3

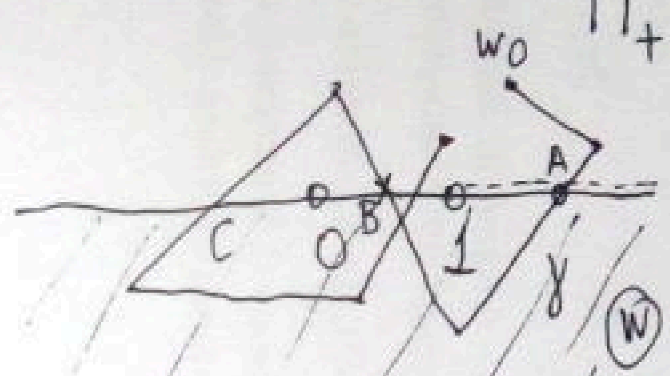
④ Непостоянная АФ на $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, все эл-ты которой по модулю <1

[Упр. Если $\mathcal{F}$ – АФ на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, все эл-ты к-рой по модулю <1, то $\mathcal{F}\equiv$ const.]



Пусть T_{abc} – гип. тр-к в ед. круге U_0. Это односв. область [упр-е] $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ по теор. Римана $\exists$ конф. отобр-е T_{abc} на ед. круг U и (композиция с ДЛО) на полупл-ть $\Pi_+=\{w\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} w>0\}$. По теор. Каратеодори f_0 – гомеоморфизм $\overline{T_{abc}}$ на $\overline{\Pi_+}\cup\{\infty\}$ и (композиция с ДЛО) $f_0(a,b,c)=0,1,\infty$.



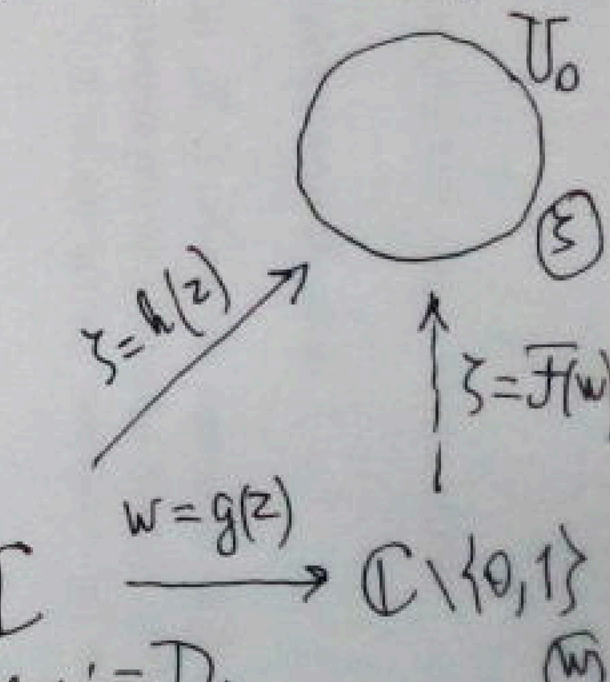


Утв. $\exists$ АФ $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, для к-рой f_0^{-1} явл. одной из ветвей на подобласти $\Pi_+\subset\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. При этом $\forall$ эл-та $F=(U,f)\in\mathcal{F}$ имеем $f(U)\subset U_0$. (т.е. все эл-ты по модулю <1).

Д-во. Дост-но д-ть, что $\forall\, w_0\in\Pi_+$ кан. эл-т F_{w_0} ф-ции f_0^{-1} с центром w_0 допускает АП вдоль $\forall$ ломаной $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ без звеньев, содержащихся в $\mathbb{R}$ (см. замеч. к теореме о продолжении вдоль гомот. путей). А это осуществляется применением пр. симм. столько раз, сколько γ пересекает $\mathbb{R}$. Св-во 2° гарантирует, что образ всех эл-тов останутся в U_0. □

⑤ Малая теорема Пикара. (окончательное обобщение теоремы Лувилля). Для $\forall f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ либо $f\equiv$ const, либо $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$, либо $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{A\}$ для некот. $A\in\mathbb{C}$. Иными словами: непостоянная целая ф-ция принимает все значения, кроме м.б. одного.

Д-во. Пусть $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\setminus\{A,B\}$, где $A\neq B\in\mathbb{C}$. Тогда ф-ция $g(z):=\dfrac{f(z)-A}{B-A}\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $g(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Композиция $\mathcal{F}\circ g$ определена и явл. одной или неск. АФ на $\mathbb{C}$, к-рые все $\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ по теор. о монодромии. Пусть h – та из них, для к-рой $h(0)\in T_{abc}\cup T_{a'bc}\cup T_{ab'c}\cup T_{abc'}:=D_1$.



Тогда $h\equiv$ const $=h(0)$ по теор. Лувилля $\Rightarrow$ $g=f_1\circ h$ тоже $\equiv$ const, где f_1 – "ветвь $\mathcal{F}^{-1}$ на D_1". Тогда и $f\equiv$ const. □