Лекция №8 (07.04.2020)

① Следствия из теоремы Римана.

Сл-вие 1. Область $D\subset\mathbb{C}$ допускает конф. отобр-е на ед. круг $\mathbb{U}$ $\Leftrightarrow$ D односвязна и $\neq\mathbb{C}$.

Д-во. $\Leftarrow$ теор. Римана. $\Rightarrow$ сохранение односв-сти при гомеоморфизмах (+ односв-сть круга) и теор. Лиувилля (не $\exists$ конф. отобр-я $\mathbb{C}$ на $\mathbb{U}$). □

Сл-вие 2. След. св-ва области $D\subset\mathbb{C}$ экв-ны:

(1) D односвязна,

(2) D гомеоморфна ед. кругу $\mathbb{U}$,

(3) $\forall f\in\mathcal{O}(D)$ с $f(D)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists\, g\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $f=g^2$ [голом-ные корни],

(4) $\forall f\in\mathcal{O}(D)$ с $f(D)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists h\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $f=e^h$ [голом-ные логарифмы],

(5) $\forall f\in\mathcal{O}(D)$ $\exists F\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $F'=f$

Д-во. (1)$\Rightarrow$(2) теор. Римана при $D\neq\mathbb{C}$, $re^{i\theta}\mapsto\frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} r)e^{i\theta}$ для $D=\mathbb{C}$,

(2)$\Rightarrow$(1) сохр-е односв-сти при гомеом-мах,

(1)$\Rightarrow$(3),(4),(5) леммы о корнях, логарифмах и первообразных (лекция №6),

(5)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(3) лемма о корнях и логарифмах из I семестра,

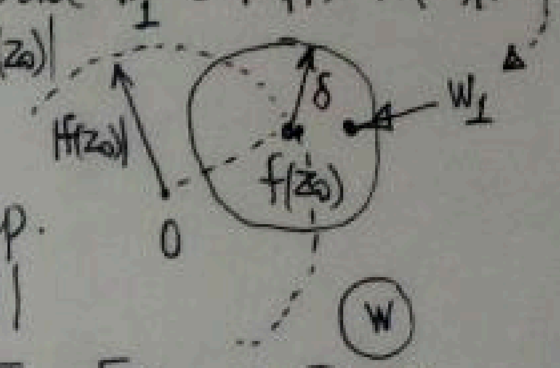
(3)$\Rightarrow$(2) д-во теор. Римана о конф. отобр. из всех следствий односвязности использует только (3). □

② Принцип максимума модуля.

I. Если $D\subset\mathbb{C}$ - область, $f\in\mathcal{O}(D)$ и $\exists z_0\in D,\ \varepsilon>0$ т.ч. $|f(z_0)|\geqslant|f(z)|$ при $|z-z_0|<\varepsilon$, то $f\equiv\mathrm{const}$

II. Если $D\subset\mathbb{C}$ - ограниченная область и $f\in\mathcal{O}(D)\cap C(\overline{D})$, то $\max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|=\max\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$.

Д-во. I [Если $f(z_0)=0$, то $f\equiv0$ при $|z-z_0|<\varepsilon$ и, сл-но, $f\equiv0$ в D по теор. ед-сти.] Если $f\not\equiv\mathrm{const}$, то образ ~~при~~ f круга $|z-z_0|<\varepsilon$ содержит нек-рый круг $|w-f(z_0)|<\delta$ (по пр. сохр. обл.). В последнем есть точка w_1 с $|w_1|>|f(z_0)|$. Сл-но, $\exists\, z_1$ т.ч. $|z_1-z_0|<\varepsilon$, но $|f(z_1)|>|f(z_0)|$ вопреки условию.



II. По теор. Вейерштрасса о непр. ф-ции на компакте, $\max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|$ достигается в некот. точке $z_0\in\overline{D}$. Если $z_0\in D$, то $f\equiv\mathrm{const}$ по части I и утв-е верно. Если $z_0\in\partial D$, то оно получается тоже верно. □

③ Лемма Шварца

Пусть $f\in\mathcal{O}(\mathbb{U})$, где $\mathbb{U}:=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, $f(0)=0$ и $|f(z)|\leqslant1$ для всех $z\in\mathbb{U}$.

Тогда: 1) $|f(z)|\leqslant|z|$ для всех $z\in\mathbb{U}$,

2) если $|f(z_0)|=|z_0|$ для некот. $z_0\in\mathbb{U}\setminus\{0\}$, то $f(z)=e^{i\theta}z$ для некот. константы $\theta\in\mathbb{R}$.

Д-во. $g(z):=\dfrac{f(z)}{z}\in\mathcal{O}(0<|z|<1)$

$\exists\lim\limits_{z\to0}g(z)=f'(0)\Rightarrow$ ос. точка $z=0$ устранима,

т.е. $g\in\mathcal{O}(\mathbb{U})$, если доопределить $g(0):=f'(0)$ (см. критерий устр. о. т.)

Фикс-ем $z\in U$. При $|z|<r<1$ имеем

$$|g(z)| \le \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \le \frac{1}{r}$$

При $r\to 1-0$ это даёт $|g(z)|\le 1$, т.е. $\begin{cases}|f(z)|\le|z|, & z\in U\setminus\{0\}\\ |f'(0)|\le 1, & z=0\end{cases}$

пр. макс. мод. II

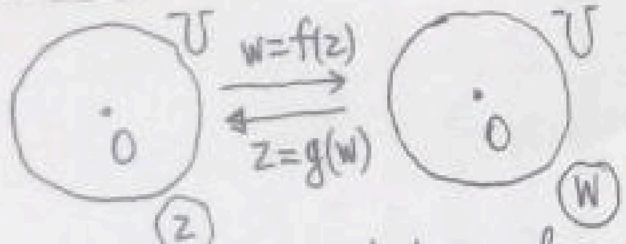
В частности, доказано утв. 1. Если $|f(z_0)|=|z_0|$ при некот. $z_0\in U\setminus\{0\}$, то $|g(z)|$ достигает $\max\limits_{|z|<1}$ при $z=z_0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow g(z)\equiv \mathrm{const}$ по принц. макс. мод. I, и модуль этой const равен $|g(z_0)|=1$, т.е. const $=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$. □

4) Описание всех конф. отобр-ний ед. круга U на себя.

1) Если $f: U\to U$ конф. отобр-е с $f(0)=0$, то $f(z)=e^{i\theta}z$ для некот. $\theta\in\mathbb{R}$.

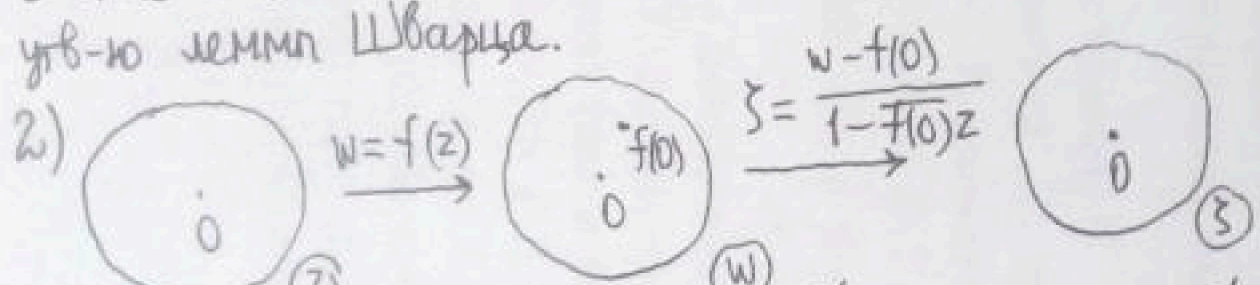
2) Если $f: U\to U$ конф. отобр-е, то $\exists\, a\in U, \theta\in\mathbb{R}$ т.ч.
$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Д-во. 1) По лемме Шварца, $|f(z)|\le|z|$ для всех $z\in U$. Для обратного отобр-я $g:=f^{-1}$ также $|g(w)|\le|w|$ для всех $w\in U$, что при $w=f(z)$ даёт $|z|\le|f(z)|$.



В итоге $|f(z)|=|z|$ для всех $z\in U$. Тогда $f(z)=e^{i\theta}z$ по 2-му утв-ю леммы Шварца.

2)



В силу части 1), $\dfrac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}z}=e^{i\theta'}z$ для некот. $\theta'\in\mathbb{R}$.

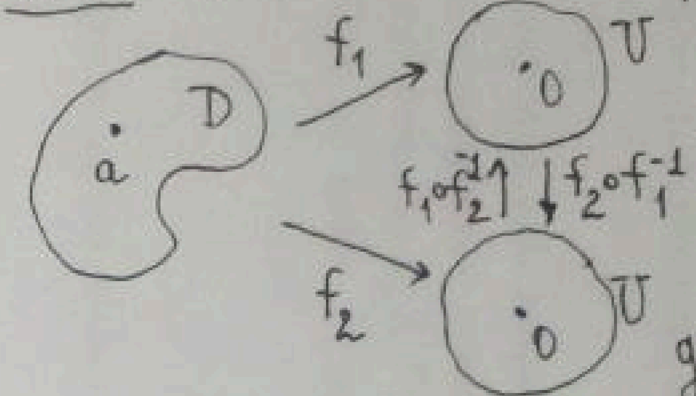
Отсюда f — ДЛО и, сл-но, $f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ для нек-рых $a\in U, \theta\in\mathbb{R}$ (по описанию всех ДЛО ед. круга на себя). □

Замеч. Можно было бы и не использ-ть это описание, а получить сейчас.

5) Единств-ть конф. отобр-я области на круг.

Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — односв. область, $D\neq\mathbb{C}$. Тогда $\forall a\in D, \theta\in\mathbb{R}$ $\exists$ единств. конф. отобр-ние $f: D\to U$ т.ч. $f(a)=0$, $\arg f'(a)=\theta$.

Д-во. Такое к.о. $\exists$ по теор. Римана (это $e^{i\alpha}f_\infty(z)$ для надлежащего $\alpha\in\mathbb{R}$). Если f_1, f_2 — два таких к.о., то $g:=f_2\circ f_1^{-1}$ есть к.о. U на себя с $g(0)=0$, $\arg g'(0)=0$.



Запишем $g(z)=e^{i\beta}\dfrac{z-b}{1-\bar{b}z}$ (согласно п. 4)

Из $g(0)=0$ вытекает $b=0$, т.е. $g(z)=e^{i\beta}z$.

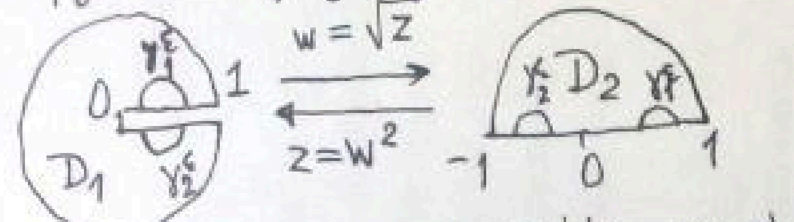
Тогда из $\arg g'(0)=0$ вытекает $\beta=0$, т.е. $g(z)=z$.

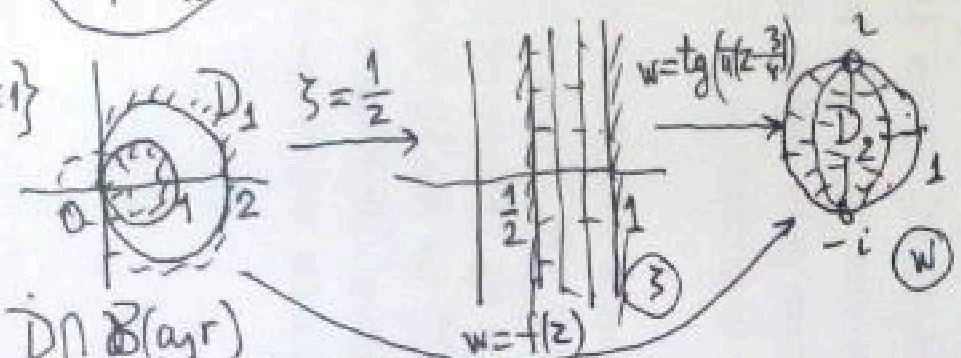
Сл-но, $f_2\circ f_1^{-1}=Id$, т.е. $f_2=f_1$. □

6) Теорема Каратеодори о соотв-вии границ при конформном отображении.

Пусть $D_1, D_2\subset\mathbb{C}$ — ограниченные области, локально связные вблизи границы. Тогда $\forall$ конф. отобр-я $f: D_1\to D_2$ $\exists$ гомеоморфизм $F:\overline{D}_1\to\overline{D}_2$ т.ч. $F=f$ на D_1 (т.е. всякое конф. отобр-е областей продолжается до гомеоморфизма замыканий).

Опр. Область $D\subset\mathbb{C}$ локально связна вблизи границы, если $\forall a\in\partial D\ \exists\,\varepsilon>0$ т.ч. $D\cap\partial B(a,r)$ связно (т.е. явл. одной дугой окружности) для всех $r\in(0,\varepsilon)$.

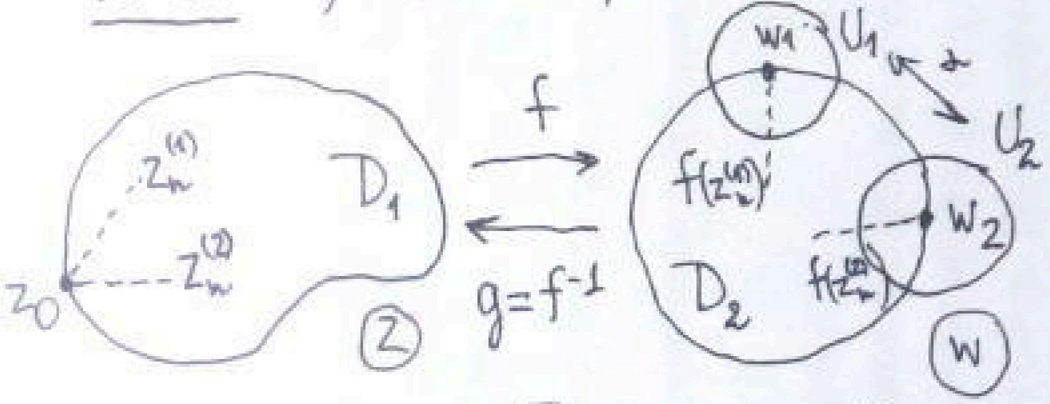




Замеч. 1. В этом случае $D\cap B(a,r)$ лин. связно (т.е. явл. областью) $\forall a\in\partial D$, $r\in(0,\varepsilon)$

Замеч. 2 В классич. формул-ке теор. Каратеодори области D_1 и D_2 ограничены замк. жорд. кривыми.

Д-во. 1) Покажем, что $\forall z_0\in\partial D_1\ \exists \lim\limits_{D_1\ni z\to z_0} f(z)$.



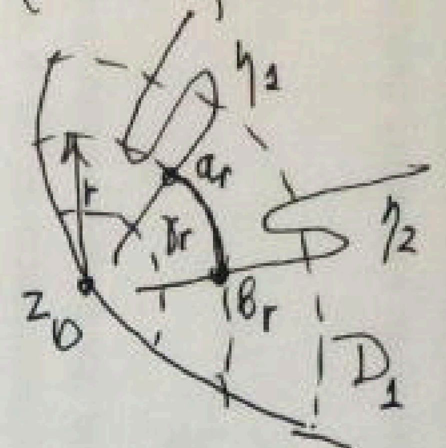
Действ-но, иначе $\exists$ посл-сти $z_n^{(1)}\to z_0$ и $z_n^{(2)}\to z_0$ т.ч. $f(z_n^{(1)})\to w_1$ и $f(z_n^{(2)})\to w_2$, где $w_1\ne w_2\in\partial D_2$

Пусть U_1, U_2 – круговые окр-сти w_1, w_2 с $\mathrm{dist}(\bar U_1,\bar U_2)\ge\alpha>0$

По замеч. 1, пересечения $\bar U_1$ и $\bar U_2$ с D_2 лин. связны, т.е. $\exists$ непр. отобр-я $\gamma_1:[0,1)\to D_2\cap U_1$
$\gamma_2:[0,1)\to D_2\cap U_2$

т.ч. $\gamma_j(1-\frac1n)=f(z_n^{(j)})$, $n=1,2,\dots$

Тогда $\eta_j:=f^{-1}\circ\gamma_j$ – непр. кривые в D_1, пересекающие все окружности $|z-z_0|=r$, $0<r<r_0$ (по теореме о промежуточном значении)



Сл-но, $\forall r\in(0,r_0)$ $\exists$ точки $a_r\in\eta_1\cap\partial B(z_0,r)$, $b_r\in\eta_2\cap\partial B(z_0,r)$ т.ч. дуга $\partial B(z_0,r)$ от a_r до b_r лежит целиком в D_1 (здесь важна лок. связность D_1 вблизи z_0). Имеем

$$\alpha\underset{\text{по опр. dist}(\bar U_1,\bar U_2)}{\le}|f(b_r)-f(a_r)|=\left|\int_{\gamma_r}f'(\zeta)\,d\zeta\right|\underset{\substack{\zeta=z_0+re^{i\theta},\\ \theta_1(r)<\theta<\theta_2(r)}}{=}$$

$$=\left|\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f'(z_0+re^{i\theta})\,ire^{i\theta}\,d\theta\right|\le$$

$$\le\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}|f'(z_0+re^{i\theta})|\,r\,d\theta\underset{\boxed{\text{нер-во К.Б.}\ \left|\int\varphi\cdot1\,d\theta\right|^2\le\int|\varphi|^2d\theta\int1\,d\theta}}{\le}\left\{\int|f'|^2r^2d\theta\right\}^{1/2}\left\{\int1\,d\theta\right\}^{1/2}$$

В итоге
$$\alpha^2\le\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}|f'(z_0+re^{i\theta})|^2r^2\,d\theta\cdot\underbrace{(\theta_2(r)-\theta_1(r))}_{\le2\pi}$$

Делим на r и интегрируем по r от ε до r_0:
$$\alpha^2\ln\frac{r_0}{\varepsilon}\le\int_{D_1}|f'(z)|^2\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dxdy}\cdot2\pi\overset{(*)}{=}\int_{D_2}du\,dv\cdot2\pi$$