Лекция № 7 (31.03.2020)

(1) Принцип компактности. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ – область, $f_k\in\mathcal{O}(D)$ и $\exists M>0$ т.ч. $|f_k(z)|\le M$ для всех $z\in D$ и $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\exists$ подпосл-сть $\{f_{k_\ell}\}$, к-рая сходится равн-но на компактах в D.

Д-во. 1) Пусть $B_R:=\{|z-a|<R\}\subset D$ и $c_n(f):=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Тогда $f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(f_k)(z-a)^n$ при $z\in B_R$, $k\in\mathbb{N}$.

По нер-вам Коши, $|c_n(f_k)|\le\frac{M}{r^n}$ для всех n,k, если $0<r<R$.

Сл-но, посл-сть $c_0(f_k)$ ограничена и $\exists$ подпосл-сть $k_\ell^{(0)}$ т.ч. $c_0(f_{k_\ell^{(0)}})$ сх-ся. Из неё выберем подпосл-сть $k_\ell^{(1)}$ т.ч. $c_1(f_{k_\ell^{(1)}})$ сх-ся, и т.д. Положим $k_\ell:=k_\ell^{(\ell)}$ для всех $\ell\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\boxed{\text{посл-сть } c_n(f_{k_\ell}) \text{ сх-ся при } \ell\to\infty \text{ для любого } n=0,1,2,\dots}$$

Переобозначим посл-сть $\{k_\ell\}$ опять через $\{k\}$. Тогда при $0<r<R$ в круге $B_r=\{|z-a|<r\}$ имеем

$$|f_k(z)-f_\ell(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(f_k)-c_n(f_\ell)|\,|z-a|^n,$$ т.е.

$$|f_k(z)-f_\ell(z)|\le\sum_{n=0}^{N}|c_n(f_k)-c_n(f_\ell)|r^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2M}{r_1^n}r^n,$$ где $0<r<r_1<R$

$\forall\varepsilon>0$ выберем N так, что 2-я сумма $<\frac{\varepsilon}{2}$ (в силу сх-сти геом. прогрессии), а тогда зафиксируем N и выберем m т.ч. $k,\ell\geqslant m\Rightarrow$ первая сумма $<\frac{\varepsilon}{2}$ (по крит. Коши в силу сх-сти $c_n(f_k)$ при $k\to\infty$ для всех n).

Получаем, что $k,\ell\geqslant m\Rightarrow|f_k(z)-f_\ell(z)|<\varepsilon$ для всех $z\in B_r$.

Сл-но, по критерию Коши посл-сть $f_k(z)$ сх-ся равн-но на B_r для любого $r\in(0,R)$, т.е. равн-но на компактах в круге B_R.

Этим доказан принцип компактности для случая, когда D – круг

2) Пусть D – произв. область и $K\subset D$ – произв. компакт. Покроем K кругами $B(a,R_a)$, где $a\in K$ и $B(a,2R_a)\subset D$, выберем конечное подпокрытие и повторим соотв-щее конечное число раз выбор подпосл-сти из п.1. Получим подпосл-сть $\{f_{k_\ell}\}$, к-рая сходится равномерно на K.

3) Пусть D — произв. область. Тогда $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, где K_n — компакты и $K_n \subset K_{n+1}$ (например, пусть $K_n := \{z\in D \mid |z|\le n,\ \operatorname{dist}(z,\partial D)\ge 1/n\}$). Выберем подпосл-сть $k_\ell^{(0)}$ т.ч. $f_{k_\ell^{(0)}}$ сх-ся равн. на K_0, из неё подпосл-сть $k_\ell^{(1)}$ т.ч. $f_{k_\ell^{(1)}}$ сх-ся равн. на K_1, и т.д. Положим $k_\ell := k_\ell^{(\ell)}$ для всех $\ell\in\mathbb{N}$. Тогда

посл-сть f_{k_ℓ} сх-ся равн. на комп. в D

(т.к. любой компакт $K\subset D$ содержится в K_n для нек-рого n). □

② Теорема Гурвица.

Пусть $f_n, f\in\mathcal{O}(D)$, $D\subset\mathbb{C}$ — область, $f_n\to f$ равн. на комп. в D, $f\not\equiv 0$, но $\exists a\in D$ т.ч. $f(a)=0$. Тогда в любой окр-сти точки a все ф-ции f_n, начиная с нек-рой, тоже обращаются в нуль, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N$ т.ч. $n>N \Rightarrow N(f_n(z), |z-a|<\varepsilon)\ge 1$.

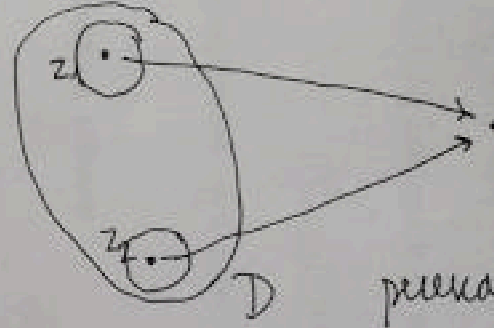
Д-во. По принципу изол-сти нулей $\exists \varepsilon'\le\varepsilon$ т.ч. $f(z)\ne 0$ при $0<|z-a|\le\varepsilon'$. Заменим ε на ε' и обозначим $\min\limits_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)| =: \mu>0$. Пусть N таково, что $|f_n(z)-f(z)|<\mu$ при всех $n\ge N$, $|z-a|=\varepsilon$. Тогда по теор. Руше

$$N(f_n(z), |z-a|<\varepsilon) = N(\overbrace{f(z)}^{|\cdot|>\mu \text{ на гр-це}} + \overbrace{f_n(z)-f(z)}^{<\mu \text{ на гр-це}}, |z-a|<\varepsilon) = N(f(z), |z-a|<\varepsilon)\ge 1$$

по условию. □

Сл-вие. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — область, $f_n\in\mathcal{O}(D)$ однолистны, $f_n\to f$ равн. на компактах в D и $f\not\equiv \text{const}$ в D. Тогда ф-ция $f\in\mathcal{O}(D)$ однолистна в D.

Д-во. $f\in\mathcal{O}(D)$ по теор. Вейерштрасса о рядах. Если $f(z_1)=f(z_2)=: w_0$ при $z_1\ne z_2$,



то по теор. Гурвица $\forall\varepsilon>0$ $\cdot w_0$ все ф-ции $f_n(z)-w_0$, начиная с нек-рой, имеют нули в непересекающихся кругах $|z-z_j|<\varepsilon$, $j=1,2$. Это противоречит однолистности f_n. □

③ Окончание д-ва теоремы Римана.

Было показано, что $\forall$ односвязной области $D\subset\mathbb{C}$, $D\ne\mathbb{C}$, $\exists$ однолистная ф-ция $f_0\in\mathcal{O}(D)$ с $f_0(D)\subset U := \{|w|<1\}$. Фикс-ем произв. точку $z_0\in D$ и рассм. сем-во ф-ций

$$S := \left\{\begin{array}{l}\text{все однолистные } f\in\mathcal{O}(D) \text{ т.ч.}\\ f(D)\subset U \text{ и } |f'(z_0)|\ge|f_0'(z_0)|\end{array}\right\}$$

Сем-во S непусто (т.к. $f_0\in S$).

Положим $A := \sup\limits_{f\in S}|f'(z_0)|$.

$S := \left\{ \begin{array}{l} \text{все однолистные } f\in\mathcal{O}(D) \\ \text{т.ч. } f(D)\subset U \text{ и } |f'(z_0)|\geq|f_0'(z_0)| \end{array} \right\} \neq\emptyset$

$A := \sup\limits_{f\in S}|f'(z_0)|>0$ в силу однолистности f_0

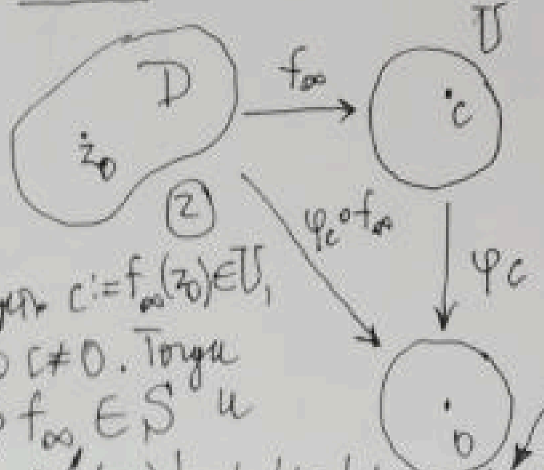
По опр-ю sup, $\exists$ посл-ть $f_k\in S$ т.ч. $|f_k'(z_0)|\to A$ при $k\to\infty$.

По принципу компактности (т.к. $f_k(D)\subset U$ для всех k) можно считать, что посл-ть f_k сх-ся равн. на компактах в D. Пусть $f_\infty := \lim\limits_{k\to\infty} f_k$. Тогда $f_\infty\in\mathcal{O}(D)$ по теор. Вейерштрасса и $f_\infty'(z_0)=\lim\limits_{k\to\infty} f_k'(z_0)$ по ней же. Сл-но, $|f_\infty'(z_0)|=\lim\limits_{k\to\infty}|f_k'(z_0)|=A$. В частности $A<+\infty$. Поскольку $A>0$ (в силу однолистности f_0), имеем $f_\infty'(z_0)\neq0$ т.е. $f_\infty\not\equiv \text{const}$. Тогда по сл-вию из теор. Гурвица (п. 2) ф-ция f_∞ однолистна в D. В частности, $\boxed{f_\infty\in S.}$

1 шаг. Покажем, что $f_\infty(z_0)=0$. Для этого используем св-ва ДЛО $w=\varphi_c(z)=\frac{z-c}{1-\bar c z}$ ед. круга U на себя (где $|c|<1$)

$$\varphi_c'(z)=\frac{(1-\bar cz)-(z-c)(-\bar c)}{(1-\bar cz)^2}=\frac{1-|c|^2}{(1-\bar cz)^2};$$ в частности,

(*) $\varphi_c'(0)=1-|c|^2$, $\varphi_c'(c)=\frac{1}{1-|c|^2}$

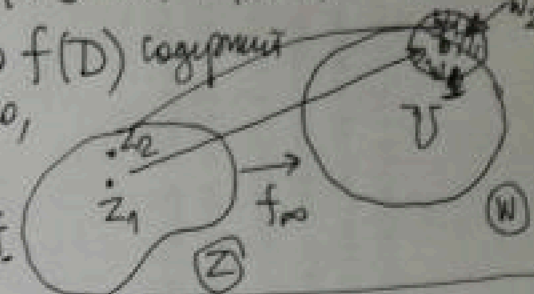


Пусть $c:=f_\infty(z_0)\in U$, но $c\neq0$. Тогда $\varphi_c\circ f_\infty\in S$ и

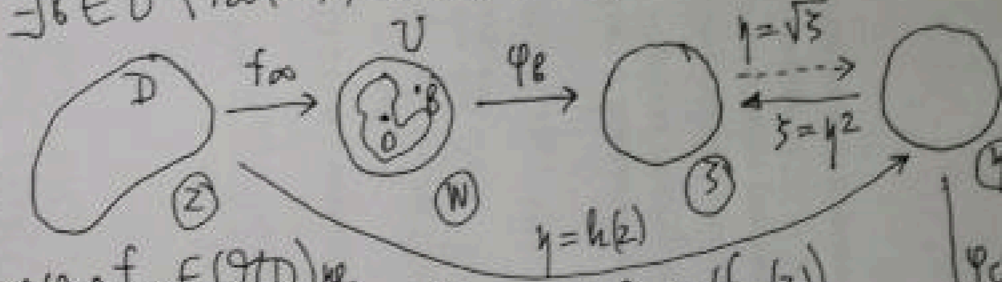
$|(\varphi_c\circ f_\infty)'(z_0)|=|\varphi_c'(c)|\cdot|f_\infty'(z_0)|=\frac{A}{1-|c|^2}>A$ вопреки опр-ю A как sup.

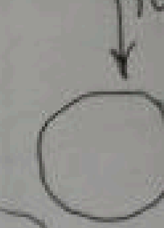
0 шаг. Покажем, что $f_\infty(D)\subset U$ (пока мы только знаем, что $f_\infty(D)\subset\bar U$, т.к. из $|f_k(z)|<1$ вытекает при $k\to\infty$ только то, что $|f_\infty(z)|\le1$ для всех $z\in D$)

Действ-но, если $\exists$ $z_1\in D$ т.ч. $|f_\infty(z_1)|=1$, то по принципу сохр. обл. мн-во $f(D)$ содержит круг $|w-w_1|<\delta$ и, сл-но, $\exists z_2\in D$ т.ч. $|f_\infty(z_2)|>1$ вопреки тому, что $f_\infty(D)\subset\bar U$.



2 шаг. Покажем, что $f_\infty(D)=U$. Действ-но, если $\exists b\in U\setminus f_\infty(D)$, то $b\neq0$ в силу Шага 1 и





ф-я $\varphi_b\circ f_\infty\in\mathcal{O}(D)$ не обращ. в 0 $\Rightarrow$ $\exists h\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $h(z)^2=\varphi_b(f_\infty(z))$

При этом $2h(z)h'(z)=\varphi_b'(f_\infty(z))f_\infty'(z)$, что для $z=z_0$ дает $2h(z_0)h'(z_0)=\varphi_b'(0)f_\infty'(z_0)$, т.е.

$$|h'(z_0)|=\frac{(1-|b|^2)|f_\infty'(z_0)|}{2|h(z_0)|}=\frac{1-|b|^2}{2\sqrt{|b|}}\cdot A$$

$|c|^2=|b|$

Улучшим эту оценку, взяв $\varphi_c\circ h$, где $c=\sqrt{b}=h(z_0)$. Тогда

$$|(\varphi_c\circ h)'(z_0)|=|\varphi_c'(c)||h'(z_0)|=\frac{1}{1-|c|^2}\cdot\frac{1-|b|^2}{2\sqrt{|b|}}\cdot A \overset{!}{=} \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}\cdot A>A$$ вопреки опр-ю A как sup.

Вывод: f_∞ есть конф. отобр-е D на U (с $f_\infty(z_0)=0$). □