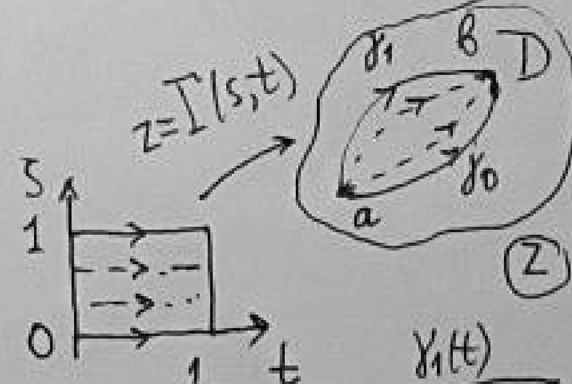
① <u>Опр-е односвязной области</u> Область $D\subset\mathbb{C}$ наз. <u>односвязной</u>, если любые два непр. пути $\gamma_0,\gamma_1:[0,1]\to D$ с общим началом $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=a$ и концом $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)=b$ гомотопны в D, т.е. $\exists$ непр. отобр-е $\Gamma:[0,1]\times[0,1]\to D$

с $\Gamma(0,t)=\gamma_0(t)$ для всех $t\in[0,1]$

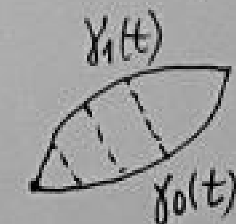
$\Gamma(1,t)=\gamma_1(t)$ — // —

$\Gamma(s,0)=a$ для всех $s\in[0,1]$

$\Gamma(s,1)=b$ — // —

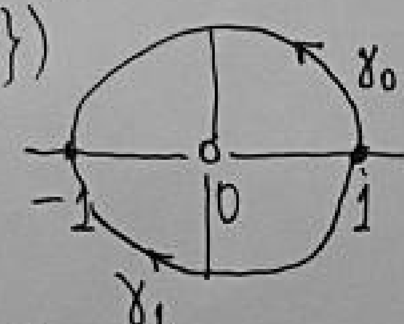


<u>Примеры</u>: 1) Любая выпуклая область односвязна ($\Gamma(s,t)=(1-s)\gamma_0(t)+s\gamma_1(t)$)



2) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (и любое кольцо $\{r<|z-a|<R\}$) неодносвязно: рез-ты продолжения (U_0,f_0) вдоль γ_0 и γ_1 разные

$U_0=\{|z-1|<1\}$, $f_0(z)=\ln|z|+i\arg z$,
$-\pi/2<\arg z<\pi/2$



② <u>Теорема о монодромии.</u>

I. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — односв. обл. и кан. эл-т $F=(U,f)$ с центром $a\in D$ допускает АП вдоль $\forall$ непр. пути $\gamma:[0,1]\to D$ [экв-но: $\forall$ ломаной $\gamma:[0,1]\to D$] с $\gamma(0)=a$. Тогда $\exists\,\Phi\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $\Phi=f$ в нек-рой окр-сти точки a (а именно, на связной компоненте мн-ва $U\cap D$, содержащей точку a).

II. Всякая АФ $\mathcal{F}$ на односвязной области D однозначна (т.е. $\mathcal{F}=\mathcal{F}_f$ для некот. $f\in\mathcal{O}(D)$).

III. Если $\mathcal{F}$ — АФ в обл. D и $D_1\subset D$ — односв. подобласть, то $\mathcal{F}|_{D_1}$ состоит из голом-ных в D_1 ф-ций в количестве, равном числу листов $\mathcal{F}$ в D.

<u>Д-во.</u> I. Рез-ты АП эл-та F вдоль всех путей в D образуют АФ $\mathcal{F}$ в D с числом листов 1 (по теореме о продолжении вдоль гомотопных путей). Сл-но, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\Phi$ для некот. $\Phi\in\mathcal{O}(D)$. Кан. эл-т Φ в точке a равен $F=(U,f)\Rightarrow\Phi=f$ в окр. точки a.

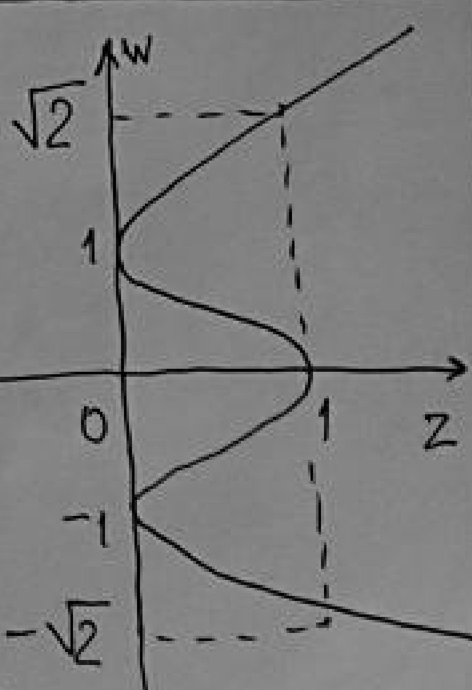
II. Как в I.

III. Все АФ, входящие в $\mathcal{F}|_{D_1}$, однозначны по п. II. Их число = числу эл-тов $\mathcal{F}$ с центром a, т.е. числу листов $\mathcal{F}$ в D. □

③ <u>Понятие ветви АФ в подобласти $D_1\subset D$.</u>

Ф-ция $f\in\mathcal{O}(D_1)$ наз. <u>ветвью</u> АФ $\mathcal{F}$ в обл. D_1, <u>если</u> $\mathcal{F}_f\in\mathcal{F}|_{D_1}$.

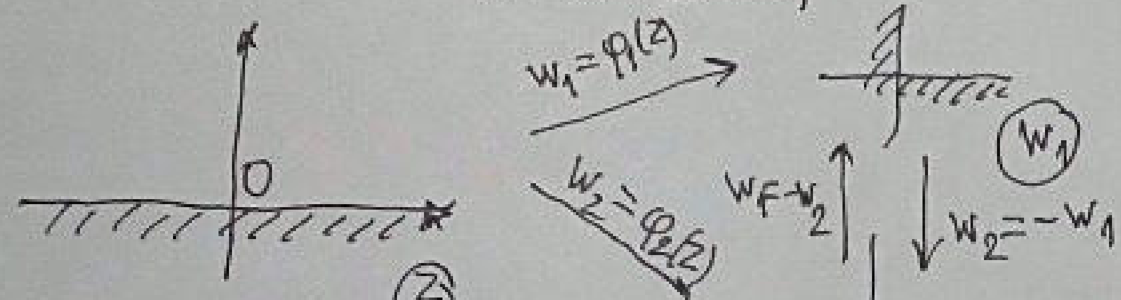
$\mathcal{F}(z)=\sqrt{1+\sqrt{z}}$ допускает выделение ветви на $D_1=\{0<|z-1|<1\}$, но не распадается на ветви на D_1

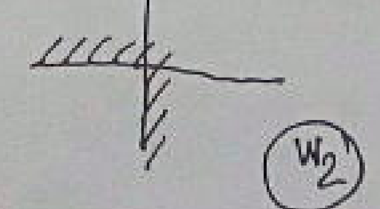


Пример: Две ветви $\sqrt{z}$ на $D_1 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$

$\uparrow$

АФ на $\mathbb{C}\setminus\{0\} = D$





$\varphi_1(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{2}}$, $0 < \arg z < \pi$

$\varphi_2(z) =$ —//—, $2\pi < \arg z < 3\pi$

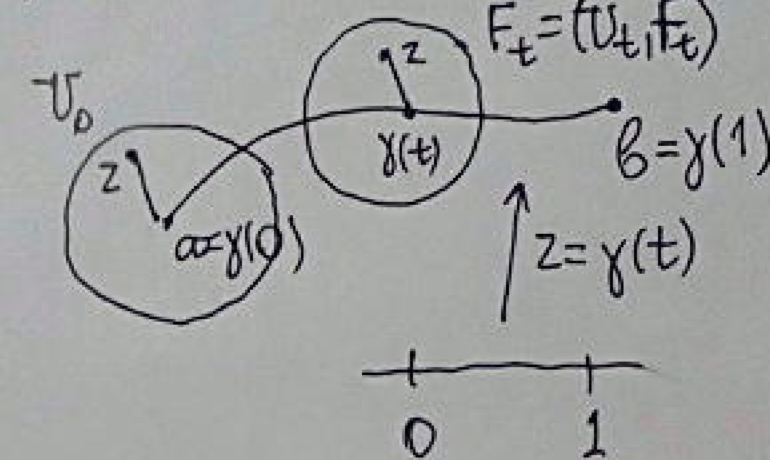
4) Лемма о корнях, логарифмах и первообразных в односвязной области

1) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односв. область, $f \in \mathcal{O}(D)$ и $f(D) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, т.е. $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда $\exists\, g, h \in \mathcal{O}(D)$ т.ч. $f = g^2$ в D и $f = e^h$ в D.

2) Если $D \subset \mathbb{C}$ – односв. область и $f \in \mathcal{O}(D)$, то $\exists\, F \in \mathcal{O}(D)$ т.ч. $F' = f$ в D.

Д-во. 1) Раз $f(D) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, то определены композиции $\sqrt{f}$ и $\ln f$ как одна или несколько АФ на D. Все они однозначны по теореме о монодромии II. Обозначим любую из них через g (для $\sqrt{f}$) или h (для $\ln f$), получим искомое.

2) Элемент (U_0, F_0), где $F_0(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$, допускает АП вдоль $\forall$ ломаной $\gamma: [0,1] \to D$ по ф-ле



$$F_t(z) := \int_{\gamma([0,t])} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

По замечанию к теореме о продолжении вдоль гомотопных путей, эл-т (U_0, F_0) допускает АП вдоль $\forall$ непр. пути $\gamma: [0,1] \to D$ с $\gamma(0) = a$. Соотв-щая АФ $\mathcal{F}$ в D однозначна по теор-е о монодромии. Обозначим её $\Phi \in \mathcal{O}(D)$. Тогда $\Phi' = f$ в окр-сти точки a (по теор. о монодр. I) и, сл-но, всюду в D (по теор. ед-сти). $\square$

5. Теорема Римана о конформном отобр-нии

Для любой односвязной области $D\subset\mathbb{C}$, отличной от всей $\mathbb{C}$, $\exists$ конф. отобр-е $f: D\to U$ этой области на ед. круг $U=\{|w|<1\}$.

Замеч.1. Фактически достат-но, чтобы $\forall f\in\mathcal{O}(D)$ с $f(D)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists g\in\mathcal{O}(D)$ с $g^2=f$ в D.

Замеч.2. Всю плоскость $\mathbb{C}$ нельзя конф-но отобразить на U (по теор. Лиувилля).

$f(z_1)\ne f(z_2)$ при $z_1\ne z_2$

6. Начало д-ва теор. Римана

Покажем, что $\exists$ однолистная $f\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $f(D)\subset U$ (тогда по окончат. формул-ке теоремы об обр. ф-ции f конф-но отобр-ет D на $f(D)$).

Раз $D\ne\mathbb{C}$, то $\exists a\in\mathbb{C}\setminus D$.

Но $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ неодносвязна (п. 1) [н. не обладает св-вом из Замеч.1 п. 5, т.к. $z-a\ne g^2(z)$ на $\mathbb{C}\setminus\{a\}$)

поэтому $\exists b\in\mathbb{C}\setminus(D\cup\{a\})$.

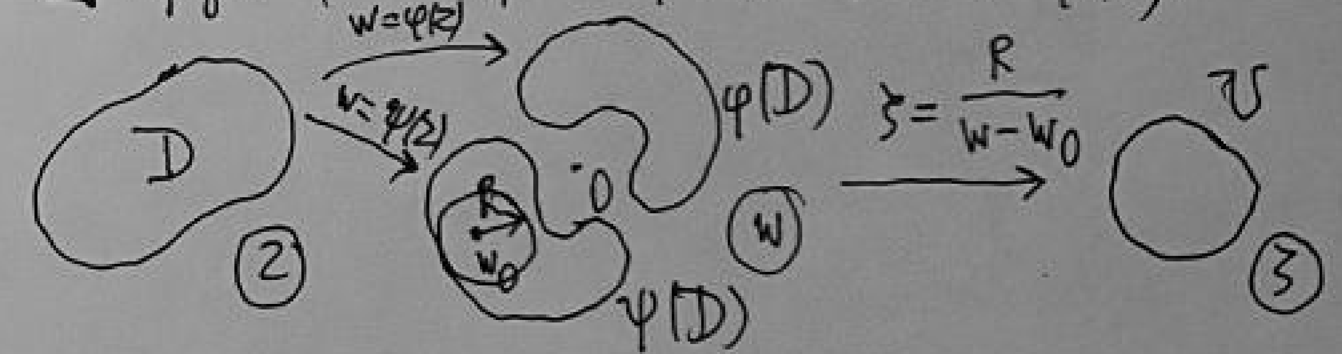
Тогда $f_0(z)=\dfrac{z-a}{z-b}$ голом-на в D и $f_0(D)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Сл-но, $\exists\varphi\in\mathcal{O}(D)$ т.ч. $f=\varphi^2$ в D (см. п. 4 или Замеч.1 п. 5)

Ф-ции φ, $-\varphi\in\mathcal{O}(D)$ однолистны, т.к. из $\cancel{\varphi(z_1)}$ $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ вытекает $\varphi(z_1)^2=\varphi(z_2)^2$, т.е. $\dfrac{z_1-a}{z_1-b}=\dfrac{z_2-a}{z_2-b}$, т.е. $z_1=z_2$. Более того, из $\varphi(z_1)=-\varphi(z_2)$ вытекает аналогично $z_1=z_2$, т.е. $\varphi(D)\cap\psi(D)=\varnothing$, где $\psi:=-\varphi$.

(но тогда $\varphi(z_1)=-\varphi(z_1)=0$: противоречие)

По пр. сохр. обл. мн-во $\psi(D)$ открыто, т.е. $\exists$ круг $|w-w_0|<R$, лежащий в $\psi(D)$.



$\psi(z)=-\varphi(z)$

Тогда $\zeta=\dfrac{R}{\varphi(z)-w_0}$ есть однолистная ф-ция в D и её образ $\subset U$ (как композиция φ и ДЛО), т.е. $\zeta=f(z)$ — искомая ф-ция. □