

Оглавление

1. Лекция 1. Решение задачи Дирихле (ЗД) для гармонических функций (ГрФ) в круге.	2
2. Лекция 2. Логарифмические вычеты. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Однолистные функции.	6
3. Лекция 3. Критерии локальной однолистности и обратимости. Обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии. Теорема Гурвица о нулях и теорема о сходящейся последовательности однолистных функций.	11
4. Лекция 4. Теорема Монтеля о предкомпактности. Теорема Римана о конформном изоморфизме.	16
5. Лекция 5. Принцип соответствия границ (теорема Каратеодори, частный случай).	21
6. Лекция 6. Следствия из теорем Римана и Каратеодори. Специальные области. Гомотопии кривых. Односвязность.	26
7. Лекция 7. Аналитическое продолжение по Вейерштрассу. Единственность аналитического продолжения вдоль пути.	30
8. Лекция 8. Единственность аналитического продолжения вдоль пути. АП по «близким» путям. Теорема о монодромии. АП первообразного элемента.	34
9. Лекция 9. Следствия. Полная аналитическая функция. Точки ветвления многозначных ветвей ПАФ.	38
10. Лекция 10. Примеры полного описания ПАФ. АП сложного элемента.	42
11. Лекция 11. Модулярная функция и малые теоремы Пикара.	47
12. Лекция 12. ПАФ $\text{Arcsin}(z)$. Вычисление интегралов типа B -функций.	51
13. Лекция 13. Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах. Понятие римановой поверхности ПАФ.	55

1. Лекция 1. Решение задачи Дирихле (ЗД) для гармонических функций (ГрФ) в круге.

Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Введем обозначение $B_r = B(0, r)$, $r > 0$.

ТЕОРЕМА 1.1. [О разложении ГрФ в круге в ряд по однородным гармоническим полиномам]. При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в \overline{B}_R функция h представляется в следующем виде (ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на \overline{B}_R):

$$h(re^{i\varphi}) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1.1)$$

где коэффициенты ряда (1.1) находятся единственным образом:

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}; \quad (1.2)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме из прошлой лекции существует единственная функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ с условием $Re f = h$, $f(0) = h(0)$. Разложим f в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$ (он сходится внутри $B_{R+\varepsilon}$ абсолютно и равномерно):

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $c_0 = a_0$ (все a_n и b_n вещественны). При любом $r \in (0, R + \varepsilon)$, подставляя в последнее разложение $z = re^{i\varphi}$, находим:

$$f(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Теперь приравняем в последнем разложении вещественные части:

$$h(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)).$$

Все указанные разложения сходятся абсолютно и равномерно на \overline{B}_R . Таким образом, установили (1.1) при $A_0 = 2a_0$, $A_n = a_n$, $B_n = -b_n$.

Пусть теперь есть *какое-то* разложение (1.1). При $z = Re^{i\varphi}$ имеем:

$$h(Re^{i\varphi}) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)).$$

Слева здесь стоит 2π -периодическая функция (аргумента φ) класса C^∞ , а справа – тригонометрический ряд, который должен совпадать с рядом Фурье этой функции: $A_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) d\theta$,

$$A_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad B_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\},$$

откуда получаем (1.2) и (1.3). \square

Замечание. Всякая вещественная линейная комбинация $\text{ГрФ } \text{Re}((x + i \cdot y)^n) = \text{Re}(z^n) = r^n \cos n\varphi$ и $\text{Им}((x + i \cdot y)^n) = \text{Им}(z^n) = r^n \sin n\varphi$ называется *однородным гармоническим полиномом порядка (степени) n* (по переменным x, y).

СЛЕДСТВИЕ 1.1.1. В обозначениях предыдущей теоремы и ее доказательства при $r \in (0, R)$ справедлива оценка:

$$\|f\|_{\overline{B}_r} \leq \frac{R + 2r}{R - r} \|h\|_{\overline{B}_R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M = \|h\|_{\overline{B}_R} = \|h\|_{\partial \overline{B}_R}$ (по принципу максимума). Из формул (1.2) и (1.3) имеем:

$$|a_0| = \frac{|A_0|}{2} \leq M, \quad |a_n| \leq \frac{2M}{R^n}, \quad |b_n| \leq \frac{2M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$|c_n| = |a_n + ib_n| \leq \frac{2\sqrt{2}M}{R^n} < \frac{3M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при всех $r < R$ получаем:

$$|f(re^{i\theta})| \leq M \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \frac{r^n}{R^n}\right) \leq M \left(1 + 3 \frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}}\right) = M \frac{R + 2r}{R - r}.$$

\square

СЛЕДСТВИЕ 1.1.2. [Аналог теоремы Вейерштрасса для ГрФ]. Пусть D – область в \mathbb{C} , $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}(D)$, $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} h$. Тогда $h \in \mathcal{H}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $a \in D$ и $R > 0$ такое, что $B(a, R) \subset D$, и пусть $r \in (0, R)$. Достаточно установить, что $h \in \mathcal{H}(B(a, r))$.

По условию, $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\overline{B(a, R)}} h$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем $f_n \in \mathcal{A}(B(a, R))$ с условиями $\text{Re}(f_n) = h_n$, $f_n(a) = h_n(a)$. По следствию 1.1.1, для всех n и n' из \mathbb{N} справедлива оценка:

$$\|f_n - f_{n'}\|_{\overline{B(a, r)}} \leq \frac{R + 2r}{R - r} \|h_n - h_{n'}\|_{\overline{B(a, R)}}.$$

Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по равномерной норме на $\overline{B(a, r)}$, откуда следует, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$ (по теореме Вейерштрасса для голоморфных функций). Откуда $h = \text{Re}(f) \in \mathcal{H}(D)$. \square

Метод Фурье и формула Пуассона для решения ЗД в круге.

ТЕОРЕМА 1.2. [Метод Фурье для решения ЗД в круге]. В круге $B_R = B(0, R)$ всякая ЗД разрешима, т.е. $\forall h_0 \in C(\partial B_R)$ найдется $h \in \mathcal{H}(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ с условием $h|_{\partial B_R} = h_0$. Функция h при $z = re^{i\varphi}$ задается по формулам:

$$h(z) = \begin{cases} h_0(Re^{i\varphi}), & \text{если } r = R, \\ A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), & \text{если } r < R, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}, \quad (1.5)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H_0(\varphi) = h_0(Re^{i\varphi})$, тогда $H_0 \in C([-\pi, \pi])$ и $H_0(-\pi) = H_0(\pi)$. Рассмотрим сначала случай, когда $H_0 \in C^2([-\pi, \pi])$ и $H_0(-\pi) = H_0(\pi)$, $H_0'(-\pi) = H_0'(\pi)$. В этих условиях, дважды интегрируя по частям, при $n \geq 1$ получаем:

$$|A_n| = \frac{1}{\pi R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\pi n^2 R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0''(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right|,$$

$$|B_n| = \frac{1}{\pi R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\pi n^2 R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0''(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right|,$$

откуда $|A_n| + |B_n| \leq M_0/(n^2 R^n)$, где

$$M_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0''(\theta)| d\theta.$$

Таким образом, ряд $h(re^{i\varphi}) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$ сходится абсолютно и равномерно на \bar{B}_R по признаку Вейерштрасса (с мажорирующим рядом $|A_0|/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_0/n^2$). То, что $h(Re^{i\varphi}) = H_0(\varphi) = h_0(Re^{i\varphi})$ вытекает из равенства Парсеваля (базисности тригонометрической системы в $L^2([-\pi, \pi])$). Следовательно, функция $h(z)$ является решением нужной ЗД.

ЛЕММА 1.1. Пусть $H_0 \in C([-\pi, \pi])$ – произвольная вещественная функция с условием $H_0(-\pi) = H_0(\pi)$. Найдется последовательность $\{H_{0m}\}_{m=1}^{+\infty}$ вещественных функций $H_{0m} \in C^2([-\pi, \pi])$, $H_{0m}(-\pi) = H_{0m}(\pi)$, $H_{0m}'(-\pi) = H_{0m}'(\pi)$, такая, что $H_{0m} \rightrightarrows H_0$ на $[-\pi, \pi]$ при $m \rightarrow +\infty$.

План доказательства этой леммы таков. Пусть $\psi(t) = I^{-1}(1-t^2)^3$ на $[-1, 1]$ и $\psi(t) = 0$ вне $[-1, 1]$, где $I = \int_{[-1, 1]} (1-t^2)^3 dt$. Легко установить, что $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$. Продолжим H_0 до 2π -периодической функции с отрезка $[-\pi, \pi]$ на \mathbb{R} . В качестве искомым функций H_{0m} можно взять

$$H_{0m}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} m\psi(m(\varphi-t))H_0(t)dt = \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} m\psi(m(\varphi-t))H_0(t)dt, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Действительно, возможность двойного дифференцирования предпоследнего интеграла по параметру φ очевидна. А из равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} m\psi(m(\varphi-t))dt \equiv 1$ для всех φ получаем оценку $|H_{0m}(\varphi) - H_0(\varphi)| \leq \omega_{\mathbb{R}}(H_0, 1/m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Завершим доказательство теоремы 1.2. Пусть в обозначениях последней леммы $h_{0m}(Re^{i\varphi}) = H_{0m}(\varphi)$. По доказанному выше, существуют h_m – решения ЗД для h_{0m} . По принципу минимума-максимума в \bar{B}_R имеем $\forall m, m' \in \mathbb{N}$:

$$\|h_m - h_{m'}\|_{\bar{B}_R} \leq \|h_{0m} - h_{0m'}\|_{\partial\bar{B}_R}.$$

Следовательно, $h_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\overline{B}_R} h$, причем $h \in C(\overline{B}_R) \cap \mathcal{H}(B_R)$, $h|_{\partial B_R} = h_0$, так что h – искомое решение ЗД. Остается установить, что оно задается по формулам (1.4)-(1.6) при $r < R$. Здесь надо воспользоваться теоремой 1.1 для найденной h в кругах $B_{R(1-1/p)}$ ($p \in \{2, 3, \dots\}$) и устремить $p \rightarrow +\infty$. \square

ТЕОРЕМА 1.3. [Формула Пуассона для решения ЗД в круге $B_R = B(0, R)$].
Решение ЗД в B_R с граничной функцией $h_0 \in C(\partial B_R)$ имеет вид (при $z = re^{i\varphi}$):

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z), & \text{если } r = R, \\ \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{(R^2 - |z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|, & \text{если } r < R. \end{cases}$$

При этом вторую часть предыдущей формулы можно преобразовать:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{(R^2 - |z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h_0(Re^{i\theta})}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\theta,$$

где последнее равенство получено применением формулы $|d\zeta| = R d\theta$ и теоремы косинусов в треугольнике с вершинами 0 , $\zeta = Re^{i\theta}$ и $z = re^{i\varphi}$.

Функция $P(z, \zeta) = (2\pi R)^{-1}(R^2 - |z|^2)/|\zeta - z|^2$ – ядро Пуассона для круга B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (1.5) и (1.6) в (1.4) при произвольном фиксированном $r \in (0, R)$ (см. обозначения теоремы 1.2; перестановка сумм и интегралов правомерна ввиду равномерной сходимости возникающих рядов):

$$\begin{aligned} h(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \sin(n\theta) \sin(n\varphi)) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + Re \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + Re \left(\frac{z}{\zeta - z}\right) \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) Re \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \frac{Re \left((\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) \right)}{|\zeta - z|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} R d\theta. \end{aligned}$$

\square

СЛЕДСТВИЕ 1.3.1. Из метода конформных отображений (а также теорем Римана и Каратеодори, излагаемых далее) и предыдущей теоремы вытекает разрешимость всякой ЗД в любой жордановой области.

Отметим, что при применении формулы Пуассона можно пользоваться функцией Шварца $S(\zeta) = R^2/\zeta$ круга B_R и методом вычетов, поскольку при $z \in B_R$, $\zeta = Re^{i\theta} \in \partial B_R$ имеем $|d\zeta| = R d\theta = Rd\zeta/(i\zeta)$, $|\zeta - z|^2 = (\zeta - z)(R^2/\zeta - \bar{z})$.

2. Лекция 2. Логарифмические вычеты. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Однолистные функции.

Теорема о логарифмических вычетах.

Через $\mathcal{A}(G)$ обозначается пространство всех голоморфных функций на открытом множестве G в \mathbb{C} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$ и $f \neq 0$ в $B'(a, \delta)$. Тогда определен

$$L\text{res}_a(f) := \text{res}_a \left(\frac{f'}{f} \right)$$

– логарифмический вычет функции f в точке a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (1) Если $f \in \mathcal{A}(B(a, \delta))$ и a – нуль функции f порядка n ($n \in \{0, 1, \dots\}$), то

$$L\text{res}_a(f) = n.$$

(2) Если $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$ и a – полюс функции f порядка $p \geq 1$, то

$$L\text{res}_a(f) = -p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (1). По теореме о нулях найдется $\delta_1 \in (0, \delta)$ и такая функция $g \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1))$, $g(z) \neq 0$ в $B(a, \delta_1)$, что $f(z) = (z - a)^n g(z)$ в $B(a, \delta_1)$. Тогда

$$L\text{res}_a(f) = \text{res}_a \left(\frac{n(z - a)^{n-1} g(z) + (z - a)^n g'(z)}{(z - a)^n g(z)} \right) = \text{res}_a \left(\frac{n}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) = n,$$

поскольку

$$\frac{g'(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1)).$$

Свойство (2) доказывается аналогично. □

ТЕОРЕМА 2.1. [О логарифмических вычетах]. Пусть D – допустимая область в \mathbb{C} , U – окрестность \bar{D} , $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_J\} \subset D$, $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_M\} \subset D$. Пусть $f \in \mathcal{A}(U \setminus \mathfrak{B})$, b_m – полюс функции f порядка $p_m \geq 1$ ($m \in \{1, \dots, M\}$); a_j – нуль функции f порядка $n_j \geq 1$ ($j \in \{1, \dots, J\}$), причем $f(z) \neq 0$ при $z \in U \setminus \mathfrak{A}$.

Положим

$$N_D(f) = \sum_{j=1}^J n_j, \quad P_D(f) = \sum_{m=1}^M p_m.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_D(f) - P_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить теорему Коши о вычетах к функции $f'(z)/f(z)$ в области D (формально только для простых областей), используя результат предложения 2.1. □

Принцип аргумента и теорема Руше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta])$, $f \in C([\gamma])$, $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим путь $w = \sigma(t) = f(\gamma(t))|_{[\alpha, \beta]}$.

Величина $\Delta_\gamma \text{Arg}(f) := \Delta_\sigma \text{Arg}(w)$ называется *приращением (полярного) аргумента функции f вдоль пути γ* .

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. В условиях предыдущего определения доказать, что если $\gamma_0 \simeq \gamma$, то $\Delta_{\gamma_0} \text{Arg}(f) = \Delta_\gamma \text{Arg}(f)$.

Следовательно, корректно определена величина $\Delta_{\{\gamma\}} \text{Arg}(f)$, где $\{\gamma\}$ – непрерывная кривая, определяемая путем γ . Если при этом $\{\gamma\} = \{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}$ (конец γ_1 совпадает с началом γ_2), то $\Delta_{\{\gamma\}} \text{Arg}(f) = \Delta_{\{\gamma_1\}} \text{Arg}(f) + \Delta_{\{\gamma_2\}} \text{Arg}(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если определены $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_1)$, $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_2)$, то определено $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_1 \cdot f_2) = \Delta_\gamma \text{Arg}(f_1) + \Delta_\gamma \text{Arg}(f_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ ветви аргументов для путей $w_1(t) = f_1(\gamma(t))$ и $w_2(t) = f_2(\gamma(t))$, то $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ ветвь аргумента для пути $w(t) = f_1(\gamma(t)) \cdot f_2(\gamma(t))$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть Γ – спрямляемая замкнутая кривая в \mathbb{C} , U – некоторая окрестность $[\Gamma]$. Пусть $f \in \mathcal{A}(U)$, $f(z) \neq 0$ на $[\Gamma]$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – представитель Γ и $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Найдем натуральное N такое, что разбиение $\{\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на N равных частей обладает следующим свойством: для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$ путь $\sigma_n := \sigma|_{[\alpha_{n-1}, \alpha_n]}$ удовлетворяет условию $[\sigma_n] \subset V_n$, где выбор $V_n = \mathbb{C}_-$ или $V_n = \mathbb{C}_+$ фиксируем (это можно сделать в силу равномерной непрерывности σ на $[\alpha, \beta]$). Далее, в силу непрерывности f в U , для каждого рассматриваемого n найдется окрестность $U_n \subset U$ компакта $[\gamma_n]$ ($\gamma_n = \gamma|_{[\alpha_{n-1}, \alpha_n]}$, $\sigma_n = f(\gamma_n)$) такая, что $f(U_n) \subset V_n$.

Положим

$$\ln_{(n)}(f(z)) = \ln|f(z)| + i \arg_{(n)}(f(z)) = \begin{cases} \ln_{(0, 2\pi)}(f(z)), & z \in U_n, V_n = \mathbb{C}_+, \\ \ln_{(-\pi, \pi)}(f(z)), & z \in U_n, V_n = \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Тогда $\ln_{(n)} f(z) \in \mathcal{A}(U_n)$ и мы получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\gamma_n} \left(\ln_{(n)}(f(z)) \right)' dz = \ln_{(n)}(f(z)) \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} = \ln|f(z)| \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} + \\ &+ i \arg_{(n)}(f(z)) \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} = \ln|f(z)| \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} + i \Delta_{\gamma_n} \text{Arg}(f). \end{aligned}$$

Суммируя по $n = 1, \dots, N$ и деля обе части на $2\pi i$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg}(f),$$

так как в силу замкнутости пути γ слагаемые $\ln|f(z)| \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)}$ взаимно уничтожаются. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть D – допустимая область порядка $S \geq 1$ ($\partial^+ D = \Gamma_1^+$ при $S = 1$, $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^- \cup \dots \cup \Gamma_S^-$ при $S \geq 2$ как раньше). При $S \geq 2$ положим по определению $\Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f) := \Delta_{\Gamma_1^+} \text{Arg}(f) + \sum_{s=2}^S \Delta_{\Gamma_s^-} \text{Arg}(f)$, если все слагаемые в последней сумме определены.

ТЕОРЕМА 2.2. [Принцип аргумента]. В условиях теоремы 2.1 и в обозначениях определения 2.3 верно следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f) = N_D(f) - P_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 2.1 и предложений 2.1 и 2.3. \square

Замечание. Принцип аргумента справедлив в более общем случае: когда D ограничена конечным числом попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых (не обязательно спрямляемых), $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{B})$ (\mathfrak{B} – конечное множество полюсов функции f в D), f непрерывна в $\overline{D} \setminus \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset D$ – конечное множество нулей функции f в \overline{D} .

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Доказать принцип аргумента в предыдущей (усиленной) формулировке для простейших областей (* без условия спрямляемости границы). *Указание.* Рассмотреть последовательность $f_n = f\left(\frac{n}{n+1}z\right)$ (и области, ограниченные вписанными ломаными).

ТЕОРЕМА 2.3. [Теорема Руше]. Пусть D – допустимая область в \mathbb{C} , U – некоторая окрестность \overline{D} ; $f, g \in \mathcal{A}(U)$, причем

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \partial D. \quad (2.1)$$

Тогда

$$N_D(f+g) = N_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.2,

$$\begin{aligned} N_D(f+g) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f+g) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f \cdot (1+g/f)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(1+g/f) = N_D(f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(1+g/f). \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f)$ и $\Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(1+g/f)$ определены, поскольку f и $(1+g/f)$ не обращаются в ноль на ∂D в силу (2.1).

В обозначениях определения 2.3 остается показать, что

$$\Delta_{\Gamma_s^+} \text{Arg}(1+g/f) = 0, \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}.$$

Пусть γ_s^+ – представитель Γ_s^+ , с параметром $t \in [\alpha_s, \beta_s]$, $\sigma_s^+ = (1+g/f) \circ \gamma_s^+$. Тогда, по определению,

$$\Delta_{\Gamma_s^+} \text{Arg}(1+g/f) = \Delta_{\sigma_s^+} \text{Arg}(w).$$

Поскольку $\gamma_s^+(t) \in \partial D$, а $|g/f| < 1$ на ∂D по условию, мы видим, что $[\sigma_s^+]$ лежит в правой полуплоскости. Поэтому, в качестве непрерывной ветви (полярного) аргумента вдоль σ_s^+ можно взять $\arg(\sigma_s^+(t))$ на $[\alpha_s, \beta_s]$. Но тогда $\Delta_{\sigma_s^+} \text{Arg}(w) = \arg(\sigma_s^+(\beta_s)) - \arg(\sigma_s^+(\alpha_s)) = 0$ ввиду замкнутости Γ_s^+ . Теорема доказана. \square

Замечание. Утверждение теоремы Руше верно для любой области D , ограниченной конечным числом попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых, и для любых $f, g \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$ с условием $|g| < |f|$ на ∂D .

ПРИМЕР 2.1. Пусть $p(z) = z^7 + 5z + 1$, $D_1 = \{|z| < 1\}$, $D_2 = \{|z| < 2\}$. Найти $N_{D_1}(p)$ и $N_{D_2}(p)$.

1) имеем $\partial D_1 = \{|z| = 1\}$; положим $f_1(z) = 5z$, $g_1(z) = z^7 + 1$, тогда $|g_1(z)| \leq 2 < 5 = |f_1(z)|$ на ∂D_1 ; следовательно, $N_{D_1}(p) = N_{D_1}(f_1) = 1$.

2) здесь $\partial D_2 = \{|z| = 2\}$; возьмем $f_2(z) = z^7$, $g_2(z) = 5z + 1$, тогда $|g_2(z)| \leq 11 < 2^7 = |f_2(z)|$ на ∂D_2 ; поэтому $N_{D_2}(p) = N_{D_2}(f_2) = 7$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Дано дифференциальное уравнение: $y''' + py'' + qy' + 12y = 0$. Для всех вещественных пар (p, q) исследовать решение $y(t) \equiv 0$ на асимптотическую устойчивость.

Указание 1: Если многочлен $p(z) = z^3 + pz^2 + qz + 12$ имеет (разные) корни z_1, z_2, z_3 в \mathbb{C} , то общее решение нашего уравнения имеет вид $C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + C_3 e^{z_3 t}$ (случай кратных корней рассмотреть отдельно). Во всех случаях нужно искать пары (p, q) , при которых все три корня многочлена лежат в левой полуплоскости.

Указание 2: Применить принцип аргумента для многочлена p в области $D = B(0, R) \cap \{Re(z) < 0\}$, $R \gg 1$.

На теорему Руше опирается следующая важная в приложениях теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. [Принцип сохранения области]. Пусть D – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \not\equiv const$. Тогда $\Omega = f(D)$ – область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связность Ω очевидна – любые две точки в Ω можно соединить образом кривой, соединяющей соответствующие точки в D . Докажем открытость Ω .

Фиксируем $w_0 \in \Omega$, тогда $f(z_0) = w_0$ для некоторой точки $z_0 \in D$. Положим $f_1(z) = f(z) - w_0$, $f_1 \not\equiv const$ в D . Так как z_0 – изолированный нуль f_1 , найдется $\delta > 0$, для которого круг $B = B(z_0, \delta)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\bar{B} \subset D$,
- 2) $\varepsilon = \min_{z \in \partial B} |f_1(z)| > 0$.

Докажем, что $B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$, т.е. для каждого $w \in B(w_0, \varepsilon)$ функция

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f_1(z) + (w_0 - w)$$

имеет хотя бы один нуль в D . Но последнее сразу следует из теоремы Руше в B , которую можно применить (проверить это) к функциям f_1 и $g_1 = (w_0 - w)$. А именно (поскольку z_0 – нуль функции f_1 в B):

$$N_B(f_1 + (w_0 - w)) = N_B(f_1) \geq 1.$$

□

Однолистные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть D – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$, f инъективна в D . Тогда f называется *однолистной* в D .

ЛЕММА 2.1. Если f однолистка в области $D \subset \mathbb{C}$, то f – гомеоморфизм D на $f(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Биективность следует из определения однолистности; прообраз всякого открытого множества открыт, поскольку $f \in \mathcal{A}(D) \subset C(D)$; образ всякого открытого множества открыт по теореме 2.4. □

ЛЕММА 2.2. Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ в D . Тогда многозначная функция $Ln(f(z))$ имеет голоморфную в D ветвь $h(z)$, т.е. найдется $h \in \mathcal{A}(D)$ с условием $e^{h(z)} \equiv f(z)$ в D . Кроме того, для каждого натурального $n \geq 2$ существует голоморфная в D ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$, в качестве которой можно взять функцию $e^{h(z)/n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f'(z)/f(z) \in \mathcal{A}(D)$. По теореме о первообразной в односвязной области, найдется функция $g \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $g'(z) = f'(z)/f(z)$ в D . Зафиксируем $a \in D$ и положим $h = g - g(a) + \ell_a$, где $\ell_a \in Ln(f(a))$ также фиксируется.

Множество E точек из D , в которых $h(z) \in Ln(f(z))$, открыто и замкнуто в D (проверить!), а также непусто (поскольку $h(a) \in Ln(f(a))$). Следовательно, E совпадает с D . \square

ЛЕММА 2.3. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(a)$ (т.е. найдется $r > 0$ такое, что $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$). Пусть $f'(a) = 0$. Тогда f не может быть однолистной ни в какой (открытой) окрестности точки a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(z) - f(a)$ имеет в точке a нуль бесконечного порядка, то $f(z) \equiv f(a)$ в некоторой окрестности точки a , и значит f не инъективна ни в какой окрестности.

Пусть теперь a – нуль конечного порядка p для $f(z) - f(a)$. Ясно, что $p \geq 2$. По теореме о нулях найдется $g \in \mathcal{A}(B(a, r))$ с условием

$$f(z) - f(a) = (z - a)^p g(z), \quad g(a) = w_0 \neq 0.$$

Пусть $\delta \in (0, r)$ таково, что $g(z) \neq 0$ в $B = B(a, \delta)$. По лемме 2.2 существует голоморфная ветвь $g_1(z)$ многозначной функции $\sqrt[p]{g(z)}$ в B . Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = (z - a)g_1(z) \in \mathcal{A}(B), \quad f_1(a) = 0, \quad f_1'(a) = g_1(a) \neq 0.$$

Так как $f_1 \not\equiv const$ в B , к ней применима теорема 2.4 о сохранении области: вместе с точкой $0 = f_1(a)$ в образе $f_1(B)$ лежит некоторая окрестность нуля $B(0, \varepsilon)$ ($\varepsilon = \varepsilon(\delta)$), а в ней p различных корней p -й степени из некоторого числа $w \neq 0$ ($w_k \in B(0, \varepsilon)$, $w_k^p = w$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$). Наконец, найдутся $z_k \in B$, для которых $f_1(z_k) = w_k$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Поскольку $f(z) = f(a) + (f_1(z))^p$, имеем $f(z_0) = \dots = f(z_{p-1})$. Так как $\delta > 0$ можно взять произвольно малым, f не инъективна ни в какой окрестности точки a . \square

ТЕОРЕМА 2.5. [О конформности однолистных функций]. Пусть f однолистка в области D , тогда f конформна в D (т.е. $f \in \mathcal{A}(D)$, f взаимно однозначна и $f'(z) \neq 0$ в D). Более того, f – конформный изоморфизм D на $f(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1, f является гомеоморфизмом D на $f(D)$. По лемме 2.3, $f'(z) \neq 0$ во всех точках $z \in D$. По теореме об обратной функции, $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ тоже голоморфна и является конформной: $(f^{-1})'(w_0) = 1/(f'(z_0)) \neq 0$ для любой точки $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Пусть D – выпуклая область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$ и $\operatorname{Re}(f'(z)) \geq 0$ всюду в D . Доказать, что f либо однолистка в D , либо постоянна.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Пусть D – строго выпуклая жорданова область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$ и $\operatorname{Re}(f'(z)) > 0$ в D . Тогда f однолистка в D и гомеоморфна на \overline{D} .

**3. Лекция 3. Критерии локальной однолиственности и обратимости.
Обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии.
Теорема Гурвица о нулях и теорема о сходящейся
последовательности однолистных функций.**

Локальная однолиственность и локальная обратимость функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Говорят, что функция f *однолистна в точке* $a \in \mathbb{C}$, если f голоморфна и однолистна в некоторой окрестности этой точки.

ТЕОРЕМА 3.1. *Функция $f \in \mathcal{A}(a)$ однолистна в точке $a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (\Rightarrow) следует из леммы 2.3 от противного.

Докажем (\Leftarrow) . По теореме о бесконечной дифференцируемости голоморфных функций найдется $r > 0$ такое, что $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$ и $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|/2$ для всех $z \in B(a, r)$. Тогда для любых $z_1 \neq z_2$ из $B(a, r)$ по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} (f'(z) - f'(a) + f'(a)) dz,$$

откуда

$$|(f(z_2) - f(z_1)) - f'(a)(z_2 - z_1)| \leq |f'(a)(z_2 - z_1)|/2$$

и, следовательно, $f(z_2) - f(z_1) \neq 0$, что и требовалось. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Функция f называется *локально-однолистной* в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если f однолистна в каждой точке $z \in D$ (т.е. $f \in \mathcal{A}(D)$ и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$).

ПРИМЕР 3.1. Пусть $f(z) = z^3$, $D = \Pi_+$. Тогда f локально-однолистна в D , так как $f'(z) = 3z^2 \neq 0$ в D , но f не однолистна в D , ибо она там не инъективна. Отметим, что при этом f гомеоморфно переводит ∂D на себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(a)$; функция f называется *локально обратимой* в точке a , если найдутся область U_a , содержащая точку a , в которой $f \in \mathcal{A}(U_a)$, и функция $g \in \mathcal{A}(f(U_a))$ такие, что $g(f(z)) = z$ для всех $z \in U_a$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Голоморфная в точке a функция f обратима в этой точке $\Leftrightarrow f$ однолистна в точке a ($\Leftrightarrow f'(a) \neq 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (\Leftarrow) непосредственно следует из теоремы 2.5 (f является конформным изоморфизмом некоторой связной окрестности точки a на ее образ).

Докажем (\Rightarrow) от противного. Пусть f не однолистна в точке a , тогда она не инъективна ни в какой её связной окрестности U_a . Т.е. в любой окрестности U_a точки a найдутся точки z_1 и z_2 с условием $z_1 \neq z_2$, но $f(z_1) = f(z_2)$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{A}(f(U_a))$ имеем $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$, что противоречит условию обратимости f в точке a . \square

Обратный принцип соответствия границ.

ТЕОРЕМА 3.2. [Обратный принцип соответствия границ]. Пусть D – жорданова область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$, $\Gamma^+ = \partial^+ D$. Пусть f инъективно отображает $[\Gamma^+]$ на $f([\Gamma^+])$ ($\Sigma = f([\Gamma^+])$ – тоже замкнутая жорданова кривая). Пусть Ω – жорданова область, ограниченная $[\Sigma]$ (по теореме Жордана). Тогда f конформно (однолистно) отображает D на Ω , причем $\Sigma = \partial^+ \Omega$, т.е. Σ положительно ориентирована относительно Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $b \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma]$. Воспользуемся принципом аргумента (в усиленной форме) в \bar{D} для функции $f(z) - b \neq 0$ на ∂D . Учитывая, что $P_D(f - b) = 0$, имеем:

$$0 \leq N_D(f(z) - b) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma^+} \text{Arg}(f(z) - b) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Sigma - b} \text{Arg}(w) = \text{ind}_{\Sigma}(b) = \begin{cases} \pm 1, & b \in \Omega, \\ 0, & b \notin \Omega. \end{cases}$$

Т.е. для всех $b \in \Omega$ одновременно имеем $\text{ind}_{\Sigma}(b) \geq 0$ и $\text{ind}_{\Sigma}(b) = \pm 1$. Следовательно, $\text{ind}_{\Sigma}(b) = 1$ для всех $b \in \Omega$, т.е. $f(\Gamma^+)$ положительно ориентирована относительно Ω . Из последнего получаем, что для любого $b \in \Omega$ существует единственное $z \in D$ с условием $f(z) = b$. Кроме того, $N_D(f - b) = 0$ для всех $b \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, откуда $f : D \rightarrow \Omega$ - биекция. Остается применить теорему 2.5. \square

Принцип симметрии Римана-Шварца.

ТЕОРЕМА 3.3. [Принцип симметрии]. Пусть γ и Γ - обобщенные окружности в \mathbb{C}^{\sharp} , а γ_1 и Γ_1 - связные открытые непустые дуги в γ и Γ соответственно.

Пусть D_1 и Ω_1 - области в \mathbb{C}^{\sharp} , лежащие по одну сторону от γ и Γ соответственно, причем $\gamma_1 \subset \partial^{\sharp} D_1$, $\Gamma_1 \subset \partial^{\sharp} \Omega_1$ (см. Рис. 3.1).

Обозначим через D_1^* и Ω_1^* области, симметричные D_1 и Ω_1 относительно γ и Γ соответственно. Еще потребуем, чтобы $D = D_1 \sqcup \gamma_1 \sqcup D_1^*$ и $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Gamma_1 \sqcup \Omega_1^*$ являлись областями в \mathbb{C}^{\sharp} .

Пусть f_1 конформно отображает D_1 на Ω_1 и f_1 непрерывна на $D_1 \sqcup \gamma_1$ (в топологии \mathbb{C}^{\sharp}), причем $f_1(\gamma_1) = \Gamma_1$.

Тогда f_1 продолжается (единственным образом) до конформного отображения f области D на область Ω по формуле

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \sqcup \gamma_1, \\ (f_1(z^*))^*, & z \in D_1^*. \end{cases}$$

В последней строчке внутренняя звездочка обозначает симметрию относительно γ , а внешняя - относительно Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Найдем ДЛЮ Λ_1 , отображающее γ на \mathbb{R}^{\sharp} , и ДЛЮ Λ_2 , отображающее Γ на \mathbb{R}^{\sharp} , причем такие, что $\Lambda_1(D_1)$ и $\Lambda_2(\Omega_1)$ лежат в верхней полуплоскости. Пусть каждый из объектов E в формулировке нашей теоремы при действии отображения Λ_1 (или Λ_2) переходит в объект \tilde{E} (например, $\Lambda_1(D_1) = \tilde{D}_1$, $\Lambda_2(\Omega_1) = \tilde{\Omega}_1$).

Определим $\tilde{f}_1(\tilde{z}) = \Lambda_2 \circ f_1 \circ \Lambda_1^{-1}(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \tilde{D}_1 \cup \tilde{\gamma}_1$, для нее выполнены все условия нашей теоремы с заменой прежних объектов на объекты "с волной". Теперь, если \tilde{f} - найденное продолжение \tilde{f}_1 , то $f(z) = \Lambda_2^{-1} \circ \tilde{f} \circ \Lambda_1(z)$ - искомое продолжение f_1 . Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $\gamma = \Gamma = \mathbb{R}^{\sharp}$. Будем считать, что так было изначально, чтобы не перегружать обозначения.

Ниже мы предполагаем, что $\gamma_1 \subset \mathbb{R}$ и $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}$. Оставшийся вариант, когда $\gamma_1 = \mathbb{R}^{\sharp}$ или $\Gamma_2 = \mathbb{R}^{\sharp}$, оставляем читателю.

В рассматриваемой ситуации симметрия относительно $\gamma = \Gamma$ равносильна комплексному сопряжению. Определим

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \sqcup \gamma_1, \\ \overline{f_1(\bar{z})}, & z \in D_1^*. \end{cases}$$

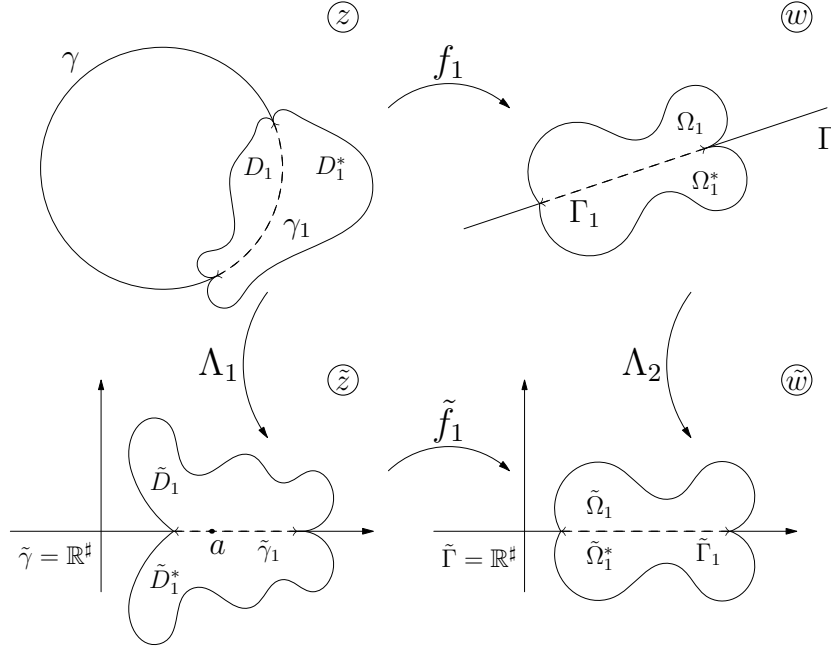


Рис. 3.1.

Если $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ в окрестности точки $z_0 \in D_1$, то $\overline{f_1(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{c_n}(z - \bar{z}_0)^n$ в окрестности точки $\bar{z}_0 \in D_1^*$ (и радиусы сходимости этих рядов равны). Поэтому отображение $f(z)$, определенное выше, голоморфно в $D_1 \sqcup D_1^*$. Кроме того, f непрерывно в D . Поэтому, по теореме Морера $f \in \mathcal{A}(D)$. Наконец, f взаимно-однозначно переводит $D_1 \sqcup D_1^*$ на $\Omega_1 \sqcup \Omega_1^*$. Осталось доказать, что f взаимно-однозначна на γ_1 (тогда конформность f в D будет следовать из однолиственности). Для этого достаточно проверить, что $f'(a) \neq 0$, $\forall a \in \gamma_1$. Напомним, что $f_1|_{\gamma_1} : \gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ есть дифференцируемая функция из интервала $\gamma_1 \subset \mathbb{R}$ в \mathbb{R} .

Предположим, что найдется $a \in \gamma_1$ с условием $f'(a) = 0$. Тогда (как в доказательстве леммы 2.3) найдется натуральное $p \geq 2$ с условием $f(z) - f(a) = (g(z))^p$ для некоторой функции $g \in \mathcal{A}(a)$ такой, что $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. Следовательно, функция $g(z)$ однолистно переводит некоторую окрестность точки a на некоторую окрестность нуля. При этом углы (между гладкими кривыми) в точке a при конформном отображении g сохраняются, а при возведении в степень $p \geq 2$ (углы в точке 0) увеличиваются в p раз. В итоге, при отображении f угол величины π с вершиной в точке a переходит в некоторый угол величины не менее 2π (с вершиной $f(a)$), и мы получаем противоречие с тем, что все точки из $D_1 \subset \Pi_+$ переходят в $\Omega_1 \subset \Pi_+$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Функция f называется *мероморфной* в области $D \subseteq \mathbb{C}^\sharp$, если f не имеет в D других особых точек, кроме полюсов.

Поле всех мероморфных в области D функций обозначается через $\mathcal{M}(D)$.

Доказательство следующей теоремы оставляем в качестве упражнения.

ТЕОРЕМА 3.4. [Принцип симметрии для мероморфных функций]. Пусть $\gamma, \gamma_1, D_1, D_1^*, D$ — такие, как в предыдущей теореме. Пусть $f_1 \in \mathcal{M}(D_1)$ непрерывна на $D_1 \sqcup \gamma_1$ в топологии \mathbb{C}^\sharp . Если $f_1(\gamma_1)$ лежит на некоторой обобщенной окружности в \mathbb{C}^\sharp , то f_1 продолжается до функции $f \in \mathcal{M}(D)$ по той же формуле, как и в предыдущей теореме.

Теорема Гурвица о нулях и теорема о сходящейся последовательности однолистных функций.

ТЕОРЕМА 3.5. [Теорема Гурвица о нулях.] Пусть D – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(D)$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} f$. Пусть $a \in D$ – нуль функции f порядка $p \in \mathbb{N}$.

Тогда $\exists \delta_a > 0$ такое, что $\forall \delta \in (0, \delta_a)$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ с условием, что при всех $n > n_0$ имеем $N_{B(a, \delta)}(f_n) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z_f = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ – множество нулей функции f в D . Тогда

$$\delta_a = \min(\text{dist}(a, \partial D), \text{dist}(a, Z_f \setminus \{a\})) \in (0, +\infty],$$

поскольку нуль a функции f изолированный.

Пусть теперь $\delta \in (0, \delta_a)$ – фиксировано. Положим $\mu = \min_{|z-a|=\delta} |f(z)|$. Очевидно,

что $\mu > 0$. По условию, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} f$, и, значит, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\partial B(a, \delta)} f$; поэтому $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - f_n\|_{\partial B(a, \delta)} < \mu$ при $n > n_0$. Остается применить теорему Руше в $B(a, \delta)$ для функций f и $g = f_n - f$. \square

ТЕОРЕМА 3.6. [О сходящейся последовательности однолистных функций.] Пусть D – область в \mathbb{C} , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность однолистных функций в D , $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} f$. Тогда либо $f \equiv \text{const}$, либо f однолистка в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Вейерштрасса $f \in \mathcal{A}(D)$. Пусть f не равна тождественно константе в D и найдутся $z_1 \neq z_2$ в D с условием $f(z_1) = f(z_2)$ (т.е. f не однолистка в D). Рассмотрим $\{g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)\}$, тогда $g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} g = f(z) - f(z_1)$. Поскольку f – не константа, функция g – не тождественно нулевая в D , при этом $g(z_2) = 0$; пусть порядок нуля z_2 для g равен p , $p \in \mathbb{N}$.

По теореме 3.5, существует $\delta_0 \in (0, |z_2 - z_1|)$ со следующими условиями: $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ имеем $B(z_2, \delta) \subset D$ и найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > n_0$ выполнено равенство $N_{B(z_2, \delta)}(g_n) = p$. Последнее означает, что $\exists a_n \in B(z_2, \delta)$ с условием $g_n(a_n) = 0$, или $f_n(a_n) = f_n(z_1)$, что противоречит однолистности $\{f_n\}$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть D – область в \mathbb{C} , \mathcal{F} – некоторое непустое семейство функций из D в \mathbb{C} . Будем говорить, что \mathcal{F} равномерно ограничено внутри D (р.о.вн. D), если для любого компакта $K \subset D$ семейство \mathcal{F} равномерно ограничено на K , т.е. существует константа $M \in [0, +\infty)$ такая, что $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть D – область в \mathbb{C} , \mathcal{F} – некоторое непустое семейство функций из D в \mathbb{C} . Семейство \mathcal{F} называется равномерно непрерывным внутри D (р.н.вн. D), если для любого компакта $K \subset D$ семейство \mathcal{F} равномерно непрерывно на K , т.е. $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ при всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $z, z' \in K$ с условиями $|z - z'| < \delta$.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть D – область в \mathbb{C} . Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ р.о.вн. D , то \mathcal{F} р.н.вн. D .

Замечание. Обратное неверно, например, для семейства $\mathcal{F} = \{f_n \equiv n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем K – произвольный непустой компакт в D . Положим $d = \min(\text{dist}(K, \partial D), 1)$, $d > 0$. Для $\rho \in (0, d)$ определим $K_\rho = \overline{\bigcup_{z \in K} B(z, \rho)}$ (компактное ρ -раздутье K) – тоже компакт в D . Из р.о. \mathcal{F} вн. D найдется $M > 0$ такое, что $\forall f \in \mathcal{F}$ верна оценка $\|f\|_{K_{d/2}} \leq M$. Установим равностепенную непрерывность \mathcal{F} на K .

Сначала докажем, что семейство $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$ равномерно ограничено на $K_{d/4}$. Пусть $f \in \mathcal{F}$, $z_0 \in K_{d/4}$. Воспользуемся интегральной формулой Коши в $B(z_0, d/4) \subset K_{d/2}$ (в частности, $|f(\zeta)| \leq M$ при $\zeta \in \partial B(z_0, d/4)$):

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, d/4)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} M \left(\frac{4}{d}\right)^2 2\pi \frac{d}{4} = \frac{4M}{d}.$$

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{d/4, d\varepsilon/(4M)\}$. Тогда для всех $z, z' \in K$ с условием $|z - z'| < \delta$ имеем $[z, z'] \subset K_{d/4}$, откуда по формуле Ньютона-Лейбница (для любой $f \in \mathcal{F}$):

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_{[z, z']} f'(\zeta) d\zeta \right| < \frac{4M}{d} \delta \leq \varepsilon,$$

что и доказывает равностепенную непрерывность семейства \mathcal{F} внутри D . \square

4. Лекция 4. Теорема Монтеля о предкомпактности. Теорема Римана о конформном изоморфизме.

Теорема Монтеля о предкомпактности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть D – область в \mathbb{C} . Непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ называется *предкомпактным* (в топологии пространства $\mathcal{A}(D)$), если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ найдется её подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функция $g \in \mathcal{A}(D)$ такие, что $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} g$.

Непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ называется *компактным* (в топологии пространства $\mathcal{A}(D)$), если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можно найти подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функцию $g \in \mathcal{F}$ такие, что $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} g$.

ТЕОРЕМА 4.1. [Теорема Монтеля.] Пусть D – область в \mathbb{C} , $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$. Тогда \mathcal{F} предкомпактно $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ р. о. вн. D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Rightarrow). От противного. Предположим, что найдется компакт $K \subset D$, на котором семейство \mathcal{F} не р. о., но при этом \mathcal{F} предкомпактно. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ с условием $\|f_n\|_K > n$. Следовательно, $\|f_{n_k}\|_K \rightarrow +\infty$ для любой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ из $\{f_n\}$. Но в силу предкомпактности семейства \mathcal{F} существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ из $\{f_n\}$ и $g \in \mathcal{A}(D)$ такие, что $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} g$; в частности, $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{K} g$. Поэтому найдется $k_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_1$ имеем $\|f_{n_k}\|_K \leq \|f_{n_k} - g\|_K + \|g\|_K \leq 1 + \|g\|_K < +\infty$. Противоречие.

(\Leftarrow) Пусть семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ р.о.вн. D . Тогда по теореме 3.7 семейство \mathcal{F} р.н.вн. D . Пусть $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ – произвольная последовательность. Пусть $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty}$ – некоторым образом занумерованные все различные точки из D , у которых обе координаты рациональны.

Поскольку $K_1 = \{z_1\}$ – компакт в D , последовательность $\{f_n(z_1)\}$ ограничена, и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k^1}(z_1)\}$. Аналогично предыдущему шагу выбираем из последовательности $\{f_{n_k^1}\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k^2}\}$, сходящуюся в точке z_2 . И так далее. Диагональная подпоследовательность $\{f_{n_k^k}\}$ удовлетворяет следующему условию: $\forall m \in \mathbb{N}$ существует конечный $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k^k}(z_m)$. Без ограничения общности мы будем считать, что исходная последовательность $\{f_n\}$ совпадает с подпоследовательностью $\{f_{n_k^k}\}$. Докажем, что $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри D .

Фиксируем произвольный компакт $K \subset D$ и любое $\varepsilon > 0$. Пусть

$$d = \min(\text{dist}(K, \partial D), 1) \quad , \quad K_\rho = \overline{\bigcup_{z \in K} B(z, \rho)} \quad , \quad (\rho > 0) .$$

Так как \mathcal{F} р.н.вн. D , существует $\delta \in (0, d/2)$ такое, что для всех $z, z' \in K_{d/2}$ с условием $|z - z'| < \delta$ имеем $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon/3$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покроем K кругами $\{B(z_m, \delta)\}_{m=1}^{\infty}$ и выберем конечное подпокрытие $\{B(z_{m_s}, \delta)\}_{s=1}^S$. Без ограничения общности будем считать, что все $z_{m_s} \in K_{d/2}$, поскольку $\delta < d/2$ и указанные круги с центрами не из $K_{d/2}$ не пересекают K .

Поскольку S – конечно и последовательности $\{f_n(z_{m_s})\}$ сходятся при всех $s \in \{1, \dots, S\}$, мы можем найти $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_n(z_{m_s}) - f_{n'}(z_{m_s})| < \varepsilon/3$ для всех $n > N, n' > N$ и всех $s \in \{1, \dots, S\}$.

Тогда для всех $z \in K$, $n > N$ и $n' > N$ имеем:

$$|f_n(z) - f_{n'}(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_{m_s})| + |f_n(z_{m_s}) - f_{n'}(z_{m_s})| + |f_{n'}(z_{m_s}) - f_{n'}(z)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

где z_{m_s} выбрана так, что $z \in B(z_{m_s}, \delta)$ (существует по построению).

Итак, последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по равномерной норме на компакте K и, следовательно, эта последовательность равномерно сходится на K . В силу произвольности K , по теореме Вейерштрасса найдется $g \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн.}D} g$, что и требовалось. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть D – область в \mathbb{C} , \mathcal{F} – непустое семейство функций из D в \mathbb{C} , $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ – функционал. Функционал Φ называется *непрерывным на \mathcal{F}* (в топологии равномерной сходимости внутри D), если $\forall f \in \mathcal{F}$ и для всякой последовательности $\{f_n\}$ из \mathcal{F} с условием $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{вн.}D} f$ имеем $\Phi(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty} \Phi(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть D – область в \mathbb{C} , семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ компактно (в топологии $\mathcal{A}(D)$), Φ непрерывен на \mathcal{F} . Тогда Φ ограничен на \mathcal{F} и достигает своего максимума модуля на \mathcal{F} , т.е. $\exists f_* \in \mathcal{F}$ с условиями

$$|\Phi(f_*)| = \max_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|$ найдется $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ с условием $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi(f_n)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|$. Из компактности \mathcal{F} следует, что найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ в $\{f_n\}$ и $f_* \in \mathcal{F}$ для которых $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн.}D} f_*$. Поскольку Φ непрерывен, имеем: $|\Phi(f_*)| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\Phi(f_{n_k})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi(f_n)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|$. \square

Теорема Римана о конформном изоморфизме.

ТЕОРЕМА 4.2. [Римана, о конформном изоморфизме.] Пусть D и Ω – односвязные области в \mathbb{C}^\sharp , т.е. D_c^\sharp и Ω_c^\sharp связны в \mathbb{C}^\sharp , причем D_c^\sharp и Ω_c^\sharp содержат более чем по одной точке. Пусть $a \in D \cap \mathbb{C}$, $b \in \Omega \cap \mathbb{C}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$. Тогда существует единственный конформный изоморфизм $f : D \xrightarrow{na} \Omega$, удовлетворяющий условиям $f(a) = b$, $\arg f'(a) = \theta$.

ТЕОРЕМА 4.3. [Римана, о конформном изоморфизме, "упрощенная" версия.] Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $D \neq \mathbb{C}$. Тогда $\forall a \in D$ существует и единственно конформное (в данном случае однолистное) отображение $f : D \xrightarrow{na} B_1 = B(0, 1)$, удовлетворяющее условиям $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. С помощью ДЛЮ свести теорему 4.2 к теореме 4.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Фиксируем $a \in D$. Пусть \mathcal{F}_0 – семейство всех однолистных функций $g : D \rightarrow B_1$ таких, что $g(a) = 0$ (сюръективность не требуется). Сначала докажем, что $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Поскольку $D_c^\sharp = \mathbb{C}^\sharp \setminus D$ связно и неодноточечно (и, следовательно, континуально), мы можем выбрать две разные точки a_1 и a_2 в $\mathbb{C} \setminus D$. По лемме 2.2 функции $\sqrt{z - a_1}$ и $\sqrt{z - a_2}$ имеют в D голоморфные ветви $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Определим функции $g_1(z) = v_1(z)/v_2(z)$, $g_2(z) = -g_1(z)$.

ЛЕММА 4.1. *Функции g_1 и g_2 однолиственны в D , причем $g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$g_1^2(z) = g_2^2(z) = \frac{v_1^2(z)}{v_2^2(z)} = \frac{z - a_1}{z - a_2}.$$

Т.е. $g_1^2(z) = g_2^2(z) =: L(z)$ – ДЛО, которое инъективно в $\mathbb{C}^\#$, а, значит, и на D .

Если $g_1(z) = g_1(z')$ при $z, z' \in D$, то $L(z) = g_1^2(z) = g_1^2(z') = L(z')$, откуда $z = z'$. Следовательно g_1 и $g_2 = -g_1$ однолиственны в D .

Пусть теперь $g_1(z) = g_2(z')$ для $z, z' \in D$. Тогда $L(z) = g_1^2(z) = g_2^2(z') = L(z')$ и, следовательно, $z = z'$. Таким образом, $g_1(z) = g_2(z)$; с другой стороны, по определению, $g_2 \equiv -g_1$, откуда $g_1(z) = 0$, что невозможно. Это противоречие доказывает второе утверждение леммы. \square

Докажем теперь, что $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Поскольку $g_2(D)$ – область в \mathbb{C} (по Теореме 2.4) и $g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$, найдутся $w_0 \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ такие, что $B(w_0, r) \subset g_2(D)$, откуда $B(w_0, r) \cap g_1(D) = \emptyset$.

Положим

$$g_0(z) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{g_1(z) - w_0} - \frac{1}{g_1(a) - w_0} \right).$$

ЛЕММА 4.2. *Имеем $g_0 \in \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однолиственность $g_0(z)$ в D следует из того, что функция $g_0(z)$ есть композиция однолистной в D функции $g_1(z)$ и некоторого ДЛО. Очевидно, $g_0(a) = 0$. Для того, чтобы доказать, что $g_0(D) \subset B_1$, достаточно заметить, что

$$\left| \frac{1}{g_1(z) - w_0} \right| < \frac{1}{r}, \quad \forall z \in D,$$

поскольку $|g_1(z) - w_0| > r$ при $z \in D$. В силу этого, $\forall z \in D$ имеем

$$|g_0(z)| \leq \frac{r}{2} \left(\left| \frac{1}{g_1(z) - w_0} \right| + \left| \frac{1}{g_1(a) - w_0} \right| \right) < \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{r} = 1.$$

\square

ЛЕММА 4.3. *Пусть $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{F}_0 \mid g'(a) \geq |g'_0(a)|\}$. Тогда $\mathcal{F} \neq \emptyset$ – компактное семейство в $\mathcal{A}(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу отметим, что предкомпактность семейства \mathcal{F} следует из теоремы 4.1 (Монтеля), поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ равномерно ограничено внутри D единицей. Кроме того, $g'_0(a) \neq 0$ ввиду однолиственности функции g_0 в D .

Положим

$$g_*(z) = \frac{|g'_0(a)|}{g'_0(a)} g_0(z).$$

Ясно, что $g_* \in \mathcal{F} \neq \emptyset$. Пусть теперь $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$. Поскольку \mathcal{F} предкомпактно, найдется $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ – подпоследовательность в $\{f_n\}$ с условием $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} f_*$, где f_* – некоторая функция. Докажем, что $f_* \in \mathcal{F}$.

По теореме Вейерштрасса $f_* \in \mathcal{A}(D)$, причем $f'_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} f'_*$, поэтому

$$f'_*(a) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_{n_k}(a) \geq |g'_0(a)|.$$

При этом f_* не константа, поскольку $g'_0(a) \neq 0$. Следовательно, $f_*(z)$ однолистна в D по теореме 3.6 о равномерном пределе однолистных функций.

Поскольку $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{вн. } D} f_*$, легко видеть, что $f_*(a) = 0$ и $f_*(D) \subset \overline{B_1}$. Но f_* – не константа, так что $f_*(D)$ – область, откуда сразу следует, что реально $f_*(D) \subset B_1$. Лемма доказана. \square

Рассмотрим функционал $\Phi : g \rightarrow g'(a)$ на \mathcal{F} . Он непрерывен на \mathcal{F} по теореме Вейерштрасса. По предложению 4.1 (с учетом того, что $g'(a) \in \mathbb{R}_+$ для $g \in \mathcal{F}$) найдется $f \in \mathcal{F}$ с условием $f'(a) = \max_{g \in \mathcal{F}} \{g'(a)\}$. Докажем, что f – искомое отображение (т.е. конформное отображение D на B_1 , удовлетворяющее условиям $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = 0$). Поскольку $f \in \mathcal{F}$, остается установить, что $f(D) = B_1$.

Пусть, от противного, $\exists b \in B_1 \setminus f(D)$; ясно, что $b \neq 0$, поскольку $f(a) = 0 \in f(D)$. Рассмотрим ДЛО

$$\Lambda(w) = \frac{w - b}{1 - \bar{b}w}$$

– автоморфизм круга B_1 , удовлетворяющий условиям:

$$\Lambda(0) = -b, \quad \Lambda(b) = 0, \quad \Lambda'(w) = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}w)^2}, \quad \Lambda'(0) = 1 - |b|^2.$$

Рассмотрим $\Lambda(f(z))$ – однолиственную в D функцию, не равную 0 в D (поскольку $f(z) \neq b$ в D). Так как D односвязна, по лемме 2.2 существует голоморфная ветвь $h_1(z) \in \mathcal{A}(D)$ многозначной функции $\sqrt{\Lambda(f(z))}$ в D . Утверждается, что функция $h_1(z)$ однолистна в D . Действительно, если $h_1(z) = h_1(z')$ для $z, z' \in D$, то $\Lambda(f(z)) = h_1^2(z) = h_1^2(z') = \Lambda(f(z'))$ и, следовательно, $z = z'$. Ясно, что $h_1(z)$ принимает значения из B_1 , поскольку $h_1^2(z)$ принимает значения из B_1 .

Итак, $h_1^2(z) = \Lambda(f(z))$ – равенство голоморфных функций в D (в частности, $h_1(a) \in \sqrt{-b}$ и поэтому $|h_1(a)| = \sqrt{|b|}$), которое мы можем продифференцировать в точке $a \in D$:

$$2h_1(a)h_1'(a) = \Lambda'(0) \cdot f'(a) = (1 - |b|^2) \cdot f'(a).$$

Поэтому

$$|h_1'(a)| = \frac{(1 - |b|^2) \cdot |f'(a)|}{2|h_1(a)|} = \frac{f'(a) \cdot (1 - |b|^2)}{2\sqrt{|b|}}.$$

Рассмотрим

$$h_2(z) = \frac{h_1(z) - h_1(a)}{1 - \overline{h_1(a)}h_1(z)}$$

– композицию $h_1(z)$ с ДЛО-автоморфизмом круга B_1 , переводящим $h_1(a)$ в 0. Для h_2 имеем: $h_2(a) = 0$, h_2 однолистна и принимает значения в B_1 . Найдем по определению производную h_2 в точке a :

$$\begin{aligned} h_2'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{h_2(z) - h_2(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h_2(z)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{h_1(z) - h_1(a)}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \overline{h_1(a)}h_1(z)} \right) = \\ &= \frac{h_1'(a)}{1 - |h_1(a)|^2} = \frac{h_1'(a)}{1 - |b|}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|h_2'(a)| = \frac{f'(a) \cdot (1 - |b|^2)}{2\sqrt{|b|}(1 - |b|)} = f'(a) \cdot \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} > f'(a),$$

поскольку $\frac{1+|b|}{2} > \sqrt{1 \cdot |b|}$ (ибо $|b| < 1$).

Наконец, пусть

$$h(z) = h_2(z) \cdot \frac{|h_2'(a)|}{h_2'(a)}.$$

Тогда h , как и h_2 , однолистка в D и принимает значения из B_1 , $h(a) = 0$ и $h'(a) = |h_2'(a)| > f'(a)$, т.е. $h \in \mathcal{F}$, но при этом $h'(a) > f'(a) = \max_{g \in \mathcal{F}} \{g'(a)\}$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.3. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $D \neq \mathbb{C}$. Для любой точки $a \in D$ пусть $\mathcal{A}_1(D, a)$ – класс всех голоморфных функций $g : D \rightarrow B_1$ с условием $g(a) = 0$. Доказать, что значение $\sup\{|g'(a)| \mid g \in \mathcal{A}_1(D, a)\}$ достигается на конформных изоморфизмах $f : D \rightarrow B_1$ с условием $f(a) = 0$.

Напомним, что жорданова область D в \mathbb{C} называется *специальной*, если существует конечное множество $\Sigma \subset D$ и функция (Шварца) $S(z) \in \mathcal{A}(D \setminus \Sigma)$, непрерывная в $\bar{D} \setminus \Sigma$, такая, что $S(z) = \bar{z}$ на ∂D .

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. С помощью теоремы Римана доказать, что функция Шварца специальной области определена единственным образом.

5. Лекция 5. Принцип соответствия границ (теорема Каратеодори, частный случай).

Здесь мы докажем некоторый *упрощенный* вариант *принципа соответствия границ* (теоремы Каратеодори), который, тем не менее, вполне достаточен в ряде важных приложений, например при доказательстве наиболее общих версий принципа аргумента, теоремы Руше и обратного принципа соответствия границ, малой теоремы Пикара и разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в жордановых областях.

ТЕОРЕМА 5.1. [Каратеодори]. Пусть D и Ω — жордановы области в $\mathbb{C}^\#$. Пусть $f: D \rightarrow \Omega$ — какой-либо их конформный изоморфизм (существующий по теореме Римана). Тогда f продолжается до гомеоморфизма \bar{D} на $\bar{\Omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не ограничивая общности, мы будем рассматривать случай $D \subset \mathbb{C}$, $\Omega = B_1 := B(0, 1)$. Кроме того, мы будем опираться на хорошо известный, но не тривиальный (даже по модулю теоремы Жордана) факт, что в указанных условиях существует гомеоморфизм \bar{D} на \bar{B}_1 , при котором D переходит на B_1 .

Доказательство разобьем на несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес.

ЛЕММА 5.1. [Кёбе]. Пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$, $\|f\|_{B_1} = M < +\infty$. Пусть в B_1 проведены два радиуса I_0 и I_1 под углом π/p (p — натурально), а жорданов путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow B_1$ соединяет эти радиусы (т.е. $\gamma(0) \in I_0$, $\gamma(1) \in I_1$). Тогда при $\varepsilon = \|f\|_{[\gamma]}$ справедлива оценка $|f(0)| \leq \sqrt[p]{\varepsilon M^{2p-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \in [\gamma] = \gamma([0, 1])$, то $|f(0)| \leq \varepsilon$ и все доказано ввиду $\varepsilon \leq M$. Далее предполагается, что $0 \notin [\gamma]$. Напомним, что $\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$. Без ограничения общности мы будем считать, что I_0 совпадает с $[0, 1]$, I_1 — с

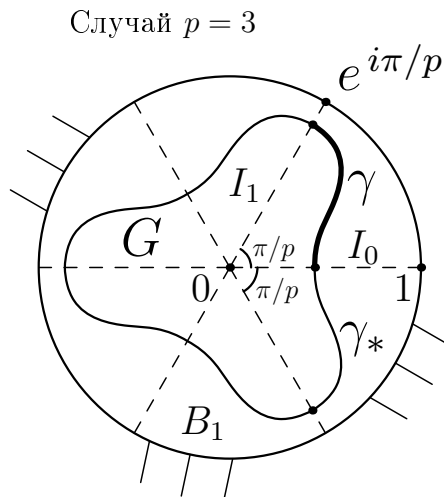


Рис. 5.1.

полуинтервалом $[0, e^{i\pi/p})$, а $[\gamma]$ не имеет других общих точек с I_0 и I_1 , кроме конечных, причем $[\gamma]$ целиком лежит в том секторе между I_0 и I_1 , который принадлежит (замкнутой) верхней полуплоскости.

Положим $g(z) = f(z)\overline{f(\bar{z})}$ и $\gamma_*(t) = \overline{\gamma(t)}$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$g \in \mathcal{A}(B_1), \quad \|g\|_{B_1} \leq M^2, \quad \|g\|_{[\gamma] \cup [\gamma_*]} \leq M\varepsilon.$$

При $p = 1$ пусть $h(z) = g(z)$, а при $p > 1$ определим

$$h(z) = g(z)g(ze^{2\pi i/p}) \dots g(ze^{2\pi i(p-1)/p}).$$

Рассмотрим (жорданову) область G , ограниченную кривой $\{\gamma_*^-\} \cup \{\gamma\}$ и (при $p > 1$) результатами её поворотов на углы $2\pi/p, \dots, 2\pi(p-1)/p$. При этом

$$h \in \mathcal{A}(G) \cap C(\bar{G}), \quad \|h\|_{\partial G} \leq \varepsilon M(M^2)^{p-1},$$

откуда по принципу максимума модуля (в G) получаем: $|h(0)| = |f(0)|^{2p} \leq \varepsilon M^{2p-1}$. То, что $0 \in G$ следует из очевидного соотношения $\text{ind}_{\partial+G}(0) = 1$. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.1.1. Пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$, $\|f\|_{B_1} < +\infty$, p – натурально, $\delta \in (0, 1)$. Пусть существует последовательность жордановых путей $\{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ таких, что (при каждом n) $[\gamma_n] \subset B_1 \setminus B(0, \delta)$ и γ_n соединяет некоторую пару радиусов (не обязательно одну и ту же для разных n), образующую угол π/p . Если $\|f\|_{[\gamma_n]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то $f \equiv 0$.

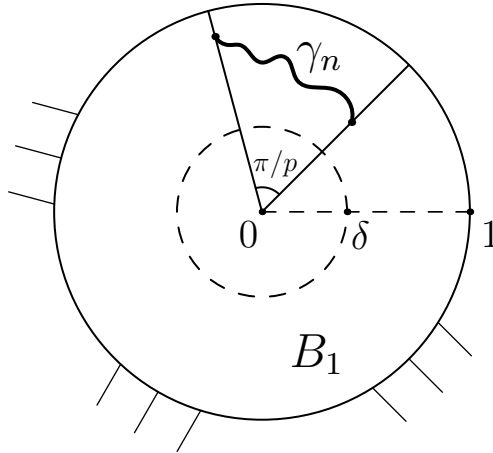


Рис. 5.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_n = \|f\|_{[\gamma_n]}$, $M = \|f\|_{B_1}$. По предыдущей лемме, $|f(0)| \leq \sqrt[p]{\varepsilon_n M^{2p-1}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, так что $f(0) = 0$. Пусть, от противного, $f \not\equiv 0$ в B_1 и $f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n$ – разложение Тейлора функции f в B_1 , где k натурально и $c_k \neq 0$. Рассмотрим $f_1(z) = f(z)/z^k$ при $z \in B_1 \setminus \{0\}$, $f_1(0) = c_k$. Тогда f_1 удовлетворяет условиям настоящего следствия и, по доказанному, должно быть $f_1(0) = 0$. Противоречие. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Говорят, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ точек из области G в \mathbb{C} стремится к границе $\partial^\#G$ этой области при $n \rightarrow +\infty$ (коротко $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \partial^\#G$), если для любого компакта K в G найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ имеем $z_n \in G \setminus K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть G – область в \mathbb{C} , $E \subset G$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ и $A \in \mathbb{C}^\#$. Число A называется предельным значением функции $f(z)$ при стремлении z к $\partial^\#G$ по множеству E , если найдется последовательность $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \partial^\#G$, $\{z_n\} \in E$, такая, что $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ (можно даже считать, что $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится в $\mathbb{C}^\#$).

ЛЕММА 5.2. [Линделёф]. Пусть G – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(G)$ и имеют место следующие условия:

- (1) $M = \|f\|_G < +\infty$;
- (2) найдутся $a \in G$ и $r \in (0, +\infty)$ такие, что окружность $\{|z - a| = r\}$ имеет замкнутую дугу длины $2\pi r/p$ ($p \in \mathbb{N}$), лежащую вне \overline{G} ;
- (3) при стремлении z к $\partial^\#G$ по множеству $G \cap B(a, r)$ все предельные значения функции $|f(z)|$ не превосходят ε (при некотором $\varepsilon \geq 0$).

Тогда $|f(a)| \leq \sqrt[p]{\varepsilon M^{p-1}}$.

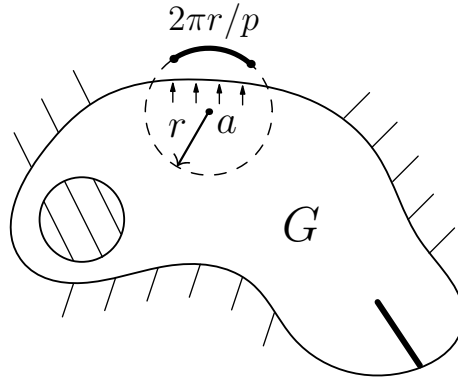


Рис. 5.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $a = 0$. Пусть G_* – связная компонента (содержащая точку 0) открытого множества $\bigcap_{k=0}^{p-1} G_k$, где G_k – результат поворота области G вокруг начала координат на угол $2\pi k/p$. Очевидно, что $\{|z| = r\} \cap \overline{G_*} = \emptyset$, так что $\overline{G_*} \subset B(0, r)$. Положим

$$h(z) = f(z)f(ze^{2\pi i/p}) \dots f(ze^{2\pi i(p-1)/p}).$$

Поскольку $\partial G_* \subset \bigcap_{k=0}^{p-1} \partial G_k \cap B(0, r)$, все предельные значения функции $|h(z)|$ при стремлении z к ∂G_* по множеству G_* не превосходят εM^{p-1} . По усиленному принципу максимума модуля для h в G_* (см. конец лекции), $|f(0)|^p \leq \varepsilon M^{p-1}$.

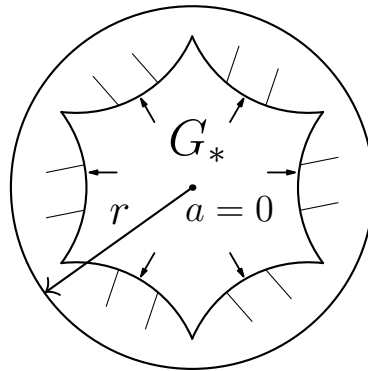


Рис. 5.4.

□

ЛЕММА 5.3. [Граничная теорема единственности]. Пусть G – область в \mathbb{C} с условием $\partial G = \partial \bar{G}$, $f \in \mathcal{A}(G)$ и $\|f\|_G < +\infty$. Пусть найдутся $z_0 \in \partial G$ и $\delta > 0$ такие, что при стремлении z к ∂G из множества $G \cap B(z_0, \delta)$ все предельные значения функции $f(z)$ равны комплексному числу c . Тогда $f \equiv c$ в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $a \in G \cap B(z_0, \delta/2)$ и некотором $r \in (0, \delta/2)$ окружность $\{|z - a| = r\}$ имеет дугу, лежащую вне \bar{G} (по свойству $\partial G = \partial \bar{G}$, точка z_0 является граничной также для множества $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$). Применяя предыдущую лемму для области G , функции $(f - c)$ и значения $\varepsilon = 0$, получим $f(a) - c = 0$. По теореме единственности $f \equiv c$ в G . \square

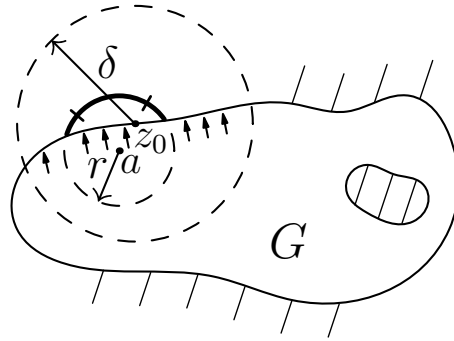


Рис. 5.5.

Приведем без доказательства одну известную теорему, которая для частного случая, когда Z_g^o плотно в Z_g , непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

ТЕОРЕМА 5.2. [Радо]. Пусть G – произвольная область в \mathbb{C} , $g \in C(G)$ и $Z_g = \{z \in G \mid g(z) = 0\}$. Если g голоморфна на $G \setminus Z_g$, то $g \in \mathcal{A}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть D – жорданова область и $f : D \rightarrow B_1$ – конформный изоморфизм. Считаем известным существование гомеоморфизма \bar{D} на \bar{B}_1 , при котором D отображается на B_1 .

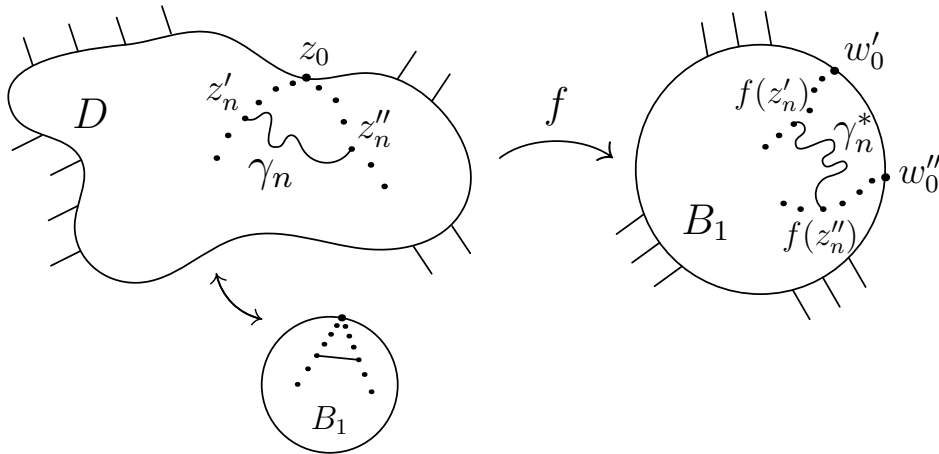


Рис. 5.6.

1°. Докажем, что f непрерывно продолжается на ∂D . Если, от противного, это не так, то найдутся $z_0 \in \partial D$ и последовательности $\{z'_n\}, \{z''_n\}$ в D , сходящиеся к z_0 , такие, что $f(z'_n) \rightarrow w'_0, f(z''_n) \rightarrow w''_0$ при $n \rightarrow +\infty$, причем $w'_0 \neq w''_0$ (проверить!; существование таких последовательностей вытекает из ограниченности f). Поскольку $f: D \rightarrow B_1$ – гомеоморфизм, легко показать, что $w'_0, w''_0 \in \partial B_1$. Ввиду гомеоморфности \bar{D} и \bar{B}_1 найдутся жордановы пути γ_n в D , соединяющие z'_n и z''_n , с условием $\text{diam}([\gamma_n]) \rightarrow 0$ (т.е. $[\gamma_n] \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow +\infty$). Пусть $\gamma_n^* = f \circ \gamma_n$. Применяя следствие 5.1.1 для $g(w) = f^{-1}(w) - z_0$ и $\{\gamma_n^*\}$ в B_1 (ясно, что $\|g\|_{[\gamma_n^*]} \rightarrow 0$ и $\{\gamma_n^*\}$ отделены от точки 0 при $n \rightarrow +\infty$), получаем $f^{-1}(w) \equiv z_0$ – противоречие.

2°. Продолжим f по непрерывности (единственным образом) из D на \bar{D} согласно 1°. Как нетрудно видеть, $f(\partial D) \subset \partial B_1$. Поскольку $f: D \rightarrow B_1$ – гомеоморфизм, остается установить взаимную-однозначность функции f на ∂D .

От противного, пусть найдутся $z_1 \neq z_2 \in \partial D$, для которых $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Тогда существуют жордановы пути $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \bar{D}$ (причем $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1) \rightarrow D$), $\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \gamma_1(1) = z_1, \gamma_2(1) = z_2$, при этом $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$ имеют только одну общую точку $\gamma_1(0)$ (здесь можно воспользоваться гомеоморфизмом \bar{D} и \bar{B}_1 , а в B_1 взять два соответствующих радиуса). При этом $f(\gamma_1(t)) \rightarrow w_0$ и $f(\gamma_2(t)) \rightarrow w_0$ при $t \rightarrow 1-$.

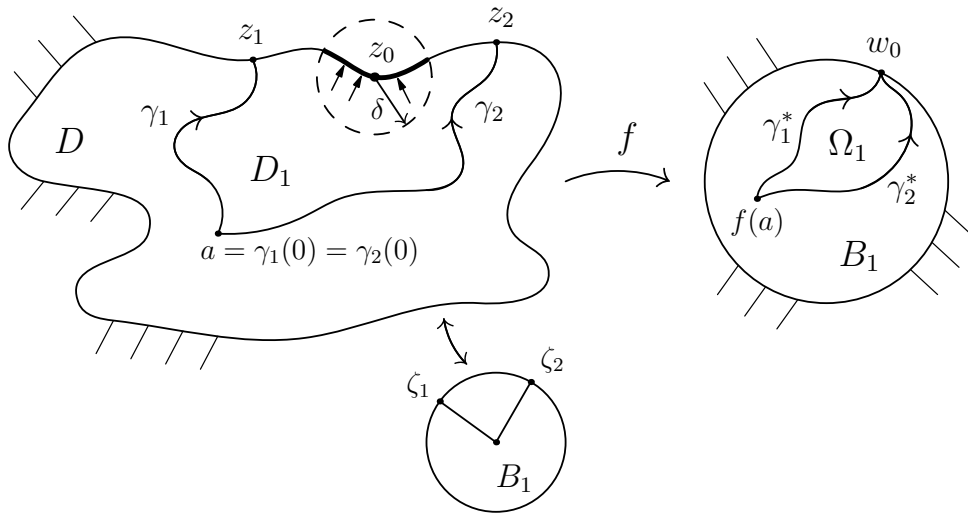


Рис. 5.7.

Положим $\gamma_1^* = f \circ \gamma_1, \gamma_2^* = f \circ \gamma_2$. Пусть Ω_1 – жорданова область (в B_1), ограниченная кривой $\{\gamma_1^*\} \cup \{\gamma_2^*\}^-$, и пусть $D_1 = f^{-1}(\Omega_1)$ (область D_1 тоже жорданова!). Пусть $z_0 \in \partial D_1 \setminus ([\gamma_1] \cup [\gamma_2])$. При некотором $\delta > 0$ круг $B(z_0, \delta)$ не пересекает $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$, так что к функции $f(z) - w_0$ в D_1 можно применить лемму 5.3, по которой $f \equiv w_0$ в D_1 . Противоречие. \square

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Пусть G – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(G)$, $M \in [0, +\infty)$. Если все предельные значения функции $|f(z)|$ при стремлении z к $\partial^\#G$ (по G) не превосходят M , то $|f(z)| \leq M$ всюду в G .

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. * Адаптировать доказательство теоремы 5.1 на случай конформного изоморфизма двух концентрических колец.

6. Лекция 6. Следствия из теорем Римана и Каратеодори. Специальные области. Гомотопии кривых. Односвязность.

В этой лекции приводятся важные следствия теорем Римана и Каратеодори.

ТЕОРЕМА 6.1. [О разрешимости ЗД для ГрФ]. Пусть D – произвольная жорданова область в \mathbb{C} , $h_0 \in C(\partial D)$ – вещественная функция. Тогда ЗД для ГрФ с граничными данными h_0 разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая круга эта теорема доказана. Остается воспользоваться теоремами Римана и Каратеодори и методом конформных отображений для решения ЗД. \square

ТЕОРЕМА 6.2. [Принцип аргумента]. Пусть D – произвольная ограниченная область в \mathbb{C} , граница которой состоит из конечного числа (носителей) попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Пусть функция f голоморфна в D за исключением конечного множества M своих полюсов и непрерывна в $\bar{D} \setminus M$. Если f не обращается в 0 на ∂D , то в обозначениях теоремы 2.1 и определения 2.3 верно следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f) = N_D(f) - P_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обсудим доказательство для случая жордановой области D . Общий случай оставляем читателю (по аналогии). Пусть $k : B_1 \rightarrow D$ – конформный изоморфизм (теорема Римана), продолженный по теореме Каратеодори до гомеоморфизма \bar{B}_1 на \bar{D} . При $r \in (0, 1]$ положим $\gamma_r(t) = k(re^{it})_{[-\pi, \pi]}$, так что $\{\gamma_1\} = \partial^+ D$, а $\{\gamma_r\}$ ограничивает жорданову область D_r , $r \in (0, 1)$. Из равномерной непрерывности функции $k(z)$ на \bar{B}_1 найдется $r_1 \in (0, 1)$ такое, что функция f не имеет нулей и полюсов на $\bar{D} \setminus D_{r_1}$. Из равномерной непрерывности функции $f(k(z))$ на $\bar{B}_1 \setminus B_{r_1}$ найдется $r \in (r_1, 1)$ такое, что для путей $\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t))_{[-\pi, \pi]}$ и $\sigma_r(t) = f(\gamma_r(t))_{[-\pi, \pi]}$ выполняются следующие условия:

- (а) все нули и полюса функции f лежат в D_r ;
- (б) $|(\sigma_r(t) - \sigma_1(t))/\sigma_1(t)| < 1$ на $[-\pi, \pi]$.

По установленному ранее при $r \in (r_1, 1)$ имеем ($w = f(k(z))$):

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial^+ D_r} \text{Arg}(f) &= \Delta_{\sigma_1 + \sigma_r - \sigma_1} \text{Arg}(w) = \\ &= \Delta_{\sigma_1} \text{Arg}(w) + \Delta_{1 + (\sigma_r - \sigma_1)/\sigma_1} \text{Arg}(w) = \Delta_{\sigma_1} \text{Arg}(w) = \Delta_{\partial^+ D} \text{Arg}(f). \end{aligned}$$

Для жордановой области D_r с гладкой границей (простая область) и функции f , голоморфной в окрестности \bar{D}_r , принцип аргумента установлен ранее. \square

В результате мы получаем полные доказательства теоремы 3.2 (обратного принципа соответствия границ) и следующей (усиленной) теоремы Руше.

ТЕОРЕМА 6.3. [Теорема Руше]. Пусть D – произвольная ограниченная область в \mathbb{C} , граница которой состоит из конечного числа (носителей) попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Пусть функции f и g принадлежат классу $\mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$. Если $|g(z)| < |f(z)|$ для всех $z \in \partial D$, то $N_D(f + g) = N_D(f)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Доказать следующее утверждение. Пусть D_1, \dots, D_S – жордановы области в \mathbb{C} ($S \geq 2$ – натурально). Предположим, что замыкания областей D_2, \dots, D_S попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1 . Тогда множество $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^S \bar{D}_s)$ является областью.

ТЕОРЕМА 6.4. [О специальных областях]. Пусть f голоморфна в \mathbb{C}^\sharp , за исключением конечного множества точек $F \subset \mathbb{C}^\sharp \setminus \overline{B_1}$, и взаимно-однозначна на $\overline{B_1}$. Тогда $\Omega = f(B_1)$ является специальной областью. Пусть $F = \{a_1, \dots, a_N\}$, $z_n = 1/\overline{a_n}$, $w_n = f(z_n)$, $\Sigma = \{w_1, \dots, w_N\} \subset \Omega$. Тогда функция Шварца S области Ω определена по формуле

$$S(w) = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}.$$

При этом функция S имеет в точке w_n особенность аналогичную особенности у функции f в точке a_n . В частности, область Ω является неванлинновской если и только если указанная функция f рациональна.

Обратно, если Ω – специальная область с функцией Шварца S (имеющей непустое конечное множество Σ особых точек в Ω), и f – какое-либо конформное отображение B_1 на Ω (продолженное до гомеоморфизма их замыканий), то f продолжается голоморфно из B_1 на $\mathbb{C}^\sharp \setminus F$ по формуле:

$$f(z) = \overline{S(f(1/\overline{z}))}, \quad z \in (\mathbb{C}^\sharp \setminus B_1) \setminus F,$$

где F и Σ связаны как ранее (включая типы особых точек у f и S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что формула для S получена из условия

$$\overline{z} = \overline{f^{-1}(w)} = 1/\overline{f^{-1}(w)} = 1/z \iff \overline{w} = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}$$

при $w \in \partial\Omega$, $z \in \partial B_1$, так что $\overline{w} = S(w)$ на $\partial\Omega$. Положим $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$. Как в принципе симметрии доказывается, что функция $g(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ голоморфна на $B_1 \setminus Z$ и, следовательно, $S(w) = g(f^{-1}(w))$ является голоморфной на $\Omega \setminus \Sigma$. Легко проверяется наличие или отсутствие $\lim_{w \rightarrow w_n} S(w)$ (аналогично $\lim_{z \rightarrow a_n} f(z)$, т.е. соответствие типов особых точек у f и S), а также непрерывность функции S на $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$. В качестве упражнения остается только вопрос о соответствии порядков полюсов у f и S . Обратное утверждение теоремы доказывается аналогично с использованием теоремы Морера. В конкретных примерах полезно следующее замечание. Если $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ в B_1 (в частности, Ω симметрично относительно \mathbb{R}), то $S(w) = f(1/\overline{f^{-1}(w)})$. \square

ПРИМЕР 6.1. Пусть $f(z) = z + 1/(z - a_2) = 2\mathcal{J}(z - a_2) + a_2$, $a_2 \geq 2$. Условия предыдущей теоремы легко проверяются при $F = \{a_1 = \infty, a_2\}$ и $Z = \{0, 1/a_2\}$. Откуда S имеет в Ω два полюса первого порядка $w_1 = f(0) = -1/a_2$ и $w_2 = f(1/a_2) = 1/(a_2 - a_2^3)$. Поскольку $f^{-1}(w) = \mathcal{J}_o^{-1}((w - a_2)/2) + a_2$, формула для S через функцию \mathcal{J}_o^{-1} может быть выписана явно.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Пусть b_1, \dots, b_N – заданные разные точки в \mathbb{C} ; p_1, \dots, p_N – натуральные числа. Пользуясь предыдущей теоремой привести алгоритм построения какой-либо неванлинновской области Ω , у которой функция Шварца имеет в Ω полюса b_n порядка p_n , $n \in \{1, \dots, N\}$ (без других особых точек в Ω).

Указание. В обозначениях предыдущей теоремы при $a_1 = \infty$ ($z_1 = 0$) рассмотреть функцию f вида

$$f(z) = z + \frac{\varepsilon z^p (z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - a_2)^{p_2} \cdots (z - a_N)^{p_N}}, \quad p = p_1 + \cdots + p_N - (N + 1),$$

для достаточно малого ε . Тогда $w_n = z_n$ при $n \in \{1, \dots, N\}$.

Для дальнейшего нам существенно понадобятся понятия гомотопии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть D – область в \mathbb{C} ; $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ – пути в D , причем $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Говорят, что γ_0 и γ_1 *гомотопны в D как пути с одинаковыми концами* (или *(1)-гомотопны в D*), если существует отображение $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) Γ непрерывно по совокупности двух переменных на $[0, 1]^2$;
- (2) $\forall s \in [0, 1]$ имеем
$$\begin{cases} \Gamma(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ \Gamma(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1); \end{cases}$$
- (3) $\forall t \in [0, 1]$ имеем
$$\begin{cases} \Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \\ \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t). \end{cases}$$

Краткое обозначение указанного условия: $\gamma_0 \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть D – область в \mathbb{C} ; $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ – пути в D , причем $\gamma_0(0) = \gamma_0(1), \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$. Говорят, что γ_0 и γ_1 *гомотопны в D как замкнутые пути* (или *(2)-гомотопны в D*), если существует отображение $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) Γ непрерывно по совокупности переменных на $[0, 1]^2$;
- (2) $\forall s \in [0, 1]$ имеем $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s)$;
- (3) $\forall t \in [0, 1]$ имеем
$$\begin{cases} \Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \\ \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t). \end{cases}$$

Краткое обозначение: $\gamma_0 \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$.

В обоих случаях (при фиксированном s) путь $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s), t \in [0, 1]$, называется *s -м путем гомотопии*. Семейство путей $\{\gamma_s \mid s \in [0, 1]\}$ называется *семейством, осуществляющим гомотопию Γ* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Если $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ (эквивалентные пути на $[0, 1]$), то $\gamma_0 \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$ для любой области D , содержащей $[\gamma_0] = [\gamma_1]$. Если $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ и пути γ_0 и γ_1 замкнуты, то $\gamma_0 \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$ для любой области D , содержащей $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Gamma(t, s) = \gamma_1((1-s)h(t) + st)$, где $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – существующий по определению эквивалентности путей возрастающий гомеоморфизм с условием $\gamma_1(h(t)) = \gamma_0(t)$. \square

Таким образом, корректно говорить о *гомотопных кривых* в области (для обоих типов гомотопности).

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Если $\{\gamma_0\} \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \{\gamma_1\}$, то кривая $\{\gamma\} = \{\gamma_0\} \cup \{\gamma_1\} \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \{0\}_D$.

Обозначение $\{0\}_D$ используется для класса всех точечных путей в D (любые два точечных пути в D (2)-гомотопны в D).

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Пусть $D = \{r < |z| < R\}$, где $0 \leq r < 1 < R \leq +\infty$; и пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ – замкнутый путь, $n = \text{ind}_\gamma(0) = (2\pi)^{-1} \Delta_\gamma \text{Arg}(z)$. Если $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \Big|_{[0, 1]}$ – путь, равномерно проходящий n раз ∂B_1 , то $\gamma \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_n$. При этом разные γ_n не гомотопны в D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Область D в \mathbb{C} называется $\Gamma(1)$ -односвязной (соответственно, $\Gamma(2)$ -односвязной), если любые два пути $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ с одинаковыми концами (соответственно, замкнутые пути в D) (1)-гомотопны в D (соответственно, (2)-гомотопны в D).

ТЕОРЕМА 6.5. [Эквивалентные определения односвязной области в \mathbb{C} .] Пусть D – область в \mathbb{C} . Следующие условия эквивалентны:

(1.1) D односвязна в \mathbb{C} , т.е. $D_c^\# = \mathbb{C}^\# \setminus D$ связно в $\mathbb{C}^\#$;

(1.2) $\partial^\# D$ связна в $\mathbb{C}^\#$;

(2.1) D гомеоморфна B_1 ;

(2.2) D конформно эквивалентна B_1 (это условие эквивалентно остальным при $D \neq \mathbb{C}$);

(3) существует исчерпание D жордановыми областями; т.е. найдется семейство $\{G_n\}_{n=1}^{+\infty}$ жордановых областей с условиями $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n = D$;

(4) D является $\Gamma(1)$ -односвязной;

(5) D является $\Gamma(2)$ -односвязной ($\pi_1(D) = \{0\}$);

(6) D односвязна по Жордану, т.е. выполнено любое из двух эквивалентных условий:

(6.1) для любого компакта K в D его оболочка $\hat{K} \subset D$;

(6.2) для всякой замкнутой жордановой ломаной γ в D имеем $\overline{D_\gamma} \subset D$.

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

(1.2) \Rightarrow (1.1) – от противного (из определений связности и границы).

(1.1) \Rightarrow (6.1) – было в прошлом семестре.

(6.1) \Rightarrow (6.2) – по теореме Жордана для ломаных.

(6.2) \Rightarrow (2.2) – $\forall f \in \mathcal{A}(D)$ \exists п/о в D (проверить!); повторяем д-во т. Римана.

(2.2) \Rightarrow (2.1) – очевидно.

(2.1) \Rightarrow (3) – устраиваем исчерпание образами кругов $\{|z| < n/(n+1)\}$.

(3) \Rightarrow (4) – нужное условие выполняется в каждом $\{G_n\}$ по теореме Римана.

(4) \Rightarrow (5) – несложное упражнение (разобрать на семинарах).

(5) \Rightarrow (2.2) – докажем в будущем (см. теорему о монодромии).

(2.1) \Rightarrow (1.2) – см. ниже.

(2.1) \Rightarrow (1.2) (прямое доказательство). Пусть, от противного, $f : B_1 \rightarrow D$ – гомеоморфизм, но $\partial^\# D$ не связна. Найдем открытые Ω_1 и Ω_2 в $\mathbb{C}^\#$ с условиями $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\partial^\# D \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\partial^\# D \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ и $\partial^\# D \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Введем $K = \partial\Omega_1 \cap D$ – непустой компакт в D (иначе $D \subset \Omega_1$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ – противоречие). Тогда $K_1 = f^{-1}(K)$ – компакт в B_1 , так что найдется $r \in (0, 1)$ с условием $K_1 \subset \overline{B_r}$, где $B_r = B(0, r)$. Так как $f(\overline{B_r})$ – компакт в D , то найдутся $z_1 \in \Omega_1 \setminus f(\overline{B_r})$ и $z_2 \in \Omega_2 \setminus f(\overline{B_r})$. Положим $w_1 = f^{-1}(z_1)$, $w_2 = f^{-1}(z_2)$ и соединим их путем (ломаной) γ в $B_1 \setminus \overline{B_r}$. Но тогда $f \circ \gamma$ – путь, соединяющий z_1 и z_2 в D , не пересекающий $f(\overline{B_r})$ и, следовательно, содержащееся в нем множество $\partial\Omega_1 \cap D$. Таким образом, $f \circ \gamma$ не пересекает всю $\partial\Omega_1$. Поскольку $z_1 \in \Omega_1$, а $z_2 \notin \Omega_1$, мы приходим к противоречию (воспользоваться принципом вложенных отрезков). \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Пусть D – жорданова область в \mathbb{C} и f – гомеоморфизм $\overline{B_1}$ на \overline{D} . Тогда $f|_{B_1}$ – гомеоморфизм B_1 и D .

Кроме того (в конце курса), мы применим теоремы Римана и Каратеодори для построения модулярной функции (в доказательстве малой теоремы Пикара).

7. Лекция 7. Аналитическое продолжение по Вейерштрассу. Единственность аналитического продолжения вдоль пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть G – область в \mathbb{C} , $g \in \mathcal{A}(G)$. Пара $\mathcal{G} = (G, g)$ называется *аналитическим элементом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Аналитические элементы $\mathcal{G}_1 = (G_1, g_1)$ и $\mathcal{G}_2 = (G_2, g_2)$ называются *непосредственными аналитическими продолжениями* друг друга, если существует открытый круг B с условиями $B \subset G_1 \cap G_2$ и $g_1 \equiv g_2$ в B . В частности, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Краткое обозначение для указанного условия: $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Аналитические элементы \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 называются *аналитическими продолжениями* друг друга *по цепочке (аналитических) элементов* $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$, если $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathcal{F}_N \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Пусть $B = B(a, R_a)$ – открытый круг, $f \in \mathcal{A}(B)$, причем B является кругом сходимости ряда Тейлора функции f с центром a . Элемент $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a = (B, f)$ называется *каноническим аналитическим элементом* (с функцией f , центром a , радиусом R_a). Для краткости такой элемент будет также обозначаться через \mathcal{D}_a^f .

В дальнейшем рассматриваются только канонические аналитические элементы, если не оговорено противного.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Пусть $f(z) = \ln z$ в \mathbb{C}_- . Тогда $\forall a \in \mathbb{C}_-$ определен \mathcal{D}_a^f .
1) Выписать все \mathcal{D}_a^f .
2) Для каких a, b верно, что $\mathcal{D}_a^f \leftrightarrow \mathcal{D}_b^f$?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a) = (B(a, R_a), f_a)$, $\mathcal{F}_b = (B_b, f_b) = (B(b, R_b), f_b)$ – канонические аналитические элементы, и пусть $\mathcal{F}_a \leftrightarrow \mathcal{F}_b$. Тогда
1) если $R_a = +\infty$, то $R_b = +\infty$ и $f_a \equiv f_b$ – целая функция;
2) если $R_a < +\infty$, то $R_b < +\infty$, $|R_a - R_b| \leq |a - b|$ и $f_a \equiv f_b$ на $B_a \cap B_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По теореме единственности.

2) Ни один из соответствующих замкнутых кругов \overline{B}_a или \overline{B}_b не может строго содержаться внутри второго по теореме Коши-Тейлора. Поэтому найдется точка $c \in \partial B_a \cap \partial B_b$. Тогда $|R_a - R_b| \leq |a - b|$ по неравенству треугольника для трех точек a, b, c , а $f_a \equiv f_b$ на $B_a \cap B_b$ по теореме единственности. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть $\{\mathcal{F}^t \mid t \in T\}$ – семейство (канонических) элементов, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) для любых τ_1, \dots, τ_J из T ($J \in \mathbb{N}$) круги $B^{\tau_1}, \dots, B^{\tau_J}$ элементов $\mathcal{F}^{\tau_1}, \dots, \mathcal{F}^{\tau_J}$ имеют непустое пересечение ($B^{\tau_1} \cap \dots \cap B^{\tau_J} \neq \emptyset$);

(2) для любых $t, t' \in T$ найдутся $t_1, \dots, t_N \in T$ ($N \in \mathbb{N}$) такие, что $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_N} \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$.

Тогда для всех $t, t' \in T$ имеем $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольные $t, t' \in T$. В обозначениях (2) пусть $B^t, B^{t_1}, \dots, B^{t_N}, B^{t'}$ – круги элементов $\mathcal{F}^t, \mathcal{F}^{t_1}, \dots, \mathcal{F}^{t_N}, \mathcal{F}^{t'}$ соответственно. Поскольку множество $B^t \cap B^{t_1} \cap \dots \cap B^{t_N} \cap B^{t'}$ открыто и (по условию (1)) непусто, в нем содержится некоторый открытый круг B_0 . Таким образом, $f^t \equiv f^{t_1} \equiv \dots \equiv f^{t_N} \equiv f^{t'}$ на B_0 , т.е. по определению имеем $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$, что и требовалось. \square

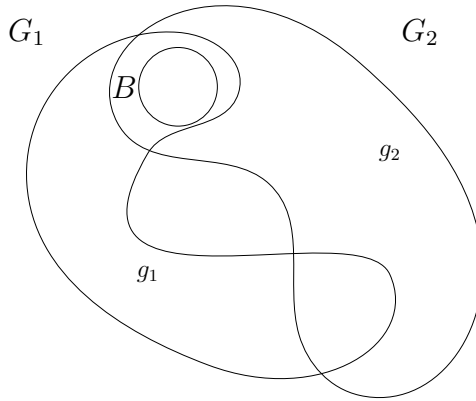


Рис. 7.1.

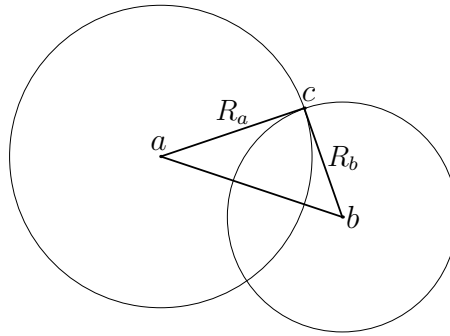


Рис. 7.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ – (канонический) элемент с центром $a \in \mathbb{C}$, и пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, такой, что $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ (последние два свойства будем кратко обозначать, используя символ γ_{ab} вместо γ).

Говорят, что элемент \mathcal{F}_a допускает аналитическое продолжение (АП) вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}$, если существует семейство $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ элементов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathcal{F}_\gamma^\alpha = \mathcal{F}_a$, \mathcal{F}_γ^t имеет центр $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$;

2) для любого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ найдется окрестность $O(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$, такая, что при всех $t \in O(t_0)$ имеем $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$.

Элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_\gamma^\beta$ называется *результатом продолжения* элемента \mathcal{F}_a вдоль γ . Совокупность элементов $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ называется *семейством, осуществляющим это продолжение*.

Замечание 1. Далее будет доказано, что семейство, осуществляющее аналитическое продолжение вдоль пути (если существует) – единственно, поэтому определения семейства и результата продолжения корректны.

Замечание 2. Элемент $\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)$ зависит от t , а не только от $\gamma(t)$.

ПРИМЕР 7.1 (Логарифм). Пусть $f(z) = \ln z$ в \mathbb{C}_- , $a \in \mathbb{C}_-$, $\mathcal{L}_a = \mathfrak{A}_a^f$. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – путь, $\gamma(\alpha) = a$. Определим семейство $\{\mathcal{L}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющее АП \mathcal{L}_a вдоль γ .

Мы знаем, что существует (и единственна) непрерывная ветвь $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ (на всем $[\alpha, \beta]$) многозначной функции $\text{Arg}(\gamma(t))$, определяемая условием $\varphi(\alpha) =$

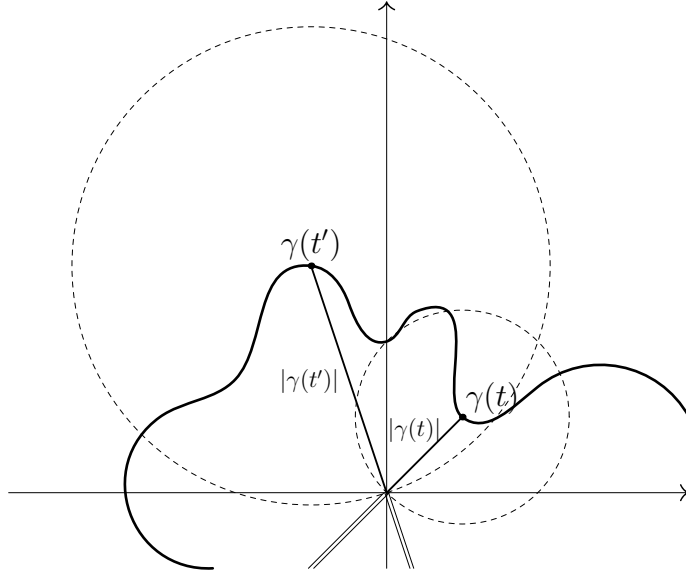


Рис. 7.3.

$\arg(a)$. Тогда при $t \in [\alpha, \beta]$ положим $\mathcal{L}_\gamma^t = (B_\gamma^t, l_\gamma^t(z))$, где

$$B_\gamma^t = B(\gamma(t), |\gamma(t)|), \quad l_\gamma^t(z) = \underset{(\varphi(t)-\pi, \varphi(t)+\pi)}{\ln(z)} = \ln|z| + i \underset{(\varphi(t)-\pi, \varphi(t)+\pi)}{\arg(z)}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Доказать, что семейство $\{\mathcal{L}_\gamma^t\}$, определенное в примере 7.1, действительно осуществляет АП \mathcal{L}_a вдоль γ . Т.е. нужно найти какую-либо окрестность $O(t_0)$ из определения 7.5. Доказать, что максимальной такой окрестностью является $\{t \in [\alpha, \beta] \mid |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \pi\}$. Доказать, что \mathcal{L}_a не продолжается вдоль пути γ_{ab} , который проходит через точку 0.

Указание. По построению, для любого $t \in [\alpha, \beta]$ в соответствующем круге B_γ^t имеем $(l_\gamma^t(z))' = 1/z$, поэтому $\forall t, t' \in [\alpha, \beta]$ имеем $l_\gamma^t(z) = l_\gamma^{t'}(z) + 2\pi ik(t, t')$ в $B_\gamma^t \cap B_\gamma^{t'}$ (где $k(t, t') \in \mathbb{Z}$). Поэтому остается показать, что $k(t, t') = 0$ для достаточно близких t, t' .

УПРАЖНЕНИЕ 7.3. Пусть $p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$ фиксировано, $z_{(a)}^p = e^{p \ln(z)}$ на \mathbb{C}_- , $a \in \mathbb{C}_-$. Возникает элемент $\mathcal{P}_a^p = \mathfrak{D}_a^{z_{(a)}^p}$. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b$ – путь, $\gamma(\alpha) = a$. Выписать семейство $\{\mathcal{P}_\gamma^{pt}\}_{[\alpha, \beta]}$, осуществляющее АП \mathcal{P}_a^p вдоль γ . Найти максимальную $O(t_0)$.

Доказать, что \mathcal{P}_a^p не продолжается вдоль пути γ_{ab} , который проходит через точку 0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. В условиях (и обозначениях) определения 7.5 либо при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $R_\gamma^t = +\infty$ (и, следовательно, все f_γ^t – равные целые функции), либо справедливы следующие утверждения:

(1) при всех $t \in [\alpha, \beta]$ выполняется условие $R_\gamma^t < +\infty$ и $\forall t \in O(t_0)$ имеем $|R_\gamma^t - R_\gamma^{t_0}| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$ (в частности, $R_\gamma(t) = R_\gamma^t$ – непрерывная строго положительная на $[\alpha, \beta]$ функция, и существует $\min_{t \in [\alpha, \beta]} R_\gamma(t) = R_\gamma > 0$);

(2) пусть $\tilde{O}(t_0)$ – какая-либо связная (открытая) окрестность точки t_0 на $[\alpha, \beta]$, для которой верно условие: при всех $t \in \tilde{O}(t_0)$ имеем $\gamma(t_0) \in B(\gamma(t), R_\gamma^t)$; тогда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взята в качестве $O(t_0)$;

(3) существует $\delta > 0$ такое, что из условий $t, t' \in [\alpha, \beta]$ и $|t - t'| \leq \delta$ вытекает $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t'}$ (в частности, в качестве $O(t_0)$ можно взять δ -окрестность $O_\delta(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Следует из предложения 7.1.

(2) Пусть $U(t_0) = \{t \in \tilde{O}(t_0) \mid \mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}\}$. Ясно, что $t_0 \in U(t_0) \neq \emptyset$. По предложению 7.2 и свойству (1) множество $U(t_0)$ открыто и замкнуто в $\tilde{O}(t_0)$ (проверить!). Поскольку $\tilde{O}(t_0)$ – связное множество, имеем $\tilde{O}(t_0) = U(t_0)$, откуда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взята в качестве $O(t_0)$.

(3) Пусть R_γ взято из (1), и $\delta > 0$ определяется из условия $\{|t - t'| < \delta\} \Rightarrow \{|\gamma(t) - \gamma(t')| < R_\gamma\}$ (оно существует в силу равномерной непрерывности γ). Тогда $O_\delta(t_0) \subset \tilde{O}(t_0)$, откуда $O_\delta(t_0)$ также может быть взята в качестве $O(t_0)$. \square

8. Лекция 8. Единственность аналитического продолжения вдоль пути. АП по «близким» путям. Теорема о монодромии. АП первообразного элемента.

ТЕОРЕМА 8.1. [Единственность аналитического продолжения вдоль пути.] В условиях определения 7.5, если элемент \mathcal{F}_a аналитически продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}$, то элементы семейства \mathbb{F}_γ , осуществляющего это продолжение (в частности, конечный элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_\gamma^\beta$) определены однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее считаем, что $R_\gamma^t < +\infty$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, иначе все $R_\gamma^t = +\infty$ (все \mathcal{F}_γ^t совпадают) и доказывать нечего. Пусть, от противного, существуют два различных семейства $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ и $\tilde{\mathbb{F}}_\gamma = \{\tilde{\mathcal{F}}_\gamma^t = (B(\gamma(t), \tilde{R}_\gamma^t), \tilde{f}_\gamma^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющих аналитическое продолжение \mathcal{F}_a вдоль γ_{ab} .

Из предложения 7.3 (1) определим $R_\gamma = R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) > 0$ и $\tilde{R}_\gamma = R_\gamma(\tilde{\mathbb{F}}_\gamma) > 0$, тогда $R_0 = \min(R_\gamma, \tilde{R}_\gamma) > 0$. Определим $\delta > 0$ из условия: $\{|t - t'| < \delta\} \Rightarrow \{|\gamma(t) - \gamma(t')| < R_0\}$ ($t, t' \in [\alpha, \beta]$). Положим $t_n = \alpha + n\delta$, $n \in \{1, \dots, N\}$, где число $N = (\beta - \alpha)/\delta$ без ограничения общности будем считать натуральным. Для всех $t \in [\alpha, t_1]$ имеем:

$$\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_a \leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\gamma^t,$$

и для таких t , очевидно, \mathcal{F}_γ^t и $\tilde{\mathcal{F}}_\gamma^t$ совпадают. Далее повторяем это рассуждение $N - 1$ раз. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. [Связь аналитического продолжения по путям и по цепочкам.] Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, \mathcal{F}_a и \mathcal{F}_b – канонические элементы с центрами a и b соответственно. Следующие условия эквивалентны:

- (a) существует путь $\gamma = \gamma_{ab}$ такой, что элемент \mathcal{F}_b является результатом продолжения \mathcal{F}_a вдоль γ_{ab} (с семейством $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$);
- (b) существует цепочка канонических элементов \mathcal{F}_{a_n} , $n \in \{1, \dots, N\}$, с условиями $\mathcal{F}_a \leftrightarrow \mathcal{F}_{a_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathcal{F}_{a_N} \leftrightarrow \mathcal{F}_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) \Rightarrow (b). Положим $a_n = \gamma(\alpha + n\delta)$, $n \in \{1, \dots, N\}$, где $N + 1 = (\beta - \alpha)/\delta$, а δ определено условием предложения 7.3 (3) так, чтобы N было натуральным. Остается положить $\mathcal{F}_{a_n} = \mathcal{F}_\gamma^{\alpha + n\delta}$.

(b) \Rightarrow (a). Без ограничения общности полагаем $a = a_0 \neq a_1, a_1 \neq a_2, \dots, a_N \neq a_{N+1} = b$ и пусть $\mathcal{F}_{a_n} = (B_{a_n}, f_{a_n})$ ($n \in \{0, \dots, N + 1\}$). Пусть $\gamma(t)$ – натуральная параметризация ломаной $L = [a, a_1] \cup \dots \cup [a_N, b]$, определенная на отрезке $[0, \ell]$, $\ell = \ell(L)$ – длина L . Пусть $\{0 = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1} = \ell\}$ – разбиение отрезка $[0, \ell]$ такое, что $\gamma|_{[\alpha_n, \alpha_{n+1}]} = [a_n, a_{n+1}]$ ($n \in \{0, \dots, N\}$). Теперь, для каждого $n \in \{0, \dots, N\}$, при $t \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ положим $\mathcal{F}_\gamma^t = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{f_{a_n}}$, если $\gamma(t) \in B_{a_n}$, $\mathcal{F}_\gamma^t = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{f_{a_{n+1}}}$, если $\gamma(t) \in B_{a_{n+1}}$ (напомним, что $f_{a_n} = f_{a_{n+1}}$ на пересечении B_{a_n} и $B_{a_{n+1}}$ в силу предложения 7.1). Завершить доказательство. \square

ТЕОРЕМА 8.2. [Об аналитическом продолжении по «близким» путям.] Пусть элемент \mathcal{F}_a аналитически продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, R_γ определен как в предложении 7.3, $R_\gamma < +\infty$. Пусть есть другой путь $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{ab} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с условием $d(\gamma, \tilde{\gamma}) < R_\gamma$, где

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) = \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{[\alpha, \beta]} = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)|.$$

Тогда \mathcal{F}_a аналитически продолжается вдоль $\tilde{\gamma}$ и результаты продолжений \mathcal{F}_b и $\tilde{\mathcal{F}}_b$ элемента \mathcal{F}_a (вдоль γ и $\tilde{\gamma}$ соответственно) совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ – семейство, осуществляющее аналитическое продолжение элемента \mathcal{F}_a вдоль γ ,

$$\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t) = (B_\gamma^t, f_\gamma^t).$$

Укажем явно семейство $\tilde{\mathbb{F}}_{\tilde{\gamma}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющее продолжение элемента \mathcal{F}_a вдоль $\tilde{\gamma}$.

Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < R_\gamma \leq R_\gamma^t$, поэтому $\tilde{\gamma}(t) \in B_\gamma^t$ и определен элемент $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t = \mathfrak{D}_{\tilde{\gamma}(t)}^{f_\gamma^t} = (B(\tilde{\gamma}(t), \tilde{R}_\gamma^t), \tilde{f}_\gamma^t)$. Докажем, что это $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t$ – искомое.

По условию, $\max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < R_\gamma$, поэтому найдется $\varepsilon \in (0, R_\gamma]$ с условием $\max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| = R_\gamma - \varepsilon$. Следовательно, при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$\tilde{R}_\gamma^t \geq R_\gamma^t - |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \geq \min_{t \in [\alpha, \beta]} R_\gamma^t - \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| = R_\gamma - (R_\gamma - \varepsilon) = \varepsilon,$$

т.е. \tilde{R}_γ^t отделен от нуля.

Фиксируем произвольную точку $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Остается найти окрестность $O(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$ такую, что $\forall t \in O(t_0)$ имеем $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t \leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^{t_0}$.

Действительно, найдется такое $\delta > 0$, что $\forall t \in O_\delta(t_0)$ (напомним, что $O_\delta(t_0)$ – это δ -окрестность точки t_0 в $[\alpha, \beta]$) справедливы следующие утверждения:

- (1) $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$ (семейство $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ аналитически продолжает \mathcal{F}_a вдоль γ);
- (2) $\tilde{\gamma}(t_0) \in B_\gamma^{t_0}$ (ввиду непрерывности функций $\gamma(t)$, R_γ^t и условия $\tilde{\gamma}(t_0) \in B_\gamma^{t_0}$);
- (3) $\tilde{\gamma}(t_0) \in \tilde{B}_\gamma^{t_0} = B(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{R}_\gamma^{t_0})$ (функция $\tilde{\gamma}(t)$ непрерывна и $\tilde{R}_\gamma^{t_0} \geq \varepsilon$).

Остается воспользоваться предложением 7.2 для семейства $\{\mathcal{F}_\gamma^t, \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t\}_{t \in O_\delta(t_0)}$ с учетом того, что $\tilde{\gamma}(t_0)$ лежит во всех кругах указанных элементов, $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^t$ и $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$. \square

ТЕОРЕМА 8.3. [Об аналитическом продолжении по путям гомотопии.] Пусть $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ – (1)-гомотопия. При фиксированном s положим $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)|_{t \in [0, 1]}$, $a = \gamma_s(0)$, $b = \gamma_s(1)$.

Пусть элемент \mathcal{F}_a (с центром в точке a) аналитически продолжается вдоль γ_s для любого $s \in [0, 1]$. Тогда результаты $\mathcal{F}_{b,s} = \mathcal{F}_b$ всех этих продолжений совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s \in [0, 1]$ пусть

$$\mathbb{F}_{\gamma_s} = \{\mathcal{F}_s^t = (B(\gamma_s(t), R_s^t), f_s^t)\}_{t \in [0, 1]}$$

– семейство, аналитически продолжающее \mathcal{F}_a вдоль γ_s . Тогда $R_s = \min_{t \in [0, 1]} R_s^t > 0$.

В силу равномерной непрерывности Γ на $[0, 1]^2$, для всякого $s \in [0, 1]$ существует $\delta > 0$ с условием $\|\gamma_{s'} - \gamma_s\|_{[\alpha, \beta]} < R_s$ при всех $s' \in O_\delta(s)$. По теореме 8.2 результаты $\mathcal{F}_{b,s'}$ продолжения элемента \mathcal{F}_a по всем путям $\gamma_{s'}$, $s' \in O_\delta(s)$ совпадают. Остается воспользоваться компактностью отрезка $[0, 1]$ (завершить доказательство). \square

ТЕОРЕМА 8.4. [О монодромии.] Пусть D – $\Gamma(1)$ -односвязная область в \mathbb{C} , $a \in D$, \mathcal{F}_a – канонический элемент с центром a , который аналитически продолжается вдоль любого пути γ_a с началом в точке a , целиком лежащего в D . Тогда для любой точки $b \in D$ результаты продолжений \mathcal{F}_b элемента \mathcal{F}_a по всем путям γ_{ab} в D (с началом a и концом b) совпадают.

Более того, найдется $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\mathcal{F}_b = \mathfrak{D}_b^f$ при всех $b \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой фиксированной точки $b \in D$ единственность элемента \mathcal{F}_b следует из предыдущей теоремы, поскольку область D является $\Gamma(1)$ -односвязной.

Итак, для любой точки $z \in D$ однозначно определен элемент $\mathcal{F}_z = (B_z, f_z)$. Определим функцию f по формуле $f(z) = f_z(z)$. Ясно, что для любого фиксированного $z_0 \in D$ и круга $B(z_0, r) \subset B_{z_0} \cap D$ при всех $z \in B(z_0, r)$ имеем $f_{z_0}(z) = f_z(z)$, поэтому $f \in \mathcal{A}(D)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Доказать теорему о монодромии для $\Gamma(2)$ -односвязной области в \mathbb{C} .

ТЕОРЕМА 8.5. [Об аналитическом продолжении первообразного элемента.] Пусть $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – спрямляемый путь ($\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$),

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon([\gamma]) = \cup_{t \in [\alpha, \beta]} B(\gamma(t), \varepsilon)$$

– ε -окрестность $[\gamma]$ (является областью в \mathbb{C}), $\varepsilon > 0$.

Пусть $f \in \mathcal{A}(U_\varepsilon)$ и F_a – первообразная (п/о) для f в $B(a, \varepsilon)$ с условием $F_a(a) = 0$. Пусть, наконец, $\mathcal{F}_a = \mathcal{E}_a^{F_a}$ – канонический элемент.

Тогда \mathcal{F}_a аналитически продолжается вдоль γ и для семейства \mathbb{F}_γ , осуществляющего это продолжение, имеем $R_\gamma = R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon$.

Замечание. Элемент \mathcal{F}_a называется первообразным каноническим элементом для f (п/о-элементом для f) в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ при $z \in B(\gamma(t), \varepsilon)$ определим

$$F_\varepsilon^t(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} f(\zeta) d\zeta. \quad (8.1)$$

Очевидно, что $F_\varepsilon^t \in \mathcal{A}(B(\gamma(t), \varepsilon))$ и $(F_\varepsilon^t(z))' = f(z)$ в $B_\varepsilon^t = B(\gamma(t), \varepsilon)$.

Определим $\mathcal{F}^t = \mathcal{E}_{\gamma(t)}^{F_\varepsilon^t} =: (B(\gamma(t), R^t), F^t) =: (B^t, F^t)$, тогда $R^t \geq \varepsilon$. Докажем, что $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ осуществляет АП элемента \mathcal{F}_a вдоль γ . При этом $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon$.

Фиксируем t_0 . В силу непрерывности γ , существует $\delta > 0$ такое, что $\forall t \in O_\delta(t_0)$ имеем $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$. Докажем, что $O_\delta(t_0)$ можно взять в качестве $O(t_0)$ из определения АП вдоль пути для \mathbb{F}_γ . Пусть $G_\varepsilon^t = B_\varepsilon^{t_0} \cap B_\varepsilon^t \subset B^{t_0} \cap B^t$. Поскольку $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$, ясно, что $[\gamma(t_0), \gamma(t)] \subset G_\varepsilon^t \neq \emptyset$. Остается показать, что $\forall t \in O_\delta(t_0)$ имеем $F^{t_0} = F^t$ в G_ε^t (тогда $F^{t_0} = F^t$ в $B^{t_0} \cap B^t$ по теореме единственности).

По определению, для всех $z \in G_\varepsilon^t$ имеем:

$$F^{t_0}(z) = F_\varepsilon^{t_0}(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t_0]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t_0), z]} f(\zeta) d\zeta,$$

$$F^t(z) = F_\varepsilon^t(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t_0]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t_0), \gamma(t)]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Так как в G_ε^t имеем $(F^t)' = (F^{t_0})' = f$, нам остается установить, что $F^t(\gamma(t)) = F^{t_0}(\gamma(t))$. Последнее непосредственно (в силу интегральной теоремы Коши в односвязной области $B_\varepsilon^{t_0}$) следует из равенств

$$F^t(\gamma(t)) - F^{t_0}(\gamma(t)) = \int_{\gamma|_{[t_0, t]}} f(\zeta) d\zeta - \int_{[\gamma(t_0), \gamma(t)]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Замечание. Спрямоляемость пути γ была нужна для возможности интегрирования по нему. \square

СЛЕДСТВИЕ 8.5.1. *Теорема 8.5 верна без условия спрямоляемости пути γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть мы находимся в условиях теоремы 8.5, за исключением условия спрямоляемости γ , т.е. теперь $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольный путь. Найдем путь $\lambda = \lambda_{ab} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, который является вписанной в γ ломаной и для которого верно $\|\gamma - \lambda\|_{[\alpha, \beta]} < \varepsilon/3$ (путь λ_{ab} существует в силу равномерной непрерывности γ на $[\alpha, \beta]$).

Путь λ спрямляем, $f \in \mathcal{A}(U_{2\varepsilon/3}([\lambda]))$, поэтому по теореме 8.5 элемент \mathcal{F}_a продолжается вдоль λ . Пусть $\mathbb{F}_\lambda = \{\mathcal{F}_\lambda^t = (B(\lambda(t), R_\lambda^t), F_\lambda^t)\}_{[\alpha, \beta]}$ – семейство, осуществляющее указанное продолжение. Тогда $R_\lambda = R_\lambda(\mathbb{F}_\lambda) \geq 2\varepsilon/3$. По теореме 8.2 (о продолжении по «близким» путям) элемент \mathcal{F}_a продолжается и вдоль γ , причем из ее доказательства следует, что $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon/3$.

Пусть $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), F_\gamma^t)\}_{[\alpha, \beta]}$ – семейство, осуществляющее продолжение элемента \mathcal{F}_a вдоль γ . Из доказательств теорем 8.2 и 8.5 следует, что $(F_\gamma^t(z))' = f(z)$ в $B(\gamma(t), \varepsilon/3)$ (то, что $(F_\lambda^t(z))' = f(z)$ в $B(\lambda(t), 2\varepsilon/3)$ видно из явной формулы для случая спрямляемого пути λ , а F_γ^t есть просто переразложение F_λ^t в ряд Тейлора с центром в точке $\gamma(t) \in B(\lambda(t), 2\varepsilon/3)$). Но тогда (по теореме единственности) функция F_γ^t должна быть голоморфна по крайней мере в $B(\gamma(t), \varepsilon)$, где голоморфна ее производная $f(z)$. Откуда $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. В условиях следствия 8.5.1 определим

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F_b(b) - F_a(a) = F_b(b).$$

Напомним, что элемент $\mathcal{F}_b = (B_b, F_b)$ – результат продолжения \mathcal{F}_a вдоль γ . Таким образом, если $f \in \mathcal{A}(U([\gamma]))$, где $U([\gamma])$ – некоторая окрестность носителя пути γ , то определен интеграл от f по этому пути, который для спрямляемых путей совпадает с определенным ранее.

СЛЕДСТВИЕ 8.5.2. *Пусть D – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$, γ_0 и γ_1 – пути в D , определенные на $[0, 1]$.*

$$\text{Если } \gamma_0 \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1, \text{ то } \int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow D$ – (1)-гомотопия в D между γ_0 и γ_1 . Обозначим через $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)|_{t \in [0, 1]}$ – s -й путь гомотопии ($s \in [0, 1]$), $\gamma_s(0) = a$, $\gamma_s(1) = b$. Результат продолжения п/о-элемента \mathcal{F}_a для f вдоль γ_s при любом $s \in [0, 1]$ один и тот же (по теореме 8.3), обозначим его через $\mathcal{F}_b = (B_b, F_b)$. Тогда $\int_{\gamma_s} f(z) dz = F_b(b)$. В частности, $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 8.2. Пусть D – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$, γ_0 и γ_1 – пути на $[0, 1]$ в D . Доказать, что если $\gamma_0 \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$, то $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.

9. Лекция 9. Следствия. Полная аналитическая функция. Точки ветвления многозначных ветвей ПАФ.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть область D в \mathbb{C} является $\Gamma(1)$ -односвязной, $f \in \mathcal{A}(D)$, причем $f(z) \neq 0$ в D . Тогда существует функция $g \in \mathcal{A}(D)$, такая, что $g(z) \in \text{Ln}(f(z))$ при всех $z \in D$. Т.е. g – голоморфная ветвь m -функции $\text{Ln}(f(z))$ в D , или $f = \exp(g)$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $a \in D$ и канонический элемент $\mathcal{H}_a = (B_a, h_a)$, $h'_a(z) = f'(z)/f(z)$ в некоторой окрестности точки a , $h_a(a) = 0$. По следствию 8.5.1, примененному к функции $f'(z)/f(z)$, \mathcal{H}_a продолжается вдоль любого пути γ_{ab} , $[\gamma_{ab}] \subset D$. По теореме 8.4 найдется функция $h \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $\forall b \in D$ результат продолжения элемента \mathcal{H}_a по любому пути γ_{ab} в D есть \mathfrak{A}_b^h . В частности, для функции h имеем: $h(a) = 0$, $h'(z) = f'(z)/f(z)$ в D .

В качестве искомой функции $g(z)$ можно взять $g(z) = h(z) + \underset{(o)}{\text{Ln} f(a)}$. Действительно, для $g(z)$ имеем: $g'(z) = f'(z)/f(z)$, $g(a) \in \text{Ln} f(a)$. При этом множество $\{z \in D \mid g(z) \in \text{Ln} f(z)\}$ открыто и замкнуто в D , поэтому совпадает с D , так что g – действительно искомая функция. \square

УПРАЖНЕНИЕ 9.1. Доказать аналог следствия 9.1 для $\Gamma(2)$ -односвязной области D в \mathbb{C} .

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Для $\Gamma(1)$ -односвязной (или $\Gamma(2)$ -односвязной) области D в \mathbb{C} и функции $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ в D , при любом натуральном $n \geq 2$ найдется функция $g_n \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $f(z) = (g_n(z))^n$, $\forall z \in D$; т.е. g_n – голоморфная ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(z)$ – голоморфная ветвь многозначной функции $\text{Ln} f(z)$ в D . Искомая функция $g_n(z) = \exp(g(z)/n)$. \square

СЛЕДСТВИЕ 9.3. Если D – $\Gamma(1)$ -односвязная (или $\Gamma(2)$ -односвязная) область в \mathbb{C} , $D \neq \mathbb{C}$, то D конформно эквивалентна $B_1 = \{|z| < 1\}$. Этим завершается доказательство теоремы 6.5 (об эквивалентности определений односвязной области в \mathbb{C}).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 4.3 (Римана), свойство односвязности области D используется только для построения в этой области голоморфных ветвей квадратных корней из голоморфных функций, не имеющих нулей в D . С учетом следствия 9.2, теперь мы умеем строить такие ветви в $\Gamma(1)$ - и $\Gamma(2)$ -односвязных областях. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, \mathcal{F}_a – некоторый фиксированный канонический элемент. *Полной аналитической функцией (ПАФ в смысле Вейерштрасса)*, определяемой элементом \mathcal{F}_a , называется совокупность Φ всех канонических элементов, полученных из \mathcal{F}_a аналитическим продолжением по всем путям в \mathbb{C} с началом в точке a , по которым продолжение возможно. Через D_Φ обозначается объединение кругов всех элементов из Φ (D_Φ называется *областью определения ПАФ Φ*).

Замечание 1. ПАФ Φ определяется любым своим элементом.

Замечание 2. Множество D_Φ – открытое связное множество, т.е. действительно является областью. По определению, $\forall b \in D_\Phi$ найдется элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi$ – канонический элемент с центром b .

ТЕОРЕМА 9.1. [Пуанкаре-Вольтерра] Если Φ – ПАФ, $b \in D_\Phi$, то число элементов из Φ с центром в точке b не более чем счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $b \in D_\Phi$ и некоторый элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi$ с центром в точке b . Все другие элементы $\tilde{\mathcal{F}}_b \in \Phi$ с центром в точке b получаются из \mathcal{F}_b с помощью АП по замкнутым путям с началом и концом b .

Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_b$ получен из \mathcal{F}_b с помощью АП вдоль пути $\gamma = \gamma_{bb} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$. Пусть $R_\gamma > 0$ – минимальный радиус из предложения 7.3 для указанного продолжения. Существует ломаная $\lambda = \lambda_{bb} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = b$, такая, что $\|\gamma - \lambda\|_{[\alpha, \beta]} < R_\gamma$ и все вершины ломаной λ имеют рациональные координаты (кроме начала и конца b). По теореме 8.2 (об АП по близким путям) результаты продолжения элемента \mathcal{F}_b по γ и по λ совпадают. Остается заметить, что совокупность всех возможных ломаных с началом и концом b и остальными вершинами в точках с (обеими) рациональными координатами не более чем счетна. \square

ПРИМЕР 9.1 (ПАФ $Ln(z - z_0)$). Фиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Напомним обозначения (при $z_0 = 0$ все нижние индексы z_0 в этих обозначениях опускаются).

Пусть $\mathbb{C}_{z_0b} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Для $a \in \mathbb{C}_{z_0b}$ определим исходный элемент:

$$\mathcal{L}_{z_0a} = \mathfrak{D}_a^{l_{z_0a}} = \left(B(a, |a - z_0|), l_{z_0a}(z) \right), \quad l_{z_0a}(z) = \begin{matrix} \ln(z - z_0) \\ (\arg(a - z_0) - \pi, \arg(a - z_0) + \pi) \end{matrix}.$$

Для произвольного пути $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = a$, пусть $\varphi(t)$ – непрерывная ветвь м-функции $Arg(\gamma(t) - z_0)$ на $[\alpha, \beta]$, для которой $\varphi(\alpha) = \arg(a - z_0) \in (-\pi, \pi]$. Определим функции

$$l_{z_0\gamma}^t(z) = \begin{matrix} \ln(z - z_0) \\ (\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi) \end{matrix}.$$

При этом $(l_{z_0\gamma}^t(z))' = 1/(z - z_0)$. Элемент \mathcal{L}_{z_0a} продолжается вдоль пути γ . Семейство, осуществляющее это продолжение, имеет вид:

$$\mathbb{L}_{z_0\gamma} = \left\{ \mathcal{L}_{z_0\gamma}^t = \left(B(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|), l_{z_0\gamma}^t(z) \right) \right\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

Ясно, что $R_\gamma = \min_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - z_0|$. Из элемента \mathcal{L}_{z_0a} можно с помощью АП получить все элементы \mathcal{L}_{z_0b} , $b \neq z_0$. Если же путь γ проходит через точку z_0 , то продолжения вдоль этого пути элемента \mathcal{L}_{z_0a} не существует (доказать).

Получаем, что для каждой точки $b \neq z_0$ множество всех различных элементов с центром b в рассматриваемой ПАФ имеет вид $\{\mathcal{L}_{z_0b}^k = \mathcal{L}_{z_0b} + 2\pi i k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. При этом, если $\gamma = \gamma_{bb} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$ – путь, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$ и $n_{z_0\gamma} = ind_\gamma(z_0)$, то результатом продолжения элемента $\mathcal{L}_{z_0b}^k$ вдоль γ является элемент $\mathcal{L}_{z_0b}^k + 2\pi i n_{z_0\gamma}$. Прибавление константы к элементу означает, что константа прибавляется к функции указанного элемента, а радиус элемента не меняется.

Указанная ПАФ обозначается $Ln(z - z_0)$. Ясно, что здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0b}$.

ПРИМЕР 9.2 (ПАФ $(z - z_0)^p$). Здесь $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ фиксировано и $z_0 \in \mathbb{C}$. Используются обозначения из предыдущего примера. При $a \in \mathbb{C}_{z_0b}$ определим исходный элемент

$$\mathcal{P}_{z_0a}^p = \left(B(a, |a - z_0|), (z - z_0)_a^p \right), \quad \rho_{z_0a}^p(z) := (z - z_0)_a^p = \exp(p l_{z_0a}(z)),$$

который аналитически продолжается вдоль любого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = a$. Семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид:

$$\mathbb{P}_{z_0\gamma}^p = \left\{ \mathcal{P}_{z_0\gamma}^{pt} = \left(B(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|), \rho_{z_0\gamma}^{pt}(z) \right) \right\}, \quad \rho_{z_0\gamma}^{pt}(z) = \exp(p l_{z_0\gamma}^t(z)),$$

где функция $l_{z_0\gamma}^t(z)$ определена в примере 9.1. Поскольку экспонента – целая функция, окрестности $O(t_0)$ из определения АП для семейства $\mathbb{P}_{z_0\gamma}^p$ можно брать такие же, как для $\mathbb{L}_{z_0\gamma}$. Аналогично предыдущему примеру, из элемента $\mathcal{P}_{z_0a}^p$ можно с помощью АП получить все элементы $\mathcal{P}_{z_0b}^p$, $b \neq z_0$.

Пусть есть элемент $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ и путь $\gamma = \gamma_{bb} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, $n_{z_0\gamma} = \text{ind}_\gamma(z_0)$. Тогда результатом продолжения элемента $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ вдоль γ является элемент $\mathcal{P}_{z_0b}^p e^{p2\pi i n_{z_0\gamma}}$, т.е. функция элемента $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ умножается на постоянную $e^{p2\pi i n_{z_0\gamma}}$, а круг не меняется. При $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ число разных элементов нашей ПАФ над каждой точкой $b \neq 0$ будет конечным, при $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ – бесконечным (счетным). Указанная ПАФ обозначается $(z - z_0)^p$. Здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0b}$.

Рассмотрим подробнее случай $p = 1/n$, $n \geq 2$ натурально. Представим $n_{z_0\gamma} = kn + q$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда

$$e^{(1/n)2\pi i n_{z_0\gamma}} = (e^{2\pi i})^k e^{(q/n)2\pi i} = e^{2\pi i q/n} \in \sqrt[n]{1}.$$

Следовательно, над каждой точкой $b \neq z_0$ имеется ровно n различных элементов из ПАФ $(z - z_0)^{1/n}$ (она же $\sqrt[n]{z - z_0}$), соответствующих различным значениям q (они отличаются множителями $e^{2\pi i q/n}$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. Пусть Φ – ПАФ, D_Φ – ее область определения, $D_1 \subset D_\Phi$ – область. Пусть $\mathcal{F}_b \in \Phi$ – элемент с центром в точке $b \in D_1$, который продолжается вдоль любого пути γ_b в D_1 с началом в точке b . Совокупность различных элементов, полученных в результате всех таких продолжений, обозначим через Φ_1 . Будем говорить, что Φ_1 – (многозначная, вообще говоря) *аналитическая ветвь ПАФ Φ над D_1* , определяемая элементом \mathcal{F}_b .

В указанных условиях число $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ элементов из Φ_1 с центром в каждой из точек $c \in D_1$ – одно и то же (поэтому в этом случае Φ_1 еще называют *n -значной аналитической ветвью ПАФ Φ над D_1*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Пусть (в условиях предыдущего определения) $D_2 \subset D_1$ – еще одна область, и функция $f \in \mathcal{A}(D_2)$ такова, что $\forall c \in D_2$ имеем $\mathcal{E}_c^f \in \Phi_1$. Тогда говорят, что f есть *голоморфная* (следовательно, однозначная) *ветвь для аналитической ветви Φ_1 в D_2* .

Замечание 1. В определении 9.3 вместо Φ_1 полезно взять и всю Φ (соответственно, вместо D_1 всю D_Φ), даже если Φ не является аналитической ветвью над D_Φ .

Замечание 2. Пусть в условиях определения 9.2 область D_1 односвязна. Тогда по теореме о монодромии найдется $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$ такая, что

- (1) $\forall c \in D_1$ имеем $\mathcal{E}_c^{f_1} \in \Phi_1$;
- (2) $\forall c \in D_1$ и $\forall \mathcal{F}_c \in \Phi_1$ имеем $\mathcal{F}_c = \mathcal{E}_c^{f_1}$,

т.е. f_1 – единственная голоморфная ветвь для Φ_1 в D_1 , причем f_1 и Φ_1 в известном смысле можно отождествить.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Пусть в условиях определения 9.2 область $D_2 \subset D_1$. Пусть $\{f_j\}_{j \in J}$ – семейство различных функций в D_2 , обладающее следующими свойствами:

- (1) $\forall j \in J$ функция f_j есть голоморфная ветвь для Φ_1 в D_2 ;
- (2) $\forall c \in D_2$ и $\forall \mathcal{F}_c \in \Phi_1$ найдется $j \in J$ с условием $\mathcal{F}_c = \mathcal{E}_c^{f_j}$.

Тогда говорят, что Φ_1 *распадается над D_2 на голоморфные ветви $\{f_j\}_{j \in J}$* .

Замечание 1. По теореме Пуанкаре-Вольтерра указанное семейство $\{f_j\}_{j \in J}$ не более чем счетно.

Замечание 2. Замечание 1 к определению 9.3 полезно учесть и здесь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5. В условиях определения 9.2 пусть $z_0 \in D_1$, тогда $\exists \delta > 0$ с условием $D_2 = B(z_0, \delta) \subset D_1$. Поскольку D_2 односвязна, Φ_1 распадается над D_2 на голоморфные ветви. Говорят, что точка z_0 – *правильная для Φ_1* (Φ_1 аналитична над z_0 , Φ_1 аналитична над D_1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.6. Пусть $D_1 = B'(z_0, \delta) \subset D_\Phi$ (сама z_0 может как принадлежать D_Φ , так и не принадлежать). Пусть $b \in D_1$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$, Φ_1 – аналитическая ветвь Φ над D_1 , определяемая элементом \mathcal{F}_b (согласно определению 9.2, \mathcal{F}_b продолжается вдоль любого пути в D_1 с началом в точке b). Возможны три случая:

(1) После одного обхода точки z_0 (по пути в D_1) элемент \mathcal{F}_b переходит в себя. Из теоремы о монодромии, примененной в двух односвязных областях (полученных из D_1 с помощью разрезов по двум разным радиусам, не проходящим через b), найдется функция $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$, определяющая Φ_1 (т.е. Φ_1 , распадающаяся на одну голоморфную ветвь f_1 над D_1 , является однозначной над D_1). Следовательно, $\forall c \in D_1$ единственный элемент $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$ также при обходе вокруг z_0 переходит в себя.

В этом случае говорят, что z_0 является *изолированной особой точкой однозначного характера для Φ_1* ; она классифицируется также, как для f_1 – голоморфной функции в проколотой окрестности z_0 (устраняемая, полюс некоторого порядка, существенно особая);

(2) найдется $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ такое, что элемент \mathcal{F}_b после $1, \dots, (n-1)$ обходов в D_1 точки z_0 переходит в элемент, отличный от \mathcal{F}_b , а после n обходов переходит в \mathcal{F}_b (то же будет $\forall c \in D_1$ и $\forall \mathcal{F}_c \in \Phi_1$); тогда говорят, что z_0 – *точка ветвления порядка n для Φ_1* (или что Φ_1 имеет над точкой z_0 ветвление порядка n);

(3) при любом натуральном числе обходов вокруг z_0 в D_1 элемент \mathcal{F}_b не переходит в себя; тогда говорят, что z_0 – *точка ветвления бесконечного порядка (логарифмическая точка ветвления)* для Φ_1 (или что Φ_1 имеет над точкой z_0 логарифмическое ветвление).

Так, в примере 9.1 (для ПАФ $\Phi = Ln(z - z_0)$) точки z_0 и ∞ – логарифмические точки ветвления при $D_1 = D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\Phi_1 = \Phi$. В примере 9.2 (для ПАФ $\Phi = \sqrt[n]{z - z_0}$, $n \in \{2, 3, \dots\}$) точки z_0 и ∞ – точки ветвления порядка n при $D_1 = D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\Phi_1 = \Phi$.

Укажем в чем состоит *полное описание ПАФ Φ* .

1. Выбрать исходный элемент $\mathcal{F}_a \in \Phi$, обсудить его каноничность. Отметим, что даже формула элементарной функции может не задать корректно ПАФ. Так, формула $\sqrt{z^2}$ задает две однозначные ПАФ $\Phi(z) = z$ и $\Phi(z) = -z$ в \mathbb{C} .

2. Установить вдоль каких путей этот элемент продолжается, а вдоль каких – нет (с обоснованием); выписать семейства, осуществляющие эти продолжения. Найти область определения D_Φ .

3. Указать сколько различных элементов данной ПАФ имеют своим центром произвольную точку $b \in D_\Phi$, как эти элементы связаны друг с другом.

4. Найти и классифицировать все ИОТ *ветвей* ПАФ Φ . Отметим, что одна и та же точка $z_0 \in D_\Phi$ может иметь разную классификацию у разных ветвей ПАФ Φ . Поэтому следует указывать: сколько различных ветвей имеют изолированную особенность *над этой точкой* и классифицировать *каждую* из них.

Если производные всех элементов ПАФ Φ задают рациональную функцию (как в случае $Ln(z - z_0)$ или $\text{Arctg}(z - z_0)$), то для описания Φ достаточно воспользоваться линейными комбинациями *табличных* продолжений для $Ln(z - z_0)$ и, возможно, рациональных функций.

10. Лекция 10. Примеры полного описания ПАФ. АП сложного элемента.

Для ПАФ Φ и произвольной области $U \subset D_\Phi$ полезно ввести обозначение $\Phi|_U$ – совокупность всех элементов из Φ с центрами в U .

Если производные всех элементов ПАФ Φ задают рациональную функцию (как в случае $Ln(z - z_0)$, или в следующем примере), то для описания Φ достаточно воспользоваться линейными комбинациями *табличных* продолжений для $Ln(z - z_0)$ (и, возможно, просто рациональными функциями).

ПРИМЕР 10.1. [ПАФ $\Phi = \text{Arctg}(z)$].

1. Исходный элемент $\mathcal{F}_0 = \mathfrak{D}_0^{\text{arctg}(z)} = (B(0, 1), \text{arctg}(z))$ – канонический (из табличных тейлоровских разложений). Находим производную:

$$(\text{arctg}(z))' = 1/(z^2 + 1) = \frac{i/2}{z + i} + \frac{-i/2}{z - i},$$

откуда (уравнивая значения у двух рассматриваемых п/о в точке 0) получаем:

$$\mathcal{F}_0 = \left(B(0, 1), \frac{i}{2}l_{-i0}(z) + \frac{-i}{2}l_{i0}(z) + \pi/2 \right).$$

Таким образом, можно воспользоваться табличными ПАФ $Ln(z + i)$ и $Ln(z - i)$.

2. Конкретно, пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, $\gamma(\alpha) = a = 0$, – путь. Тогда семейство, осуществляющее нужное АП \mathcal{F}_0 вдоль γ , имеет вид:

$$\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}, \quad \mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R^t), f^t),$$

$$R^t = \min\{|\gamma(t) + i|, |\gamma(t) - i|\}, \quad f^t(z) = \frac{i}{2}l_{-i\gamma}^t(z) + \frac{-i}{2}l_{i\gamma}^t(z) + \pi/2$$

(см. определение $l_{z_0\gamma}^t(z)$ в примере 9.1; здесь нужно коротко объяснить: почему R^t именно такой, и почему по путям, проходящим через $-i$ или i , нужного АП не существует). Таким образом, $D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ и Φ является (своей) аналитической ветвью над $D_1 = D_\Phi$.

3. Пусть $b \in D_\Phi$, и $\mathcal{F}_b = (B(b, R_b), f_b) \in \Phi$, тогда $R_b = \min\{|b + i|, |b - i|\}$. Пусть путь γ с началом и концом в точке b не проходит через точки $-i$ и i . Положим $n_- = \text{ind}_\gamma(-i)$, $n_+ = \text{ind}_\gamma(i)$. Тогда элемент \mathcal{F}_b в результате АП вдоль γ перейдет в элемент $\mathcal{F}_b + (i/2)2\pi in_- + (-i/2)2\pi in_+ = \mathcal{F}_b - \pi n_- + \pi n_+$. Следовательно, над точкой b имеется счетное число элементов из Φ с указанными равными радиусами R_b , и отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные πk , $k \in \mathbb{Z}$.

4. Из указанных соображений сразу получаем, что точки $-i$ и i являются точками ветвления бесконечного порядка для *аналитических ветвей* $\Phi|_{B'(-i, 2)}$ и $\Phi|_{B'(i, 2)}$ соответственно (по одному логарифмическому ветвлению). Над проколотой окрестностью $D_2 = \{1 < |z| < +\infty\}$ точки ∞ ПАФ Φ (как аналитическая ветвь над $D_1 = D_\Phi$) распадается на счетное число голоморфных (однозначных) ветвей $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$; при правильной нумерации справедливы равенства: $f_j - f_{j'} = \pi(j - j')$. Действительно, если $b \in D_2$ и путь γ_{bb} обходит $+1$ раз точку ∞ , оставаясь в D_2 , то он обходит одновременно по -1 разу точки i и $-i$. Поэтому любой элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi|_{D_2}$ после АП вдоль γ_{bb} перейдет в себя.

Чтобы перейти на другую ветвь в D_2 надо обойти точку $-i$ или i .

Наконец, каждая голоморфная ветвь f_j имеет в точке ∞ устранимую особенность, поскольку f_j ограничена в некоторой проколотой окрестности точки ∞ . Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $f_j'(z) = 1/(z^2 + 1)$ и применить формулу Ньютона-Лейбница (проверить!).

Заметим, что $\Phi|_{D_2}$ не является аналитической ветвью нашей ПАФ Φ над D_2 , поэтому некорректно говорить, что $\Phi|_{D_2}$ распадается над D_2 на голоморфные ветви. Тем не менее, Φ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_1 = D_\Phi$ и Φ распадается над D_2 на голоморфные ветви $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

Следующий пример также входит в экзаменационную программу.

ПРИМЕР 10.2. [ПАФ $\Phi = \mathcal{J}\mathcal{K}^{-1}(z)$].

Исходный элемент имеет вид $\mathfrak{E}_0^f = (B(0, 1), f)$, где $f(z) = \mathcal{J}\mathcal{K}_+^{-1}(z)|_{B(0,1)}$, $f(0) = i$. Решая уравнение $\mathcal{J}\mathcal{K}(w) = z$, находим $w \in z + \sqrt{z^2 - 1} =: \mathcal{J}\mathcal{K}^{-1}(z)$, откуда (проверить, что $f(B(0, 1)) \subset \Pi_+$; *найти $f(B(0, 1))$)

$$f(z) = z + (z + 1)_{(-\pi, \pi)}^{1/2} (z - 1)_{(0, 2\pi)}^{1/2} = z + \rho_{-1,0}^{1/2}(z) \cdot \rho_{1,0}^{1/2}(z).$$

Покажем, что элемент \mathfrak{E}_0^f продолжается вдоль любого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, $\gamma(\alpha) = 0$.

Сначала выпишем семейство, осуществляющее АП вдоль пути $\sigma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ табличного элемента (здесь $a \neq z_0$ фиксировано)

$$\mathcal{P}_{z_0 a}^{1/2} = \left(B(a, |a - z_0|), \rho_{z_0, a}^{1/2}(z) \right), \quad \rho_{z_0, a}^{1/2}(z) = \exp((1/2)l_{z_0 a}(z)).$$

Оно имеет вид $\{\mathcal{P}_{z_0 \sigma}^{(1/2), t}\}_{[\alpha, \beta]}$, где

$$\mathcal{P}_{z_0 \sigma}^{(1/2), t} = \left(B(\sigma(t), |\sigma(t) - z_0|), \rho_{z_0 \sigma}^{(1/2), t}(z) \right), \quad \rho_{z_0 \sigma}^{(1/2), t}(z) = \exp((1/2)l_{z_0 \sigma}^t(z)).$$

В частности, табличная ПАФ $(z - z_0)^{1/2}$ является аналитической ветвью над всей своей областью определения $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} = \mathbb{C}_{z_0 b}$, с двумя точками ветвления второго порядка z_0 и ∞ для всей этой ПАФ (ветви) над $\mathbb{C}_{z_0 b}$.

Искомое АП элемента \mathfrak{E}_0^f вдоль γ имеет вид $\{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)\}_{[\alpha, \beta]}$, где $R_\gamma^t = \min\{|\gamma(t) - 1|, |\gamma(t) + 1|\}$ и

$$f_\gamma^t(z) = z + \rho_{-1\gamma}^{(1/2), t}(z) \cdot \rho_{1\gamma}^{(1/2), t}(z), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

(Почему R^t именно такой, и почему по путям, проходящим через -1 или 1 , нужного АП не существует?)

Каждая конечная точка $b \neq \pm 1$ – правильная для нашей ПАФ; имеется два элемента нашей ПАФ с центром в этой точке. Обозначим их $\mathcal{F}_b = (B(b, R_b), f_b)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_b = (B(b, R_b), \tilde{f}_b)$, $R_b = \min\{|b - 1|, |b + 1|\}$. При однократном обходе (только) одной из точек -1 или $+1$ элемент \mathcal{F}_b переходит в $\tilde{\mathcal{F}}_b$, и наоборот. При этом $\tilde{f}_b(z) = 1/f_b(z)$ в $B(b, R_b)$ (почему?). ПАФ Φ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Точки -1 и 1 являются точками ветвления второго порядка для аналитических ветвей $\Phi|_{B'(-1, 2)}$ и $\Phi|_{B'(1, 2)}$ соответственно (по одному ветвлению). Над проколотой окрестностью $D_2 = \{1 < |z| < +\infty\}$ точки ∞ ПАФ Φ (как аналитическая ветвь над областью $D_1 = D_\Phi$) распадается на две голоморфные ветви: одна с полюсом первого порядка, другая устранимая в точке ∞ . Последнее нетрудно установить, доказав, что функции $\mathcal{J}\mathcal{K}_o^{-1}$ и $\mathcal{J}\mathcal{K}_i^{-1}$ являются этими голоморфными ветвями в D_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Доказать, что каждая голоморфная ветвь *многозначной* функции $\text{Ln}(z)$ ($\sqrt[n]{z}$, $\text{Arctg}(z)$, $\mathcal{J}\mathcal{K}^{-1}(z)$) является голоморфной ветвью для некоторой *аналитической ветви* соответствующей ПАФ.

УПРАЖНЕНИЕ 10.2. Очень поучительным является полное описание ПАФ $\text{Ln}(\sqrt[3]{z}\mathcal{J}\mathcal{K}(z))$.

В случае, когда производная исходного элемента (и, значит, любого элемента) ПАФ "задает" (однозначную) мероморфную функцию в \mathbb{C} (не обязательно рациональную), удобно использовать теорему 8.5 (и следствие 8.5.1) о продолжении п/о элемента с формулой (8.1).

ПРИМЕР 10.3. [ПАФ $\Phi = Ln(\sin(z))$]

1. Исходный элемент $\mathcal{F}_a = \mathfrak{D}_a^{\ln(\sin(z))} = (B(a, |a|), f_a)$, где $a = \pi/2$, $f_a \in \mathcal{A}(B(a, |a|))$ совпадает с $\ln(\sin(z))$ в некоторой окрестности точки a . Заметим, что $f'_a(z) = (\ln(\sin(z)))' = \text{ctg}(z)$ в некоторой окрестности точки a , и, следовательно, во всем круге голоморфности $B(a, |a|)$ функции $\text{ctg}(z)$ (откуда и берется радиус $R_a = \pi/2$). По теореме единственности, поскольку функция $\text{ctg}(z)$ мероморфна в \mathbb{C} (имеет простые полюса πk , $k \in \mathbb{Z}$), для любого элемента $\mathcal{F}_b = (B_b, f_b)$, принадлежащего нашей ПАФ Φ (определяемой элементом \mathcal{F}_a), мы имеем $f'_b(z) = \text{ctg}(z)$ в B_b . Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 8.5 (и следствием 8.5.1) о продолжении п/о элемента и формулой (8.1).

2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D = \mathbb{C} \setminus \{\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\gamma(\alpha) = a$, – путь. По теореме 8.5 о продолжении п/о элемента (её следствию 8.5.1 и формуле (8.1)) семейство $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ ($\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), F_\gamma^t)$), осуществляющее АП \mathcal{F}_a вдоль γ , имеет вид:

$$F_\gamma^t(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t]}} \text{ctg}(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} \text{ctg}(\zeta) d\zeta, \quad z \in B(\gamma(t), R_\gamma^t),$$

при этом ясно, что $R^t = \min\{|\gamma(t) - \pi k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Если путь γ (с началом в точке a) проходит хотя бы через одну из точек множества $P = \{\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, т.е. не лежит целиком в D , то АП \mathcal{F}_a вдоль γ не существует (доказать!). Таким образом, $D_\Phi = D = \mathbb{C} \setminus P$ и ПАФ Φ аналитична над D_Φ .

3. Пусть теперь $b \in D$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$ и путь γ_k с началом и концом в точке b обходит точку πk ровно +1 раз, не обходя при этом никакую другую точку из P . Из формулы (8.1) (её аналога для \mathcal{F}_b и γ_k), получаем, что при АП элемента \mathcal{F}_b вдоль γ_k элемент \mathcal{F}_b перейдет в элемент

$$\mathcal{F}_b + \int_{\gamma_k} \text{ctg}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F}_b + 2\pi i \operatorname{res}_{\pi k}(\text{ctg}(z)) = \mathcal{F}_b + 2\pi i.$$

Следовательно, над точкой b имеется счетное число элементов из Φ с равными радиусами $R_b = \min\{|b - \pi k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$, и отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные $2\pi i j$, $j \in \mathbb{Z}$.

4. В результате получаем, что каждая точка $z_k = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) является точкой ветвления бесконечного порядка (по одному логарифмическому ветвлению в $B'(z_k, \pi)$ для аналитической ветви $\Phi|_{B'(z_k, \pi)}$). Точка ∞ не является ИОТ для Φ , поэтому она не подлежит классификации.

ТЕОРЕМА 10.1. [О продолжении сложного элемента] Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ – канонический элемент с центром a , который продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, и пусть

$$\{\mathcal{F}^t = (B^t, f^t) = (B(\gamma(t), R^t), f^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$$

– семейство, осуществляющее указанное продолжение. Определим путь

$$\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть элемент $\mathcal{G}_A = (B_A, g_A)$ с центром $A = \Gamma(\alpha)$ аналитически продолжается вдоль пути Γ , и

$$\{\mathcal{G}^t = (\tilde{B}^t, g^t) = (B(\Gamma(t), \tilde{R}^t), g^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$$

– семейство, осуществляющее это продолжение.

Тогда элемент $\mathcal{H}_a = \mathfrak{D}_a^{g_A \circ f^a}$ продолжается вдоль пути γ , причем семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t}\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо установить, что Γ – путь, и проверить, что указанное семейство $\{\mathcal{H}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ канонических элементов удовлетворяет условию 2) определения 7.5.

Фиксируем любую $t_0 \in [\alpha, \beta]$. По утверждению 1) предложения 7.3 существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ найдется связная открытая окрестность $O_1^\delta(t_0)$ (зависящая от δ) такая, что при всех $t \in O_1^\delta(t_0)$ выполняются следующие свойства:

- (1) $B_\delta = B(z_0, \delta) \subset B^t$, где $z_0 = \gamma(t_0)$;
- (2) $\gamma(t) \in B_\delta$, $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_0}$, откуда $f^t = f^{t_0}$ всюду в B_δ ;

следовательно, для всех $t \in O_1^\delta(t_0)$ имеем $\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = f^{t_0}(\gamma(t))$ и, значит, $\Gamma(t)$ непрерывна в окрестности точки t_0 . Так что Γ – путь на $[\alpha, \beta]$.

Аналогично, найдется $\varepsilon > 0$ и связная открытая окрестность $O_2^\varepsilon(t_0)$ такие, что при всех $t \in O_2^\varepsilon(t_0)$ выполняются следующие свойства:

- (3) $\tilde{B}_\varepsilon = B(w_0, \varepsilon) \subset \tilde{B}^t$, где $w_0 = \Gamma(t_0) = f^{t_0}(z_0)$;
- (4) $\Gamma(t) \in \tilde{B}_\varepsilon$, $\mathcal{G}^t \leftrightarrow \mathcal{G}^{t_0}$, откуда $g^t = g^{t_0}$ всюду в \tilde{B}_ε ;

(5) фиксируем указанное ε и выберем (фиксируем) столь малое $\delta \in (0, \delta_0)$, чтобы дополнительно выполнялось включение $f^{t_0}(B_\delta) \subset \tilde{B}_\varepsilon$, т.е. чтобы функция $h_0(z) = g^{t_0} \circ f^{t_0}(z)$ была голоморфна в B_δ .

Из этих свойств получаем, что при всех $t \in O_1^\delta(t_0) \cap O_2^\varepsilon(t_0)$ имеем $h_0(z) = g^t \circ f^t(z)$ в B_δ и, следовательно,

$$\mathcal{H}^t = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t} = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{h_0},$$

т.е. $\mathcal{H}^t \leftrightarrow \mathcal{H}^{t_0}$. □

Приведем пример несложного применения теоремы 10.1.

ПРИМЕР 10.4. [ПАФ $\Phi(z) = \exp(1/(1+\sqrt{z}))$]. В качестве "внутренней" берется ПАФ, определяемая элементом $\mathfrak{D}_1^{f_1}$, где $f_1(z) = 1/(1+\sqrt{z}_{(o)})$. Указанный элемент (с центром $a = 1$ и радиусом $R_1 = 1$ продолжается по всем путям $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с началом в точке 1, не проходящим через 0, а также не проходящим через 1 при нечетном числе обходов точки 0. Семейство

$$\{\mathcal{F}^t = (B^t, f^t) = (B(\gamma(t), R^t), f^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]},$$

осуществляющее указанное АП, выписывается следующим образом. Во-первых, $R^t = |\gamma(t)|$ при всех t с условием $Re(\gamma(t)) \leq 1/2$. А при $Re(\gamma(t)) > 1/2$ радиус R^t равен $|\gamma(t)|$ при "почти" четном числе обходов точки 0, и равен $\min\{|\gamma(t)|, |\gamma(t) - 1|\}$ при "почти" нечетном числе обходов точки 0 (обсудить). При этом всегда

$$f^t(z) = \frac{1 - \rho_{0\gamma}^{(1/2),t}}{1 - z}, \quad z \neq 1,$$

а в точке 1 следует учитывать устранимость для указанных продолжений при четном числе обходов точки 0 (тогда $R^t = |\gamma(t)|$), или наличие полюса 1 порядка в противном случае.

"Внешняя" ПАФ – целая, поэтому искомое семейство, осуществляющее АП исходного элемента, имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = (B^t, h^t) = (B(\gamma(t), R^t), \exp(f^t))\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

Следовательно, $D_\Phi = \mathbb{C}_b$. При этом ПАФ Φ не является аналитической ветвью над всей D_Φ , являясь таковой (двузначной) над областью $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. В точках 0 и ∞ ПАФ Φ имеет ветвления 2 порядка у аналитических ветвей $\Phi|_{B(0,1)}$ и $\Phi|_{\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}}$ соответственно. Над $B'(1, 1)$ аналитическая ветвь $\Phi|_{D_1}$ распадается на 2 голоморфные ветви, одна из которых имеет устранимость в точке 1, а другая – существенную особенность (доказать!).

11. Лекция 11. Модулярная функция и малые теоремы Пикара.

Пусть $\gamma = \partial B_1 = \{|z| = 1\}$ – единичная окружность ($B_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$). Фиксируем точки $a_0^1, a_0^2 = i, a_0^3$ на γ , делящие эту окружность на три равные части (см. рис. 11.1).

Проведем через точки a_0^1 и a_0^2 окружность Γ_0^1 , перпендикулярную γ . Часть ее внутри B_1 (без точек a_0^1 и a_0^2) назовем γ_0^1 . Аналогично проводим окружности Γ_0^2 (через a_0^2 и a_0^3 , перпендикулярно γ) и Γ_0^3 (через a_0^3 и a_0^1 , перпендикулярно γ) и обозначим их части внутри B_1 соответственно через γ_0^2 и γ_0^3 . В результате, γ_0^1, γ_0^2 и γ_0^3 ограничивают (открытый) криволинейный треугольник, который обозначим через T_0 .

При инверсии относительно окружности Γ_0^1 дуга γ_0^1 остается на месте (почечно), γ переходит в себя в силу перпендикулярности окружностей γ и Γ_0^1 , точка a_0^3 переходит в точку a_1^1 на γ , треугольник T_0 переходит в треугольник T_1^1 , ограниченный дугами γ_0^1, γ_1^1 (соединяет точки a_0^1 и a_1^1) и γ_1^2 (соединяет точки a_1^1 и a_0^2), ортогональными γ (см. рис 11.1). Аналогично, точка a_1^2 симметрична точке a_0^1 относительно Γ_0^2 , точка a_1^3 – симметрична a_0^2 относительно Γ_0^3 ; треугольники T_1^2 и T_1^3 симметричны треугольнику T_0 относительно γ_0^2 и γ_0^3 соответственно.

При симметрии относительно Γ_0^1 дуга γ_0^2 переходит в γ_1^2 , а дуга γ_0^3 – в γ_1^3 . При симметрии относительно Γ_0^2 дуга γ_0^1 переходит в γ_1^3 , а γ_0^3 – в γ_1^4 . При симметрии относительно Γ_0^3 дуга γ_0^1 переходит в γ_1^4 , а γ_0^2 переходит в γ_1^5 .

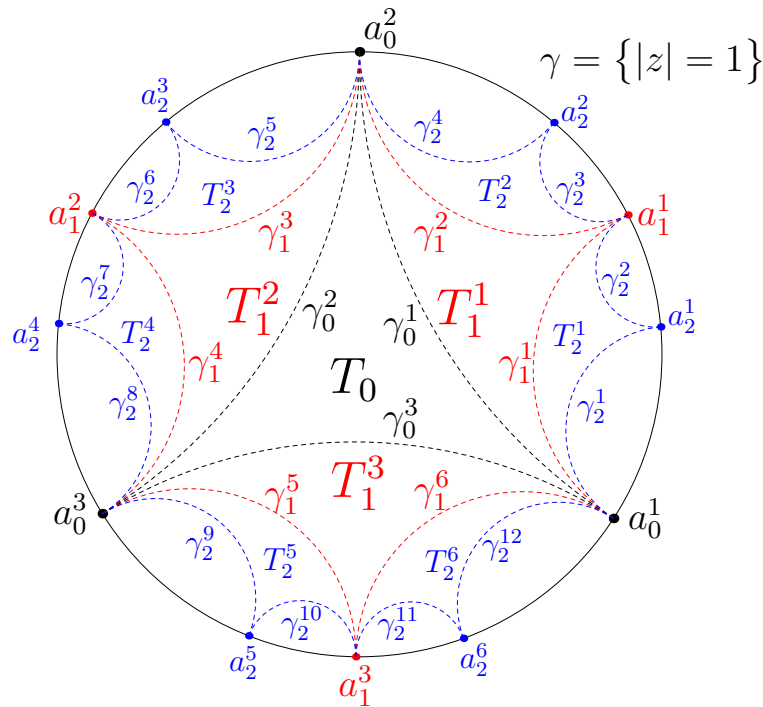


Рис. 11.1.

Все дуги $\gamma_1^k, k \in \{1, \dots, 6\}$, – части перпендикулярных γ окружностей (обозначаемых соответственно $\Gamma_1^k, k \in \{1, \dots, 6\}$), находящиеся внутри B_1 . Какие у них концевые точки, можно увидеть на рис. 11.1.

Для порядка в индексах на каждом уровне мы нумеруем объекты, начиная с точки a_0^1 и двигаясь против часовой стрелки. Нижний индекс отвечает за шаг индукции, верхний – за номер объекта на этом шаге (именно так обозначены

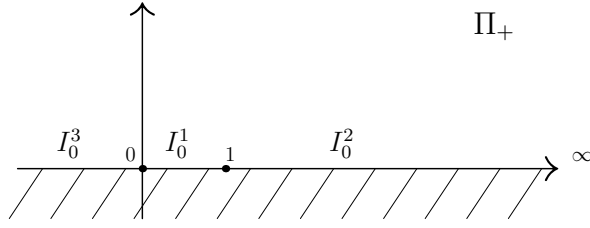


Рис. 11.2.

γ_1^k , $k \in \{1, \dots, 6\}$). Например, через T_n^j обозначен j -й открытый криволинейный треугольник n -го уровня.

Введем ещё обозначения: $P_1^j = T_0 \sqcup \gamma_0^j \sqcup T_1^j$ – "пары" первого уровня с номером $j \in \{1, 2, 3\}$, а также $D_1 = \bigcup_{j=1}^3 P_1^j$.

По теореме Римана конформно отобразим T_0 на верхнюю полуплоскость Π_+ ; тогда по теореме Каратеодори это отображение будет продолжаться до гомеоморфизма \bar{T}_0 на ${}^{\#}\bar{\Pi}_+$ (замыкание берется в $\mathbb{C}^{\#}$). Применяя дополнительно ДЛЮ-автоморфизм в Π_+ , найдем (единственное) гомеоморфное отображение $\mu_0 : \bar{T}_0 \rightarrow {}^{\#}\bar{\Pi}_+$, конформно отображающее T_0 на Π_+ , с условиями: $a_0^1 \mapsto 0$, $a_0^2 \mapsto 1$, $a_0^3 \mapsto \infty$ (откуда следует, что $\gamma_0^1 \rightarrow (0, 1) = I_0^1$, $\gamma_0^2 \rightarrow (1, +\infty) = I_0^2$, $\gamma_0^3 \rightarrow (-\infty, 0) = I_0^3$).

Введем обозначения: $\Omega_1^j = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_0^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. По принципу симметрии, для каждого $j \in \{1, 2, 3\}$ функцию μ_0 можно продолжить до конформного отображения $\mu_1^j : P_1^j \xrightarrow{\text{на}} \Omega_1^j$. Поэтому μ_0 можно продолжить до локально конформного отображения $\mu_1 : D_1 \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, где $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$.

Пусть сделан n -й шаг индукции ($n \geq 1$), т.е. построены криволинейные треугольники T_n^j , $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$, со "свободными" сторонами γ_n^k , $k = 1, \dots, 3 \cdot 2^n$, причем γ_n^{2j-1} и γ_n^{2j} – стороны треугольника T_n^j для всех $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$. Кроме того, определены "пары" P_n^j и конформные отображения $\mu_n^j : P_n^j \xrightarrow{\text{на}} \Omega_n^j$, а также локально конформное отображение $\mu_n : D_n \xrightarrow{\text{на}} \Omega$.

По индукции, криволинейный треугольник T_{n+1}^{2j-1} (соответственно, T_{n+1}^{2j}) получается из T_n^j симметрией относительно окружности Γ_n^{2j-1} , определяемой дугой γ_n^{2j-1} (соответственно, Γ_n^{2j} , определяемой дугой γ_n^{2j}). Определим также "пары" уровня $(n+1)$:

$$P_{n+1}^{2j-1} = T_n^j \sqcup \gamma_n^{2j-1} \sqcup T_{n+1}^{2j-1}, \quad P_{n+1}^{2j} = T_n^j \sqcup \gamma_n^{2j} \sqcup T_{n+1}^{2j}, \quad j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1},$$

и область

$$D_{n+1} = D_n \bigcup_{k=1}^{3 \cdot 2^n} P_{n+1}^k$$

Рисунок 11.1 соответствует окончанию второго шага индукции.

По принципу симметрии $\mu_n|_{T_n^j}$ продолжается до конформных отображений

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}^{2j-1} : P_{n+1}^{2j-1} &\xrightarrow{\text{на}} \Omega_{n+1}^{2j-1} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_n^{2j-1}, \\ \mu_{n+1}^{2j} : P_{n+1}^{2j} &\xrightarrow{\text{на}} \Omega_{n+1}^{2j} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_n^{2j}, \end{aligned}$$

где $I_n^k \in \{I_0^1, I_0^2, I_0^3\}$ для всех рассматриваемых n и k (что следует из явной формулы в доказательстве принципа симметрии). Таким образом, определено локально конформное отображение

$$\mu_{n+1} : D_{n+1} \xrightarrow{\text{на}} \Omega, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}.$$

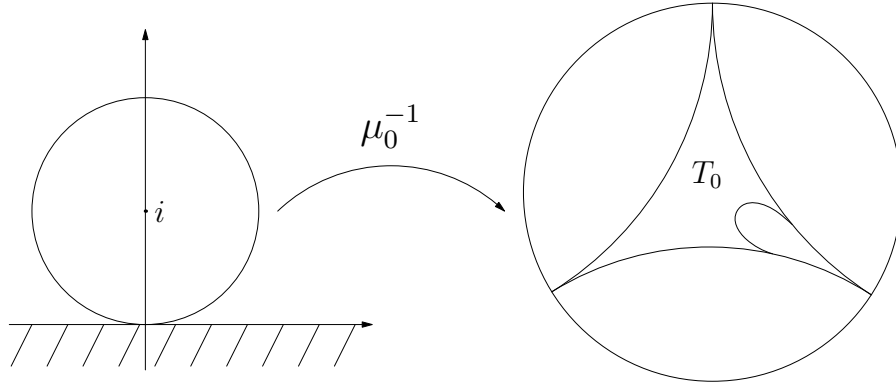


Рис. 11.3.

Пусть $D = \cup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Тогда $D \subset B_1$ – односвязная область (что легко следует, например, из её звёздности относительно нуля). В результате определено локально конформное отображение $\mu : D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, совпадающее с μ_n на D_n , $n \in \mathbb{N}$. Это отображение μ называется *модулярной функцией*.

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Доказать, что $D = B_1$ (в настоящем доказательстве этого не потребуется).

Для каждой пары P_n^j , $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$, определено конформное отображение $(\mu_n^j)^{-1} : \Omega_n^j \xrightarrow{\text{на}} P_n^j$, обратное к μ_n^j . Рассмотрим отображение $\mu_0^{-1} : \Pi_+ \rightarrow T_0$.

Положим $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{A}_i^{\mu_0^{-1}} = (B(i, R_i), g_i)$. Покажем, что радиус R_i этого элемента равен 1. Ясно, что R_i не меньше 1. Если, от противного, $R_i > 1$, то в точке 0 существовала бы ненулевая производная некоторого конечного порядка $p \geq 1$ для функции g_i (поскольку функция μ_0^{-1} непостоянна); но тогда бесконечно малый угол величины π в Π_+ с вершиной в нуле перейдет под действием g_i (а, значит, μ_0^{-1}) в бесконечно малый угол величины $p\pi$ с центром a_0^1 , чего не может быть, так как он переходит в бесконечно малый угол величины 0 (см. рис. 11.3).

Обозначим через μ^{-1} ПАФ, определяемую элементом \mathfrak{G}_i .

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Элемент \mathfrak{G}_i продолжается вдоль любого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с началом в точке i , не проходящего через точки 0 и 1 и не продолжающегося по другим путям. Следовательно, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ является областью определения ПАФ μ^{-1} и μ^{-1} аналитична над всей Ω , а все точки $b \in \Omega$ являются правильными для ПАФ μ^{-1} . Точки 0, 1, ∞ – точки логарифмического ветвления, причем над каждой из них имеется счетное число логарифмических ветвлений.

Указание (для доказательства существования АП). Построить *цепочку* (неканонических) элементов, которые "задают" нужное продолжение элемента \mathfrak{G}_i вдоль γ , используя следующие два факта. Над каждой области Ω_n^j определена голоморфная функция $(\mu_n^j)^{-1}$ (которая является голоморфной ветвью ПАФ μ^{-1}). Путь γ можно представить в виде $\gamma = \bigcup_{s=1}^S \gamma_s$, где каждый из $[\gamma_s]$ полностью содержится в одной из Ω_n^j .

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Выписать (и изобразить графически) АП элемента $\mathfrak{G}_{i/2} = \mathfrak{A}_{i/2}^{\mu_0^{-1}}$ вдоль пути $\{e^{it}/2 \mid t \in [\pi/2, 5\pi/2]\}$, а также вдоль пути

$$[i/2, 1 + i/2] \cup \{1 + e^{it}/2 \mid t \in [\pi/2, 5\pi/2]\} \cup [1 + i/2, i/2].$$

ТЕОРЕМА 11.1 (Теорема Пикара для целых функций). Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – целая функция, не являющаяся тождественной константой. Тогда f принимает (в \mathbb{C}) все значения из \mathbb{C} , кроме, быть может, одного.

Если последнее значение существует, оно называется *исключительным пикаровским значением (ИПЗ)* для f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, найдется $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, не равная тождественно константе, и различные числа a и b из \mathbb{C} , для которых $f(z) \neq a$ и $f(z) \neq b$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда целая функция $f_1(z) = (f(z) - a)/(b - a)$ не принимает значений 0 и 1. Будем считать, что $f_1 = f$.

Утверждается, что $f(\mathbb{C}) \cap B(i, 1) \neq \emptyset$. Действительно, в противном случае функция $1/(f(z) - i) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ограничена по модулю единицей, и по теореме Лиувилля является константой, а, следовательно, и f является константой, что не так. Таким образом, найдется $z_0 \in \mathbb{C}$ с условием $w_0 = f(z_0) \in B(i, 1)$.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольный путь, удовлетворяющий условию $\gamma(\alpha) = z_0$. Тогда $\mathfrak{E}_{z_0}^f$ продолжается вдоль γ , поскольку f – целая функция.

Рассмотрим путь $\Gamma(t) = f(\gamma(t)) : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, $\Gamma(\alpha) = w_0$.

Рассмотрим $\mathfrak{G}_{w_0} = \mathfrak{E}_{w_0}^{\mu^{-1}}$. Поскольку $R_i = R(\mathfrak{G}_i) = 1$, элемент \mathfrak{G}_{w_0} может быть получен из элемента \mathfrak{G}_i переразложением. Следовательно, \mathfrak{G}_{w_0} продолжается вдоль любого пути, не проходящего через 0 и 1 (в частности, вдоль Γ), и определяет ПАФ μ^{-1} .

По теореме 10.1 (о продолжении сложного элемента) элемент $\mathfrak{H}_{z_0} = \mathfrak{E}_{z_0}^{\mu^{-1} \circ f}$ аналитически продолжается вдоль γ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Показать, что множество значений всех (функций из) элементов, получающихся АП \mathfrak{H}_{z_0} по всем указанным путям, лежат в $D \subset B_1$.

Поскольку путь γ – произвольный, в результате продолжений элемента \mathfrak{H}_{z_0} по всем путям в \mathbb{C} мы получим целую функцию $h(z)$ (по теореме о монодромии), ограниченную по модулю единицей (поскольку все ее значения принадлежат B_1). Поэтому $h(z) \equiv \text{const}$, и, следовательно, $f(z) \equiv \text{const}$ в некоторой окрестности точки z_0 . Поскольку $f(z)$ – целая функция, по теореме единственности $f(z) \equiv \text{const}$ в \mathbb{C} . Это противоречие завершает доказательство теоремы 11.1. \square

ТЕОРЕМА 11.2 (Малая теорема Пикара для мероморфных функций). Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ и f не является тождественной константой. Тогда f принимает (в \mathbb{C}) все значения из \mathbb{C}^\sharp , кроме, быть может, двух (называемых ИПЗ для f).

Напомним, что условие мероморфности функции f в \mathbb{C} означает, что она голоморфна всюду в \mathbb{C} , за исключением (локально конечного множества) полюсов. Считается, что значение f в её полюсе равно ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, f не принимает в \mathbb{C} трех различных значений a, b, c из \mathbb{C}^\sharp . Если одно из них равно ∞ , то f – целая, не принимающая двух различных (конечных) значений. Если все они конечны, то функция $f_1(z) = 1/(f(z) - a)$ – целая (после устранения особенностей), не принимающая двух значений $1/(b - a)$ и $1/(c - a)$. В обоих случаях имеем противоречие с предыдущей теоремой. \square

ПРИМЕР 11.1. Функция e^z – целая с ИПЗ, равным 0. Функция $\text{tg}(z)$ – мероморфная с ИПЗ, равными $\pm i$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Доказать, что функции $f(z) = z + e^z$ (как целая) и $f(z) = z + \text{tg}(z)$ (как мероморфная) не имеют ИПЗ.

12. Лекция 12. ПАФ $\text{Arcsin}(z)$. Вычисление интегралов типа B -функций.

ПРИМЕР 12.1. [Полное описание ПАФ $\text{Arcsin}(z)$].

В качестве исходного элемента берем $\mathcal{F}_0 = (B(0, 1), f_0)$, где $f_0(z) = \arcsin(z)$. Напомним, что $\arcsin(z)$ – главная ветвь арксинуса, определенная и голоморфная в области $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$. Покажем, что \mathcal{F}_0 – канонический. Действительно, "производная" этого элемента в круге $B_0 = B(0, 1)$ по теореме единственности имеет вид

$$f_0'(z) = (\arcsin(z))' = \frac{i}{\sqrt{z+1}_{(-\pi, \pi)} \sqrt{z-1}_{(0, 2\pi)}},$$

поскольку в этом равенстве участвуют две голоморфные функции, совпадающие на $(-1, 1)$. В частности, f_0' неограничена в B_0 .

Пользуясь "табличными" ПАФ $\sqrt{z - z_0}$, мы можем продолжить элемент $\mathcal{F}'_0 = (B_0, f'_0)$ вдоль любого пути с началом в точке 0, не проходящего через точки -1 и 1 (и не можем продолжать по другим путям). При этом радиус любого из полученных элементов с центром в точке $b \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ равен $\min\{|b+1|, |b-1|\}$. Возникает ПАФ (обозначим её через Φ'), которая является аналитической ветвью над своей областью определения $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Она распадается на две голоморфные ветви (отличающиеся только знаком) над каждой из областей $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty)$ и $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. ПАФ Φ' имеет по одному ветвлению 2 порядка над $B'(-1, 2)$ и $B'(1, 2)$; над областью $\{1 < |z| < +\infty\}$ – две голоморфные ветви с устранимыми особенностями в ∞ .

По теореме о продолжении первообразного элемента мы можем продолжать исходный элемент \mathfrak{F}_0 вдоль тех же путей (не проходящих через точки -1 и 1) и с такими же радиусами: достаточно разбить рассматриваемый путь на последовательные "короткие" пути, каждый из которых полностью лежит в одной из областей Ω_j ($j \in \{0, 1, 2\}$). Таким образом, ПАФ $\Phi = \text{Arcsin}(z)$ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_\Phi = D_1 = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

Охарактеризуем особые точки -1 , 1 и ∞ ПАФ $\text{Arcsin}(z)$. Для этого посмотрим: что происходит с элементом \mathcal{F}_0 при однократном (положительном) обходе точек -1 и 1 по окружностям $\gamma_{-1} = \{-1 + e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ и $\gamma_1 = \{1 + e^{it} \mid t \in [-\pi, \pi]\}$, соответственно. При $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ положим

$$\arcsin(x + i0) = \lim_{y \rightarrow 0+} \arcsin(x + iy), \quad \arcsin(x - i0) = \lim_{y \rightarrow 0+} \arcsin(x - iy).$$

Убедимся, что

$$\arcsin(x + i0) + \arcsin(x - i0) = \pi \text{ при } x \in (1, +\infty), \quad (12.1)$$

$$\arcsin(x + i0) + \arcsin(x - i0) = -\pi \text{ при } x \in (-\infty, -1). \quad (12.2)$$

Действительно, при фиксированном $x \in (1, +\infty)$ траектории $\arcsin(x + it)$ и $\arcsin(x - it)$ (где $t > 0$ мало) симметричны относительно вещественной оси (ввиду равенства $\arcsin(\bar{z}) = \overline{\arcsin(z)}$), и при $t \rightarrow 0+$ они выходят на прямую $\{Re(z) = \pi/2\}$. Из этого вытекает равенство (12.1). Если же $x \in (-\infty, -1)$, то аналогичные траектории будут симметрично выходить на прямую $\{Re(z) = -\pi/2\}$, что дает равенство (12.2).

Рассмотрим элемент $\mathcal{F}_2^+ = (B(2, 1), f_2^+)$ (соответственно, $\mathcal{F}_2^- = (B(2, 1), f_2^-)$) с центром 2, получаемый из элемента \mathcal{F}_0 продолжением вдоль пути $\gamma_+ = \{1 + e^{-it} \mid t \in [-\pi, 0]\}$ (соответственно, $\gamma_- = \{1 + e^{it} \mid t \in [-\pi, 0]\}$). В силу равенства (12.1) и теоремы единственности получаем, что $f_2^+ + f_2^- \equiv \pi$ в $B(2, 1)$, откуда

вытекает, что элемент \mathcal{F}_0 после обхода точки 1 по γ_1 перейдет в элемент $-\mathcal{F}_0 + \pi = (B_0, -f_0 + \pi)$. После двух оборотов по γ_1 элемент \mathcal{F}_0 перейдет в себя. Аналогично, если пройти по траектории γ_{-1} , то элемент \mathcal{F}_0 перейдет в $-\mathcal{F}_0 - \pi$ (поскольку выполнено (12.2)), а при двукратном обходе он перейдет в себя. При обходе по γ_1 , а потом по γ_{-1} элемент \mathcal{F}_0 переходит в элемент $\mathcal{F}_0 - 2\pi = (B_0, f_0 - 2\pi)$. (Аналогичным образом проверяется, что при обходе вдоль окружности $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, элемент \mathcal{F}_2^+ переходит в $\mathcal{F}_2^+ - 2\pi$.)

Из теоремы об аналитическом продолжении элементов по гомотопным путям получаем, что у ПАФ $\text{Arcsin}(z)$ над каждой точкой $b \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ имеется счетное число элементов вида $\mathcal{F}_b + 2\pi k$ и $-\mathcal{F}_b + \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где \mathcal{F}_b – некоторый фиксированный элемент ПАФ $\text{Arcsin}(z)$ с центром b (например, $\mathfrak{D}_b^{\text{arcsin}(z)}$ при $b \in \Omega_0$).

Итак, над $B'(-1, 2)$ и $B'(1, 2)$ у $\text{Arcsin}(z)$ имеется счетное число ветвлений второго порядка; над $\{1 < |z| < +\infty\}$ – два логарифмических ветвления.

Вычисление интегралов типа B -функций.

ПРИМЕР 12.2. [Вычисление интегралов вида $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q R(x) dx$ при

$$-\infty < a < b < +\infty, \quad p \in (-1, 1), \quad q \in (-1, 1), \quad p \notin \mathbb{Z}, \quad q \notin \mathbb{Z}, \quad p+q \in \mathbb{Z},$$

где $R(z)$ – рациональная функция без полюсов на $[a, b]$].

$$\text{Для примера вычислим } J = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x(1-x)^2}}{(x+2)^2} dx; \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}, \quad R(z) = \frac{1}{(z+2)^2}.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = z_{(o)}^{1/3} \cdot (z-1)_{(o)}^{2/3}$, голоморфную в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Эта функция непрерывно продолжается и на $(-\infty, 0)$ (становясь непрерывной на $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$), поскольку $|g(z)|$, очевидно, непрерывна на \mathbb{C} , а функция $\arg(z_{(o)}^{1/3}) = \frac{1}{3} \arg(z)$ имеет перепад $\frac{2\pi}{3}$ (функция $\arg((z-1)_{(o)}^{2/3}) = \frac{2}{3} \arg(z-1)$ имеет перепад $4\pi/3$) при переходе $(-\infty, 0]$ снизу вверх. Общий перепад составляет 2π , что и требовалось. По теореме Мореры получаем, что $g \in \mathcal{A}(D)$, $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Пусть теперь $f(z) = g(z)/(z+2)^2$, $f_0(x)$ – подынтегральная функция (на $[0, 1]$).

Отметим, что при $x \in (0, 1)$ имеем:

$$f(x+) := \lim_{y \rightarrow 0+} f(x+iy) = f_0(x)e^{2\pi i/3}, \quad f(x-) := \lim_{y \rightarrow 0-} f(x+iy) = f_0(x)e^{-2\pi i/3},$$

поскольку $\arg(x+iy)_{(o)}^{2/3} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0\pm$ и $\arg(x+iy-1)_{(o)}^{2/3} \rightarrow \pm 2\pi/3$ при $y \rightarrow 0\pm$.

Выберем лучи I_0 (с вершиной в 0) и I_1 (с вершиной в 1) так, чтобы на них не было полюсов функции $R(z)$, I_0 лежал в левой полуплоскости, I_1 – правее точки 1, а круг $B = B(0, r)$ содержал все полюса $R(z)$ и отрезок $[0, 1]$.

Введем жордановы области D_1 и D_2 так, чтобы $\partial D_1 = I_{0r} \cup [0, 1] \cup I_{1r} \cup \Gamma_{1r}$, где $I_{0r} = I_0 \cap B$, $I_{1r} = I_1 \cap B$, Γ_{1r} (соответственно Γ_{2r}) – часть окружности ∂B , лежащая между лучами I_0 и I_1 сверху (соответственно, снизу); аналогично: $\partial D_2 = I_{0r} \cup \Gamma_{2r} \cup I_{1r} \cup [0, 1]$. Пусть $f_1(z) = f(z)$ на $\overline{D_1} \setminus [0, 1]$, $f_1(x) = f(x+)$ при $x \in (0, 1)$, аналогично $f_2(z) = f(z)$ в $\overline{D_2} \setminus [0, 1]$, $f_2(x) = f(x-)$ на $(0, 1)$. Будем считать, что $-2 \in D_1$, т.е. I_0 лежит в 3-м квадранте.

По теореме Коши о вычетах (вообще говоря, в формулировке для (vp) -интегралов), где надо использовать свойства

$$\operatorname{res}_{(a,D_1)} f_1 = \operatorname{res}_{(b,D_1)} f_1 = \operatorname{res}_{(a,D_2)} f_2 = \operatorname{res}_{(b,D_2)} f_2 = 0,$$

имеем:

$$J_1 = \int_{\partial^+ D_1} f_1(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f_1 = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f, \quad J_2 = \int_{\partial^+ D_2} f_2(z) dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Пусть J - исходный интеграл, тогда

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 &= \int_{\Gamma_{1r}^+} f_1(z) dz + \int_{\Gamma_{2r}^+} f_2(z) dz + \int_0^1 f(x+) dx - \int_0^1 f(x-) dx = \\ &= \int_{\partial^+ B} f(z) dz + e^{2\pi i/3} J - e^{-2\pi i/3} J = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f + 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cdot J = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f, \end{aligned}$$

откуда $J = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{3}} (\operatorname{res}_{-2} f + \operatorname{res}_{\infty} f)$.

Чтобы найти $\operatorname{res}_{-2} f$ учтем, что в D_1 выполнено равенство

$$f_1(z) = z_{(*)}^{1/3} (z-1)_{(*)}^{2/3} (z+2)^{-2},$$

где $(z-z_0)_{(*)}^p = (z-z_0)^p_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} = \exp(p \ln_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} (z-z_0))$, то есть разрез идет строго вниз. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-2} f &= \lim_{z \rightarrow -2} \left(z_{(*)}^{1/3} (z-1)_{(*)}^{2/3} \right)' = \frac{1}{3} (-2)_{(*)}^{-2/3} (-3)_{(*)}^{2/3} + (-2)_{(*)}^{1/3} \frac{2}{3} (-3)_{(*)}^{-1/3} = \\ &= 2^{-2/3} 3^{-1/3} e^{-2\pi i/3} e^{2\pi i/3} + 2^{4/3} 3^{-4/3} e^{\pi i/3} e^{-\pi i/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt[3]{\frac{16}{81}}. \end{aligned}$$

Поскольку $g(z) = z + \bar{o}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (это, очевидно, так при $z \in (1, +\infty)$), имеем: $f(z) = \frac{z + \bar{o}(z)}{(z+2)^2} = \frac{1}{z} + \bar{o}\left(\frac{1}{z}\right)$, откуда $\operatorname{res}_{\infty} f = -1$. Таким образом,

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt[3]{\frac{16}{81}} - 1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{7}{6} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 1 \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1. В общем случае следует брать $g(z) = (z-a)_{(o)}^p (z-b)_{(o)}^q$. Доказать, что g продолжается голоморфно на $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Коэффициент c_{-1} разложения Лорана функции $g(z)R(z)$ в проколотой окрестности точки ∞ по степеням z находится с помощью равенства

$$g(z)R(z) = z^{p+q} (1-a/z)_{(o)}^p (1-b/z)_{(o)}^q R(z), \quad |z| > b,$$

поскольку оно верно на $(b, +\infty)$.

ЗАДАЧА 12.1. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}{x^2+1} dx$ (взять $I_0 = (-\infty, 0)$, $I_1 = (1, +\infty)$).

ЗАДАЧА 12.2. Вычислить $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{x dx}{x+2}$.

Задача 12.3. Вычислить (нашим способом!) значение

$$B\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = \int_0^1 x^{2/5}(1-x)^{3/5} dx.$$

**13. Лекция 13. Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах.
Понятие римановой поверхности ПАФ.**

Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах (б/д).

Пусть Φ – ПАФ с областью определения D_Φ , $z_0 \in \mathbb{C}^\sharp$, $D_1 = B'(z_0, \delta) \subset D_\Phi$ (сама z_0 может как принадлежать D_Φ , так и не принадлежать). Пусть $b \in D_1$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$, Φ_1 – аналитическая ветвь Φ над D_1 , определяемая элементом \mathcal{F}_b (в частности, \mathcal{F}_b продолжается вдоль любого пути в D_1 с началом в точке b). Наконец, пусть Φ_1 имеет в точке z_0 ветвление конечного порядка $p \geq 2$, либо имеет ИОТ однозначного характера с полюсом в точке z_0 (тогда полагаем $p = 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. В указанных обозначениях, говорят, что точка z_0 является *алгебраической* ОТ для Φ_1 , если найдется $A \in \mathbb{C}^\sharp$ такая, что $\forall c \in B'(z_0, \delta/2)$, $\forall \mathcal{F}_c = (B(c, |c - z_0|), f_c) \in \Phi_1$ имеем (при $B_c = B(c, |c - z_0|)$)

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in B_c} f_c(z) = A.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. ПАФ Φ называется *алгебраической*, если:

- (1) найдется *конечное* множество $S_\Phi \subset \mathbb{C}^\sharp$ ($\infty \in S_\Phi$) такое, что область $D = \mathbb{C}^\sharp \setminus S_\Phi$ содержится в D_Φ , и совокупность элементов $\Phi|_D$ является конечнозначной аналитической ветвью ПАФ Φ над D ; берется минимально возможное такое S_Φ ;
- (2) для каждой точки $a \in S_\Phi$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой аналитической ветви Φ_1 ПАФ Φ над $D_1 = B'(a, \delta)$ (для которой a – особая) точка a является алгебраической для Φ_1 .

ТЕОРЕМА 13.1. Пусть Φ – алгебраическая N -значная (на $D = \mathbb{C}^\sharp \setminus S_\Phi$) ПАФ ($N \in \mathbb{N}$). Тогда найдутся многочлены $\{P_n(z)\}_{n=0}^N$ такие, что многочлен двух переменных

$$P(w, z) = \sum_{n=0}^N P_n(z) w^n$$

является неприводимым (как многочлен от w над полем рациональных функций от z), и для каждого элемента $\mathcal{F} = (B, f) \in \Phi$ имеем:

$$P(f(z), z) = \sum_{n=0}^N P_n(z) (f(z))^n \equiv 0$$

при всех $z \in B$.

Идея доказательства состоит в следующем. Фиксируем $b \in D = \mathbb{C}^\sharp \setminus S_\Phi$ и пусть $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$ – занумерованные (все, различные) элементы из Φ с центром b . Пусть $\gamma = \gamma_{bb}$ – произвольный путь в D с началом и концом в точке b . При АП вдоль γ набор элементов $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$ перейдет в себя, но с некоторой перестановкой, которую обозначим через $\sigma = \sigma(\gamma)$:

$$\mathcal{F}_n \underset{\gamma}{\rightsquigarrow} \mathcal{F}_{\sigma(n)}, \quad n \in \{1, \dots, N\}.$$

А тогда все базовые симметрические элементы, определяемые набором $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$:

$$\Sigma_1 = \mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{F}_N, \quad \Sigma_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 + \dots + \mathcal{F}_{N-1} \mathcal{F}_N, \quad \Sigma_N = \mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_N$$

при продолжении вдоль γ перейдут в себя. Отсюда легко установить, что все Σ_n являются рациональными функциями от z (независящими от b). Положим $\mathcal{F}_n =$

(B_n, f_n) . По формулам Виета, при всех $z \in \bigcap_{n=1}^N B_n$ числа $\{f_n(z)\}_{n=1}^N$ являются корнями уравнения

$$w^N - \Sigma_1(z)w^{N-1} + \dots + (-1)^N \Sigma_N(z) = 0.$$

Верна и обратная теорема. Пусть $P(w, z) = \sum_{n=0}^N P_n(z) w^n$ – неприводимый многочлен. Тогда совокупность всех (канонических) элементов $\mathcal{F} = (B, f)$, удовлетворяющих условию

$$P(f(z), z) = \sum_{n=0}^N P_n(z) (f(z))^n \equiv 0, \quad z \in B$$

образуют N -значную (вне ОТ) алгебраическую ПАФ.

ЗАМЕЧАНИЕ 13.1. В обозначениях предыдущего (плана) доказательства, совокупность всех перестановок $\sigma(\gamma)$ (по всем указанным γ) образует подгруппу \mathcal{G}_b в группе \mathcal{S}_N всех перестановок из N элементов. Эта подгруппа (она с точностью до изоморфизма не зависит от b) называется группой Галуа, или группой монодромии ПАФ Φ .

Рассмотрим уравнение $3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$. Оно неприводимо. Доказывается, что если бы это уравнение было разрешимо относительно w в радикалах (по переменной z), то группа Галуа соответствующей ПАФ была бы разрешимой, что не так. При исследовании указанной группы Галуа применяется теорема о неявной функции (в комплексной форме) и теорема Руше.

В этом состоит основная идея доказательства *теоремы Абеля о неразрешимости в радикалах* общих алгебраических уравнений степени выше четырех. Очень доступно и подробно об этой теореме можно прочитать в книге В.Б. Алексева "Теорема Абеля в задачах и решениях" (1976).

ЗАДАЧА 13.1. [ПАФ $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$]. Пусть $h(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}_{(o)}$. Требуется охарактеризовать ПАФ Φ , определяемую элементом \mathfrak{A}_1^h . Проверить, что она алгебраическая, найти соответствующий представляющий многочлен $P(w, z)$, доказать его неприводимость.

ЗАДАЧА 13.2. Пусть $h(z) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{z}}_{(o)} + \sqrt{1 + \sqrt{z}}_{(o)}$. Доказать, что ПАФ, определяемая элементом $\mathfrak{A}_{1/4}^h$, над проколотой окрестностью точки 1 имеет ветвление 2-го и ветвление 3-го порядка (указать: как указанные ветви получаются из элемента $\mathfrak{A}_{1/4}^h$).

ЗАДАЧА 13.3. Найти группу Галуа ПАФ $\mathcal{K}^{-1}(z)$. Проверить её разрешимость. Указать представляющий многочлен $P(w, z)$.

Понятие римановой поверхности ПАФ.

Пусть Φ – ПАФ с областью определения D_Φ . Введем на Φ структуру гладкого двумерного (в вещественном смысле) многообразия \mathcal{M}_Φ следующим образом. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ – (канонический) элемент с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом R_a , принадлежащий Φ . В качестве базы окрестностей элемента \mathcal{F}_a в \mathcal{M}_Φ возьмем совокупность $\{U_R(\mathcal{F}_a)\}_{R \in (0, R_a]}$ (открытых) множеств

$$U_R(\mathcal{F}_a) = \{\mathcal{F}_b \mid |b - a| < R, \mathcal{F}_b \leftrightarrow \mathcal{F}_a\}.$$

При любом $R \in (0, R_a]$ "проекция" $P_{\mathcal{F}_a} : \mathcal{F}_b \mapsto b$ является гомеоморфизмом карты $U_R(\mathcal{F}_a)$ на $B(a, R)$. В результате возникает атлас на \mathcal{M}_Φ , все соотношения соседства которого – тождественные отображения (в пересечениях кругов проекций пересекающихся карт).

При этом (в указанных выше обозначениях) функция $F : \mathcal{M}_\Phi \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемая по формуле $F(\mathcal{F}_a) = f_a(a)$, является обычной голоморфной функцией на \mathcal{M}_Φ в том смысле, что для любой карты $U_R(\mathcal{F}_a)$ соответствующее "координатное" отображение $f(P_{\mathcal{F}_a}^{-1})(z) = f_a(z)$ голоморфно в $B(a, R)$.

Многообразие \mathcal{M}_Φ называется *римановой поверхностью* (РП) ПАФ Φ .

Пусть ПАФ Φ распадается над областью $D \subset D_\Phi$ на (однозначные) голоморфные ветви (J штук, $J \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), причем граница D "кусочно прямолинейна" и D всюду плотно в D_Φ . Тогда \mathcal{M}_Φ представляется как J копий области D друг над другом, причем "отождествляются" (склеиваются) некоторые части границ этих копий так, чтобы при переходе через них одна ветвь "переходила" в другую.

Пользуясь этим соображением, приведем геометрические интерпретации РП ПАФ $\sqrt[N]{z}$ ($N \in \{2, 3, \dots\}$) и $\text{Ln}(z)$. Обе эти ПАФ (с областью определения \mathbb{C}_\flat) распадаются над $D = \mathbb{C}_-$ на голоморфные ветви (здесь $J = N$ и $J = +\infty$ соответственно).

Для $\sqrt[N]{z}$ берем N копий $\{D_0, \dots, D_{N-1}\}$ области D , выбирая значения (полярного) аргумента $\arg_n(z)$ в области D_n из интервала $(2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi)$. Согласно тригонометрической формуле для корней степени N , при каждом $n \in \{0, \dots, N-2\}$ приклеим верхний берег D_n (где $\arg_n(z) \rightarrow 2\pi n + \pi$) к нижнему берегу D_{n+1} (где $\arg_{n+1}(z) \rightarrow 2\pi(n+1) - \pi = 2\pi n + \pi$). Наконец, приклеим верхний берег D_{N-1} к нижнему берегу D_0 (где выбранные значения аргументов отличаются на $2\pi N$). Последнюю склейку (аналогично изображению бутылки Клейна) нельзя осуществить в \mathbb{R}^3 , и следует, включая воображение, считать, что пересечений последней склейки с другими склейками на самом деле нет.

Для $\text{Ln}(z)$ копии D_n области D удобно нумеровать целыми индексами: $n \in \mathbb{Z}$; значения (полярного) аргумента в D_n выбираются аналогично: $\arg_n(z) \in (2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi)$; при каждом n верхний берег D_n приклеивается к нижнему берегу D_{n+1} . Получается как бы бесконечная винтовая лента, которую можно изобразить и в \mathbb{R}^3 .

ЗАДАЧА 13.4. Доказать, что РП ПАФ $\sqrt[N]{z}$ диффеоморфна \mathbb{C}_\flat .

Поэтому иногда "присоединяют" точки 0 и ∞ к РП ПАФ $\sqrt[N]{z}$, и считают её диффеоморфной сфере \mathbb{C}^\sharp .

(Рисунки прилагаются).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Римановой поверхностью (РП) в *широком смысле* называется всякое двумерное (в вещественном смысле) связное гладкое многообразие с фиксированным атласом, все соотношения соседства которого являются конформными изоморфизмами.

Поскольку у всякого конформного изоморфизма h двумерный якобиан в точке z равен $|h'(z)|^2 > 0$, всякая РП является *ориентированным* многообразием (так что лист Мебиуса не может быть диффеоморфен никакой РП).

Приведем без доказательства теорему Ганнинга – Нарасимхана (1967), являющуюся базовой в теории РП. С её помощью упрощаются многие моменты, связанные с теорией уравнений в частных производных (в частности, гармонических функций) и обобщенных функций на РП.

ТЕОРЕМА 13.2. Пусть \mathcal{M} – произвольная некомпактная РП (в широком смысле). Тогда найдется атлас на \mathcal{M} , который конформно согласован с исходным атласом, но все соотношения соседства в котором – тождественны.

На любой РП \mathcal{M} естественно вводятся понятия голоморфной (или гармонической) функции в произвольной области D на \mathcal{M} . Классификация ИОТ голоморфных (на областях) в \mathcal{M} функций такая же, как в \mathbb{C} .

ЗАДАЧА 13.5. Доказать, что $\mathbb{C}^\#$ с двумя картами $h_1(z) = z$ на \mathbb{C} и $h_2(z) = 1/z$ на $\mathbb{C}^\# \setminus \{0\}$ ($h_2(\infty) = 0$) является компактной РП.

ЗАДАЧА 13.6. Придумать компактную РП, диффеоморфную тору.

ЗАДАЧА 13.7. Доказать, что на всякой *компактной* РП всякая голоморфная (или гармоническая) функция постоянна.

ЗАДАЧА 13.8. Сформулировать и доказать (внутреннюю) теорему единственности для голоморфных функций в любой некомпактной РП.