Оглавление

1. Лекция 1. Решение задачи Дирихле (ЗД) для гармонических функций (ГрФ) в круге.

Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Введем обозначение $B_r = B(0,r)$, $r > 0$.

Теорема 1.1. *[О разложении ГрФ в круге в ряд по однородным гармоническим полиномам]. При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в $\overline{B}_R$ функция h представляется в следующем виде (ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно):*

$$h(re^{i\varphi}) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \,, \ 0 \le r \le R \,, \tag{1.1}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta)\, d\theta \ , \ \ n \in \{0,1,\dots\} \,; \tag{1.2}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta \ , \ \ n \in \{1,2,\dots\} \,. \tag{1.3}$$

Доказательство. По теореме из прошлой лекции существует единственная функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ с условием $Re\, f = h$, $f(0) = h(0)$.

Разложим f в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$ (он сходится внутри $B_{R+\varepsilon}$ абсолютно и равномерно):

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $c_0 = a_0$ (все a_n и b_n вещественны). При любом $r \in (0, R+\varepsilon)$, подставляя в последнее разложение $z = re^{i\varphi}$, находим:

$$f(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \,.$$

Теперь приравняем в последнем разложении вещественные части:

$$h(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)) \,.$$

Все указанные разложения сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{B}_R$. Таким образом, установили (1.1) при $A_0 = 2a_0$, $A_n = a_n$, $B_n = -b_n$.

Возьмем теперь $z = Re^{i\varphi}$:

$$h(Re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)) \,.$$

Слева здесь стоит 2π-периодическая функция (аргумента φ) класса C^∞, а справа – тригонометрический ряд, который должен совпадать с рядом Фурье этой функции: $a_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta})\, d\theta$,

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta)\, d\theta \ \ , \ \ -b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta \ , \ \ n \in \{1,2,\dots\} \,,$$

откуда получаем (1.2) и (1.3). $\square$

Следствие 1.1.1. *В обозначениях предыдущей теоремы и ее доказательства при $r \in (0, R)$ справедлива оценка:*

$$||f||_{\overline{B}_r} \leqslant \frac{R+2r}{R-r}\,||h||_{\overline{B}_R}.$$

Доказательство. Положим $M = ||h||_{\overline{B}_R} = ||h||_{\partial\overline{B}_R}$ (по принципу максимума). Из формул (1.2) и (1.3) имеем:

$$|a_0| = \frac{|A_0|}{2} \leqslant M \ \ , \ \ |a_n| \leq \frac{2M}{R^n} \ \ , \ \ |b_n| \leq \frac{2M}{R^n} \ \ , \ \ n \in \mathbb{N}\,,$$

откуда

$$|c_n| = |a_n + ib_n| \leqslant \frac{2\sqrt{2}M}{R^n} < \frac{3M}{R^n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Тогда при всех $r < R$ получаем:

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant M\Big(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 3\frac{r^n}{R^n}\Big) \leqslant M\Big(1 + 3\frac{\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}}\Big) = M\frac{R+2r}{R-r}.$$

$\square$

Следствие 1.1.2. *[Аналог теоремы Вейерштрасса для ГрФ]. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\big\{h_n\big\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}(D)$, $h_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{вн. } D}{\rightrightarrows}} h$. Тогда $h \in \mathcal{H}(D)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $a \in D$ и $R > 0$ такое, что $\overline{B(a,R)} \subset D$, и пусть $r \in (0, R)$. Докажем, что $h \in \mathcal{H}(B(a,r))$. В силу произвольности точки a этого будет достаточно для доказательства утверждения.

По условию, $h_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\overline{B(a,R)}}{\rightrightarrows}} h$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем $f_n \in \mathcal{A}(B(a,R))$ с условиями $Re(f_n) = h_n$, $f_n(a) = h_n(a)$. По следствию 1.1.1, для всех n и n' из $\mathbb{N}$ справедлива оценка:

$$||f_n - f_{n'}||_{\overline{B(a,r)}} \leqslant \frac{R+2r}{R-r}||h_n - h_{n'}||_{\overline{B(a,R)}}.$$

Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по равномерной норме на $\overline{B(a,r)}$, откуда следует, что $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{B(a,r)}{\rightrightarrows}} f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{A}(B(a,r))$ (по теореме Вейерштрасса для голоморфных функций). Откуда $h = Re(f) \in \mathcal{H}(D)$. $\square$

Метод Фурье и формула Пуассона для решения ЗД в круге.

Теорема 1.2. *[Метод Фурье для решения ЗД в круге]. В круге $B_R = B(0,R)$ всякая ЗД разрешима, т.е. $\forall\, h_0 \in C(\partial B_R)$ найдется $h \in \mathcal{H}(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ с условием $h|_{\partial B_R} = h_0$. Функция h при $z = re^{i\varphi}$ задается по формулам:*

$$h(z) = \begin{cases} h_0(Re^{i\varphi}), & \text{если } r = R, \\ A_0/2 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n\big(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\big), & \text{если } r < R, \end{cases} \tag{1.4}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta})\cos(n\theta)\,d\theta\ ,\ \ n \in \{0, 1, \dots\}\,, \tag{1.5}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta})\sin(n\theta)\,d\theta\ ,\quad n\in\{1,2,\dots\}\,. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть $H_0(\varphi)=h_0(Re^{i\varphi})$, тогда $H_0\in C([-\pi,\pi])$, $H_0(-\pi)=H_0(\pi)$. Рассмотрим сначала случай, когда H_0 является функцией класса $C^{1+1}([-\pi,\pi])$ и удовлетворяет условиям $H_0(-\pi)=H_0(\pi)$, $H_0'(-\pi)=H_0'(\pi)$. Напомним, что $f\in C^{1+1}([-\pi,\pi])$, если $f\in C^1([-\pi,\pi])$ и найдется разбиение T_f отрезка $[-\pi,\pi]$ на конечное число отрезков I_j, на каждом из которых $f\in C^2(I_j)$.

В этих условиях, дважды интегрируя по частям, при $n\geq 1$ получаем:

$$|A_n| = \frac{1}{\pi R^n}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} H_0(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\Big| = \frac{1}{\pi n^2 R^n}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} H_0''(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\Big|\,,$$

$$|B_n| = \frac{1}{\pi R^n}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} H_0(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\Big| = \frac{1}{\pi n^2 R^n}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} H_0''(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\Big|\,,$$

откуда

$$|A_n|+|B_n|\leq \frac{1}{n^2R^n}M_0\,,$$

где

$$M_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|H_0''(\theta)|\,d\theta\,.$$

Таким образом, ряд

$$h(re^{i\varphi}) = A_0/2+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\big(A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)\big)$$

сходится абсолютно и равномерно на $\overline{B}_R$ (по критерию Вейерштрасса). Следовательно, функция $h(z)$, непрерывная на $\overline{B}_R$ и гармоническая в B_R (по следствию 1.1.2) является решением нужной ЗД.

Рассмотрим теперь общий случай (когда H_0 просто непрерывна). Найдем последовательность функций $\{h_{0m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ на ∂B_R с условиями $H_{0m}(\varphi)=h_{0m}(Re^{i\varphi})\in C^{1+1}([-\pi,\pi])$, с двумя граничными равенствами $H_{0m}(-\pi)=H_{0m}(\pi)$, $H_{0m}'(-\pi)=H_{0m}'(\pi)$, и такие, что

$$h_{0m}\underset{m\to+\infty}{\overset{\partial B_R}{\rightrightarrows}} h_0$$

(этот несложный факт оставляем в качестве упражнения).

По доказанному, существуют h_m – решения ЗД для h_{0m}. По принципу минимума-максимума в $\overline{B}_R$ имеем $\forall m,m'\in\mathbb{N}$:

$$||h_m-h_m'||_{\overline{B}_R}\leqslant ||h_{0m}-h_{0m'}||_{\partial\overline{B}_R}\,.$$

Следовательно, $h_m\underset{m\to+\infty}{\overset{\overline{B}_R}{\rightrightarrows}} h$, причем $h\in C(\overline{B}_R)\cap\mathcal{H}(B_R)$, $h|_{\partial B_R}=h_0$, так что h – искомое решение ЗД и оно задается по формулам (1.4)-(1.6) при $r<R$. $\square$

Теорема 1.3. *[Формула Пуассона для решения ЗД в круге $B_R=B(0,R)$]. Решение ЗД в B_R с граничной функцией $h_0\in C(\partial B_R)$ имеет вид (при $z=re^{i\varphi}$):*

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z), & \text{если } r = R, \\ \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{(R^2-|z|^2)\, h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, |d\zeta|\,, & \text{если } r < R. \end{cases}$$

При этом вторую часть предыдущей формулы можно преобразовать:

$$\frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{(R^2-|z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, |d\zeta| = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{h_0(Re^{i\theta})}{R^2 + r^2 - 2Rr\,\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta,$$

где выражение в знаменателе получено применением формулы $|d\zeta| = Rd\theta$ и теоремы косинусов в треугольнике с вершинами 0, $\zeta = Re^{i\theta}$ и $z = re^{i\varphi}$.

Функция $P(z,\zeta) = (2\pi R)^{-1}(R^2 - |z|^2)/|\zeta - z|^2$ – *ядро Пуассона* для круга B_R.

Доказательство. Подставим (1.5) и (1.6) в (1.4) при произвольном фиксированном $r \in (0, R)$ (см. обозначения теоремы 1.2; перестановка сумм и интегралов правомерна в виду установленной выше равномерной сходимости возникающих рядов):

$$\begin{aligned} h(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta})\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{r}{R}\Big)^n\big(\cos(n\theta)\cos(n\varphi) + \sin(n\theta)\sin(n\varphi)\big)\Big]\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta})\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \cos n(\varphi - \theta)\Big]\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta})\Big[\frac{1}{2} + Re\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^n\Big]\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta})\Big[\frac{1}{2} + Re\Big(\frac{z}{\zeta - z}\Big)\Big]\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) Re\Big(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \frac{Re\Big((\zeta + z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)}{|\zeta - z|^2}\, d\theta = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, Rd\theta. \end{aligned}$$

□

Следствие 1.3.1. *Из метода конформных отображений (а также теорем Римана и Каратеодори, излагаемых далее) и предыдущей теоремы вытекает разрешимость всякой ЗД в любой жордановой области.*

Отметим, что при применении формулы Пуассона можно пользоваться функцией Шварца $S(\zeta) = R^2/\zeta$ круга B_R и методом вычетов, поскольку при $z \in B_R$, $\zeta = Re^{i\theta} \in \partial B_R$ имеем

$$|d\zeta| = |Rie^{i\theta} d\theta| = Rd\theta = Rd\zeta/(i\zeta)\ , \quad |\zeta - z|^2 = (\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) = (\zeta - z)(R^2/\zeta - \bar{z})\,.$$

2. Лекция 2. Логарифмические вычеты. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Однолистные функции.

Теорема о логарифмических вычетах.

Через $\mathcal{A}(G)$ обозначается пространство всех *голоморфных функций на открытом множестве* G в $\mathbb{C}$.

Определение 2.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, $f \in \mathcal{A}(B'(a,\delta))$ и $f \neq 0$ в $B'(a,\delta)$. Тогда определен

$$L\underset{a}{\mathrm{res}}\,(f) := \underset{a}{\mathrm{res}}\left(\frac{f'}{f}\right)$$

– *логарифмический вычет* функции f в точке a.

Предложение 2.1. *(1) Если $f \in \mathcal{A}(B(a,\delta))$ и a – ноль функции f порядка $n \geqslant 0$, то*

$$L\underset{a}{\mathrm{res}}\,(f) = n.$$

(2) Если $f \in \mathcal{A}(B'(a,\delta))$ и a – полюс функции f порядка $p \geqslant 1$, то

$$L\underset{a}{\mathrm{res}}\,(f) = -p.$$

Доказательство. Докажем (1). По теореме о нулях найдется такая функция $g \in \mathcal{A}((B(a,\delta)), g(z) \neq 0$ в $B(a,\delta)$, что $f\,(z) = (z-a)^n g\,(z)$ в $(B(a,\delta)$. Тогда

$$L\underset{a}{\mathrm{res}}\,(f) = \underset{a}{\mathrm{res}}\left(\frac{n(z-a)^{n-1}g\,(z) + (z-a)^n g'\,(z)}{(z-a)^n g\,(z)}\right) = \underset{a}{\mathrm{res}}\left(\frac{n}{z-a} + \frac{g'\,(z)}{g\,(z)}\right) = n,$$

поскольку

$$\frac{g'\,(z)}{g\,(z)} \in \mathcal{A}(B(a,\delta)).$$

Свойство (2) доказывается аналогично. □

Теорема 2.1. *[О логарифмических вычетах]. Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$, U – окрестность $\overline{D}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, ..., a_J\} \subset D, \mathfrak{B} = \{b_1, ..., b_M\} \subset D$. Пусть $f \in \mathcal{A}\,(U \setminus \mathfrak{B})$, b_m – полюс функции f порядка $p_m \geqslant 1$ ($m \in \{1, ..., M\}$); a_j – нуль функции f порядка $n_j \geqslant 1$ ($j \in \{1, ..., J\}$), причем $f(z) \neq 0$ при $z \in U \setminus \mathfrak{A}$.*
Положим

$$N_D\,(f) = \sum_{j=1}^{J} n_j\,,\ P_D\,(f) = \sum_{m=1}^{M} p_m\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+ D} \frac{f'\,(z)}{f\,(z)}\,dz = N_D\,(f) - P_D\,(f)\ .$$

Доказательство. Достаточно применить теорему Коши о вычетах к функции $f'(z)/f(z)$ в области D (формально только для простых областей), используя результат предложения 2.1. □

Принцип аргумента и теорема Руше.

Определение 2.2. Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $[\gamma] = \gamma([\alpha,\beta])$, $f \in C\,([\gamma])$, $f : [\gamma] \to \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим путь $w = \sigma\,(t) = f\,(\gamma\,(t))\,|_{[\alpha,\beta]}$.
Величина $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f) := \Delta_\sigma \operatorname{Arg}(w)$ называется *приращением (полярного) аргумента функции f вдоль пути γ.*

Упражнение 2.1. В условиях предыдущего определения доказать, что если $\gamma_1 \simeq \gamma$, то $\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg}(f) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f)$.

Следовательно, корректно определена величина $\Delta_{\{\gamma\}} \operatorname{Arg}(f)$, где $\{\gamma\}$ – непрерывная кривая, определяемая путем γ.

Предложение 2.2. *Если определены* $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f_1)$, $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f_2)$, *то определено* $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f_1 \cdot f_2) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f_1) + \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f_2)$.

Доказательство. Если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ ветви аргументов для путей $w_1(t) = f_1\big(\gamma(t)\big)$ и $w_2(t) = f_2\big(\gamma(t)\big)$, то $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ ветвь аргумента для пути $w(t) = f_1\big(\gamma(t)\big) \cdot f_2\big(\gamma(t)\big)$. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть* Γ – *спрямляемая замкнутая кривая в* $\mathbb{C}$, U – *некоторая окрестность* $[\Gamma]$. *Пусть* $f \in \mathcal{A}(U)$, $f(z) \neq 0$ *на* $[\Gamma]$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(f).$$

Доказательство. Заметим, что $f'(z)/f(z) \in \mathcal{A}(V)$, где V – некоторая окрестность $[\Gamma]$.

Положим $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – представитель Γ и $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Найдем натуральное N такое, что разбиение $\{\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на N равных частей обладает следующим свойством: для каждого $n \in \{1, \ldots N\}$ путь $\sigma_n := \sigma|_{[\alpha_{n-1}, \alpha_n]}$ удовлетворяет условию $[\sigma_n] \subset V_n$, где выбор $V_n = \mathbb{C}_-$ или $V_n = \mathbb{C}_+$ фиксируем (это можно сделать в силу равномерной непрерывности σ на $[\alpha, \beta]$). Далее, в силу непрерывности f в U, для каждого рассматриваемого n найдется окрестность $U_n \subset U$ компакта $[\gamma_n]$ ($\gamma_n = \gamma|_{[\alpha_{n-1}, \alpha_n]}$, $\sigma_n = f(\gamma_n)$) такая, что $f(U_n) \subset V_n$.

Положим

$$\underset{(n)}{ln}(f(z)) = ln|f(z)| + i \underset{(n)}{\arg}(f(z)) = \begin{cases} \underset{(0,2\pi)}{ln}(f(z)),\ z \in U_n,\ V_n = \mathbb{C}_+, \\ \underset{(-\pi,\pi)}{ln}(f(z)),\ z \in U_n,\ V_n = \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Тогда $\underset{(n)}{ln} f(z) \in \mathcal{A}(U_n)$ и мы получаем:

$$\int\limits_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int\limits_{\gamma_n} \left(\underset{(n)}{ln}(f(z)) \right)' dz = \underset{(n)}{ln}(f(z))\Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} = ln|f(z)|\Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} +$$

$$+ i \underset{(n)}{\arg}(f(z))\Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} = ln|f(z)|\Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} + i\, \Delta_{\gamma_n} \operatorname{Arg}(f).$$

Суммируя по $n = 1, ..., N$ и деля обе части на $2\pi i$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f),$$

так как в силу замкнутости пути γ слагаемые вида $ln|f(z)|\Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)}$ взаимно уничтожаются. $\square$

Определение 2.3. Пусть D – допустимая область порядка $S \geqslant 1$ ($\partial^+ D = \Gamma_1^+$ при $S = 1$, $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^- \cup ... \cup \Gamma_S^-$ при $S \geq 2$ как раньше). При $S \geq 2$ положим по определению $\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) := \Delta_{\Gamma_1^+} \operatorname{Arg}(f) + \sum\limits_{s=2}^{S} \Delta_{\Gamma_s^-} \operatorname{Arg}(f)$, если все слагаемые в последней сумме определены.

Теорема 2.2. *[Принцип аргумента]. В условиях теоремы 2.1 и в обозначениях определения 2.3 верно следующее равенство:*

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial_+ D}\operatorname{Arg}(f) = N_D(f) - P_D(f).$$

Доказательство. Следует из теоремы 2.1 и предложения 2.1. □

Замечание. Принцип аргумента справедлив в более общем случае: когда D ограничена конечным числом попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых (не обязательно спрямляемых), $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{B})$ ($\mathfrak{B}$ – конечное множество полюсов функции f в D), f непрерывна в $\overline{D} \setminus \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset D$ – конечное множество нулей функции f в $\overline{D}$.

Упражнение 2.2. Доказать принцип аргумента в предыдущей (усиленной) формулировке для простейших областей (* без условия спрямляемости границы). *Указание.* Рассмотреть последовательность $f_n = f\left(\frac{n}{n+1}z\right)$ (и области, ограниченные вписанными ломаными).

Теорема 2.3. *[Теорема Руше]. Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$, U – некоторая окрестность $\overline{D}$; $f, g \in \mathcal{A}(U)$, причем*

$$|g(z)| < |f(z)|\ ,\ \forall z \in \partial D. \qquad (2.1)$$

Тогда

$$N_D(f+g) = N_D(f).$$

Доказательство. По теореме 2.2,

$$N_D(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(f\cdot(1+g/f)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(f) + \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(1+g/f) = N_D(f) + \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(1+g/f).$$

Заметим, что $\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(f)$ и $\Delta_{\partial^+ D}\operatorname{Arg}(1+g/f)$ определены, поскольку f и $(1+g/f)$ не обращаются в ноль на ∂D в силу (2.1).

В обозначениях определения 2.3 остается показать, что

$$\Delta_{\Gamma_s^+}\operatorname{Arg}(1+g/f) = 0\ ,\ \forall s \in \{1, ..., S\}.$$

Пусть γ_s^+ – представитель Γ_s^+, с параметром $t \in [\alpha_s, \beta_s]$, $\sigma_s^+ = (1+g/f)\circ\gamma_s^+$. Тогда, по определению,

$$\Delta_{\Gamma_s^+}\operatorname{Arg}(1+g/f) = \Delta_{\sigma_s^+}\operatorname{Arg}(w).$$

Поскольку $\gamma_s^+(t) \in \partial D$, а $|g/f| < 1$ на ∂D по условию, мы видим, что $[\sigma_s^+]$ лежит в правой полуплоскости. Поэтому, в качестве непрерывной ветви (полярного) аргумента вдоль σ_s^+ можно взять $\arg(\sigma_s^+(t))$ на $[\alpha_s, \beta_s]$. Но тогда $\Delta_{\sigma_s^+}\operatorname{Arg}(w) = \arg(\sigma_s^+(\beta_s)) - \arg(\sigma_s^+(\alpha_s)) = 0$ ввиду замкнутости Γ_s^+. Теорема доказана.

□

Замечание. Утверждение теоремы Руше верно для любой области D, ограниченной конечным числом попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых, и для любых $f, g \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ с условием $|g| < |f|$ на ∂D.

Пример 2.1. Пусть $p(z) = z^7 + 5z + 1$, $D_1 = \{|z| < 1\}, D_2 = \{|z| < 2\}$. Найти $N_{D_1}(p)$ и $N_{D_2}(p)$.

1) имеем $\partial D_1 = \{|z| = 1\}$; положим $f_1(z) = 5z$, $g_1(z) = z^7 + 1$, тогда $|g_1(z)| \leqslant 2 < 5 = |f_1(z)|$ на ∂D_1; следовательно, $N_{D_1}(p) = N_{D_1}(f_1) = 1$.

2) здесь $\partial D_2 = \{|z| = 2\}$; возьмем $f_2(z) = z^7$, $g_2(z) = 5z + 1$, тогда $|g_2(z)| \leqslant 11 < 2^7 = |f_2(z)|$ на ∂D_2; поэтому $N_{D_2}(p) = N_{D_2}(f_2) = 7$.

Упражнение 2.3. Дано дифференциальное уравнение: $y''' + py'' + qy' + 12y = 0$. Для всех вещественных пар (p, q) исследовать решение $y(t) \equiv 0$ на асимптотическую устойчивость.

Указание 1: Если многочлен $p(z) = z^3 + pz^2 + qz + 12$ имеет (разные) корни z_1, z_2, z_3 в $\mathbb{C}$, то общее решение нашего уравнения имеет вид $C_1e^{z_1t} + C_2e^{z_2t} + C_3e^{z_3t}$ (случай кратных корней рассмотреть отдельно). Во всех случаях нужно искать пары (p, q), при которых все три корня многочлена лежат в левой полуплоскости.

Указание 2: Применить принцип аргумента для многочлена p в области $D = B(0, R) \cap \{Re(z) < 0\}$, $R >> 1$.

На теорему Руше опирается следующая важная в приложениях теорема.

Теорема 2.4. *[Принцип сохранения области]. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \not\equiv const$. Тогда $\Omega = f(D)$ – область.*

Доказательство. Связность Ω очевидна – любые две точки в Ω можно соединить образом кривой, соединяющей соответствующие точки в D. Докажем открытость Ω.

Фиксируем $w_0 \in \Omega$, тогда $f(z_0) = w_0$ для некоторой точки $z_0 \in D$. Положим $f_1(z) = f(z) - w_0 \not\equiv const$ в D. Так как z_0 – изолированный ноль f_1, найдется $\delta > 0$, для которого круг $B = B(z_0, \delta)$ удовлетворяет условиям:

1) $\overline{B} \subset D$,

2) $\varepsilon = \min\limits_{z \in \partial B} |f_1(z)| > 0$.

Докажем, что $B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$, т.е. для каждого $w \in B(w_0, \varepsilon)$ функция

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f_1(z) + (w_0 - w)$$

имеет хотя бы один ноль в D. Но последнее сразу следует из теоремы Руше в B, которую можно применить (проверить это) к функциям f_1 и $g_1 = (w_0 - w)$. А именно (поскольку z_0 – ноль функции f_1 в B):

$$N_B(f_1 + (w_0 - w)) = N_B(f_1) \geqslant 1.$$

□

3. Лекция 3. Критерий локальной однолистности. Обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии.

Однолистные функции.

Определение 3.1. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, f инъективна в D. Тогда f называется *однолистной* в D.

Лемма 3.1. *Если f однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$, то f – гомеоморфизм D на $f(D)$.*

Доказательство. Биективность следует из определения однолистности; прообраз всякого открытого множества открыт, поскольку $f \in \mathcal{A}(D) \subset C(D)$; образ всякого открытого множества открыт по теореме 2.4. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ в D. Тогда многозначная функция $Ln\,(f(z))$ имеет голоморфную в D ветвь $h(z)$, т.е. найдется $h \in \mathcal{A}(D)$ с условием $e^{h(z)} \equiv f(z)$ в D. Кроме того, для каждого натурального $n \geq 2$ существует голоморфная в D ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$, в качестве которой можно взять функцию $e^{h(z)/n}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f'(z)/f(z) \in \mathcal{A}(D)$. По теореме о первообразной в односвязной области, найдется функция $g \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $g'(z) = f'(z)/f(z)$ в D. Зафиксируем $a \in D$ и положим $h = g - g(a) + \ell_a$, где $\ell_a \in Ln(f(a))$ также фиксируется.

Множество E точек из D, в которых $h(z) \in Ln(f(z))$, открыто и замкнуто в D (проверить!), а также непусто (поскольку $h(a) \in Ln\,(f(a))$). Следовательно, E совпадает с D. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(a)$ (т.е. найдется $r > 0$ такое, что $f \in \mathcal{A}(B(a,r))$). Пусть $f'(a) = 0$. Тогда f не может быть однолистной ни в какой (открытой) окрестности точки a.*

Доказательство. Если $f(z) - f(a)$ имеет в точке a ноль бесконечного порядка, то $f(z) \equiv f(a)$ в некоторой окрестности точки a, и значит f не инъективна ни в какой окрестности.

Пусть теперь a – ноль конечного порядка p для $f(z) - f(a)$. Ясно, что $p \geqslant 2$. По теореме о нулях найдется $g \in \mathcal{A}(B(a,r))$ с условием

$$f(z) - f(a) = (z-a)^p g(z)\,,\ g(a) = w_0 \neq 0.$$

Пусть $\delta \in (0,r)$ таково, что $g(z) \neq 0$ в $B = B(a,\delta)$. По лемме 3.2 существует голоморфная ветвь $g_1(z)$ многозначной функции $\sqrt[p]{g(z)}$ в B. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = (z-a)g_1(z) \in \mathcal{A}(B)\,,\ f_1(a) = 0\,,\ f_1'(a) = g_1(a) \neq 0\,.$$

Так как $f_1 \not\equiv const$ в B, к ней применима теорема 2.4 о сохранении области: вместе с точкой $0 = f_1(a)$ в образе $f_1(B)$ лежит некоторая окрестность нуля $B(0,\varepsilon)$ ($\varepsilon = \varepsilon(\delta)$), а в ней p различных корней p-й степени из некоторого числа $w \neq 0$ ($w_k \in B(0,\varepsilon)$, $w_k^p = w$, $k \in \{0,...,p-1\}$). Наконец, найдутся $z_k \in B$, для которых $f_1(z_k) = w_k$, $k \in \{0,...,p-1\}$. Поскольку $f(z) = f(a) + (f_1(z))^p$, имеем $f(z_0) = ... = f(z_{p-1})$. Так как $\delta > 0$ можно взять произвольно малым, f не инъективна ни в какой окрестности точки a. $\square$

Теорема 3.1. *[О конформности однолистных функций]. Пусть f однолистна в области D, тогда f конформна в D (т.е. $f \in \mathcal{A}(D)$, f взаимно однозначна и $f'(z) \neq 0$ в D). Более того, f – конформный изоморфизм D на $f(D)$.*

Доказательство. По лемме 3.1, f является гомеоморфизмом D на $f(D)$. По лемме 3.3, $f'(z) \neq 0$ во всех точках $z \in D$. По теореме об обратной функции, $f^{-1} : f(D) \to D$ тоже голоморфна и является конформной: $(f^{-1})'(w_0) = 1/(f'(z_0)) \neq 0$ для любой точки $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. $\square$

Локальная однолистность и локальная обратимость функции.

Определение 3.2. Говорят, что функция f *однолистна в точке* $a \in \mathbb{C}$, если f голоморфна и однолистна в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 3.2. *Функция $f \in \mathcal{A}(a)$ однолистна в точке $a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$.*

Доказательство. Утверждение ($\Rightarrow$) следует из леммы 3.3 от противного.

Докажем ($\Leftarrow$). По теореме о бесконечной дифференцируемости голоморфных функций найдется $r > 0$ такое, что $f \in \mathcal{A}(B(a,r))$ и $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|/2$ для всех $z \in B(a,r)$. Тогда для любых $z_1 \neq z_2$ из $B(a,r)$ по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1,z_2]} \big(f'(z) - f'(a) + f'(a)\big)\, dz\,,$$

откуда

$$|(f(z_2) - f(z_1)) - f'(a)(z_2 - z_1)| \leq |f'(a)(z_2 - z_1)|/2$$

и, следовательно, $f(z_2) - f(z_1) \neq 0$, что и требовалось. $\square$

Определение 3.3. Функция f называется *локально-однолистной* в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если f однолистна в каждой точке $z \in D$ (т.е. $f \in \mathcal{A}(D)$ и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$).

Пример 3.1. Пусть $f(z) = z^3$, $D = \Pi_+$. Тогда f локально-однолистна в D, так как $f'(z) = 3z^2 \neq 0$ в D, но f не однолистна в D, ибо она там не инъективна. Отметим, что при этом f гомеоморфно переводит ∂D на себя.

Определение 3.4. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(a)$; функция f называется *локально обратимой* в точке a, если найдутся область U_a, содержащая точку a, в которой $f \in \mathcal{A}(U_a)$), и функция $g \in \mathcal{A}(f(U_a))$ такие, что $g(f(z)) = z$ для всех $z \in U_a$.

Предложение 3.1. *Голоморфная в точке a функция f обратима в этой точке $\Leftrightarrow$ f однолистна в точке a ($\Leftrightarrow f'(a) \neq 0$)).*

Доказательство. Утверждение ($\Leftarrow$) непосредственно следует из теоремы 3.1 (f является конформным изоморфизмом некоторой связной окрестности точки a на ее образ).

Докажем ($\Rightarrow$) от противного. Пусть f не однолистна в точке a, тогда она не инъективна ни в какой её связной окрестности U_a. Т.е. в любой окрестности U_a точки a найдутся точки z_1 и z_2 с условием $z_1 \neq z_2$, но $f(z_1) = f(z_2)$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{A}(f(U_a))$ имеем $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$, что противоречит условию обратимости f точке a. $\square$

Обратный принцип соответствия границ.

Теорема 3.3. *[Обратный принцип соответствия границ]. Пусть D – простая жорданова область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$, $\Gamma^+ = \partial^+ D$. Пусть f инъективно отображает $[\Gamma^+]$ на $f([\Gamma^+])$ ($\Sigma = f(\Gamma^+)$ – тоже замкнутая жорданова кривая). Пусть Ω – жорданова область, ограниченная $[\Sigma]$ (по теореме Жордана). Тогда f конформно (однолистно) отображает D на Ω, причем $\Sigma = \partial^+\Omega$, т.е. Σ положительно ориентирована относительно Ω.*

Доказательство. Фиксируем точку $b \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma]$. Воспользуемся принципом аргумента в $\overline{D}$ для функции $f(z) - b \neq 0$ на ∂D. Учитывая, что $P_D(f-b) = 0$, имеем:

$$0 \leqslant N_D\bigl(f(z)-b\bigr) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma^+}\operatorname{Arg}\bigl(f(z)-b\bigr) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Sigma-b}\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{ind}_{\Sigma}(b) = \begin{cases}\pm 1, b \in \Omega,\\ 0, b \notin \Omega.\end{cases}$$

Т.е. для всех $b \in \Omega$ одновременно имеем $\operatorname{ind}_\Sigma(b) \geqslant 0$ и $\operatorname{ind}_\Sigma(b) = \pm 1$. Следовательно, $\operatorname{ind}_\Sigma(b) = 1$ для всех $b \in \Omega$, т.е. $f(\Gamma^+)$ положительно ориентирована относительно Ω. Из последнего получаем, что для любого $b \in \Omega$ существует единственное $z \in D$ с условием $f(z) = b$. Кроме того, $N_D(f-b) = 0$ для всех $b \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$, откуда $f : D \to \Omega$ - биекция. Остается применить теорему 3.1. □

Принцип симметрии.

Теорема 3.4. *[Принцип симметрии]. Пусть γ и Γ – обобщенные окружности в $\mathbb{C}^\sharp$, а γ_1 и Γ_1 – связные открытые непустые дуги в γ и Γ соответственно.*

Пусть D_1 и Ω_1 – области в $\mathbb{C}^\sharp$, лежащие по одну сторону от γ и Γ соответственно, причем $\gamma_1 \subset \partial_{\mathbb{C}^\sharp} D_1$, $\Gamma_1 \subset \partial_{\mathbb{C}^\sharp}\Omega_1$ (см. Рис. 3.1).

Обозначим через D_1^* и Ω_1^* области, симметричные D_1 и Ω_1 относительно γ и Γ соответственно. Еще потребуем, чтобы $D = D_1 \sqcup \gamma_1 \sqcup D_1^*$ и $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Gamma_1 \sqcup \Omega_1^*$ являлись областями в $\mathbb{C}^\sharp$.

Пусть f_1 конформно отображает D_1 на Ω_1 и f_1 непрерывна на $D_1 \sqcup \gamma_1$ (в топологии $\mathbb{C}^\sharp$), причем $f_1(\gamma_1) = \Gamma_1$.

Тогда f_1 продолжается (единственным образом) до конформного отображения f области D на область Ω по формуле

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), \ z \in D_1 \sqcup \gamma_1,\\ \left(f_1(z^*)\right)^*, \ z \in D_1^*. \end{cases}$$

В последней строчке внутренняя звездочка обозначает симметрию относительно γ, а внешняя – относительно Γ.

Доказательство теоремы. Найдем ДЛО Λ_1, отображающее γ на $\mathbb{R}^\sharp$, и ДЛО Λ_2, отображающее Γ на $\mathbb{R}^\sharp$, причем такие, что $\Lambda_1(D_1)$ и $\Lambda_2(\Omega_1)$ лежат в верхней полуплоскости. Пусть каждый из объектов E в формулировке нашей теоремы при действии отображения Λ_1 (или Λ_2) переходит в объект $\tilde{E}$ (например, $\Lambda_1(D_1) = \tilde{D}_1$, $\Lambda_2(\Omega_1) = \tilde{\Omega}_1$).

Определим $\tilde{f}_1(\tilde{z}) = \Lambda_2 \circ f_1 \circ \Lambda_1^{-1}(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \tilde{D}_1 \cup \tilde{\gamma}_1$, для нее выполнены все условия нашей теоремы с заменой прежних объектов на объекты "с волной". Теперь, если $\tilde{f}$ – найденное продолжение $\tilde{f}_1$, то $f(z) = \Lambda_2^{-1} \circ \tilde{f} \circ \Lambda_1(z)$ – искомое продолжение f_1. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $\gamma = \Gamma = \mathbb{R}^\sharp$. Будем считать, что так было изначально, чтобы не перегружать обозначения.

Ниже мы предполагаем, что $\gamma_1 \subset \mathbb{R}$ и $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}$. Оставшийся вариант, когда $\gamma_1 = \mathbb{R}^\sharp$ или $\Gamma_2 = \mathbb{R}^\sharp$, оставляем читателю.

В рассматриваемой ситуации симметрия относительно $\gamma = \Gamma$ равносильна комплексному сопряжению. Определим

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in D_1 \sqcup \gamma_1,\\ \overline{f_1(\overline{z})}, z \in D_1^*. \end{cases}$$

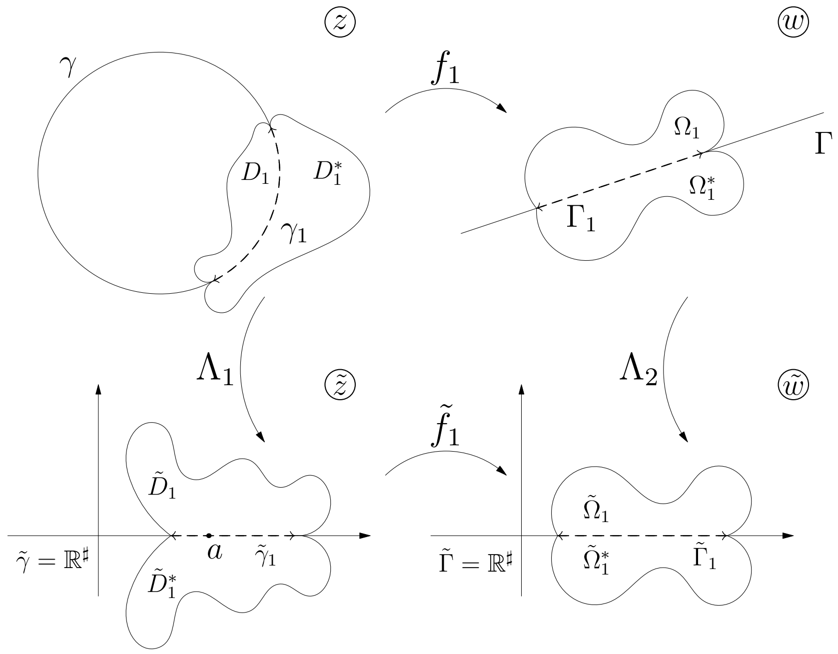

Рис. 3.1.

Если $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ в окрестности точки $z_0 \in D_1$, то $\overline{f_1(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{c_n}(z-\overline{z_0})^n$ в окрестности точки $\overline{z_0} \in D_1^*$ (и радиусы сходимости этих рядов равны). Поэтому отображение $f(z)$, определенное выше, голоморфно в $D_1 \sqcup D_1^*$. Кроме того, f непрерывно в D. Поэтому, по теореме Морера $f \in \mathcal{A}(D)$. Наконец, f взаимно-однозначно переводит $D_1 \sqcup D_1^*$ на $\Omega_1 \sqcup \Omega_1^*$. Осталось доказать, что f взаимно-однозначна на γ_1 (тогда конформность f в D будет следовать из однолистности). Для этого достаточно проверить, что $f'(a) \neq 0$, $\forall a \in \gamma_1$. Напомним, что $f_1|_{\gamma_1} : \gamma_1 \to \Gamma_1$ есть дифференцируемая функция из интервала $\gamma_1 \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Предположим, что найдется $a \in \gamma_1$ с условием $f'(a) = 0$. Тогда (как в доказательстве леммы 3.3) найдется натуральное $p \geqslant 2$ с условием $f(z) - f(a) = (g(z))^p$ для некоторой функции $g \in \mathcal{A}(a)$ такой, что $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. Следовательно, функция $g(z)$ однолистно переводит некоторую окрестность точки a на некоторую окрестность нуля. При этом углы (между гладкими кривыми) в точке a при конформном отображении g сохраняются, а при возведении в степень $p \geqslant 2$ (углы в точке 0) увеличиваются в p раз. В итоге, при отображении f угол величины π с вершиной в точке a переходит в некоторый угол величины не менее 2π (с вершиной $f(a)$), и мы получаем противоречие с тем, что все точки из $D_1 \subset \Pi_+$ переходят в $\Omega_1 \subset \Pi_+$. □

Определение 3.5. Функция f называется *мероморфной* в области $D \subseteq \mathbb{C}^\sharp$, если f не имеет в D других особых точек, кроме полюсов.

Поле всех мероморфных в области D функций обозначается через $\mathcal{M}(D)$.

Доказательство следующей теоремы оставляем в качестве упражнения.

Теорема 3.5. *[Принцип симметрии для мероморфных функций]. Пусть γ, γ_1, D_1, D_1^*, D – такие, как в предыдущей теореме. Пусть $f_1 \in \mathcal{M}(D_1)$ непрерывна на $D_1 \sqcup \gamma_1$ в топологии $\mathbb{C}^\sharp$. Если $f_1(\gamma_1)$ лежит на некоторой обобщенной окружности в $\mathbb{C}^\sharp$, то f_1 продолжается до функции $f \in \mathcal{M}(D)$ по той же формуле, как и в предыдущей теореме.*

4. Лекция 4. Теорема Гурвица о нулях и теорема о сходимости последовательности однолистных функций. Равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность внутри области. Предкомпактность и компактность семейств функций.

Теорема 4.1. *[Теорема Гурвица о нулях.] Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(D)$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{вн.D}{\rightrightarrows}} f$. Пусть $a \in D$ – нуль функции f порядка $p \in \mathbb{N}$.*

Тогда $\exists\, \delta_a > 0$ такое, что $\forall\, \delta \in (0, \delta_a)$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ с условием, что при всех $n > n_0$ имеем $N_{B(a,\delta)}(f_n) = p$.

Доказательство. Пусть $Z_f = \{z \in D \,|\, f(z) = 0\}$ – множество нулей функции f в D. Тогда

$$\delta_a = \min\bigl(\operatorname{dist}(a, \partial D),\, \operatorname{dist}(a, Z_f \setminus \{a\})\bigr) \in (0, +\infty]\,,$$

поскольку нуль a функции f изолированный.

Пусть теперь $\delta \in (0, \delta_a)$ – фиксировано. Положим $\mu = \min\limits_{|z-a|=\delta} |f(z)|$. Очевидно, что $\mu > 0$. По условию, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{вн. } D}{\rightrightarrows}} f$, и, значит, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\partial B(a,\delta)}{\rightrightarrows}} f$; поэтому $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $||f - f_n||_{\partial B(a,\delta)} < \mu$ при $n > n_0$. Остается применить теорему Руше в $B(a, \delta)$ для функций f и $g = f_n - f$. □

Теорема 4.2. *[О сходимости последовательности однолистных функций.] Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность однолистных функций в D, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{вн.D}{\rightrightarrows}} f$. Тогда либо $f \equiv const$, либо f однолистна в D.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса $f \in \mathcal{A}(D)$. Пусть f не равна тождественно константе в D и найдутся $z_1 \neq z_2$ в D с условием $f(z_1) = f(z_2)$ (т.е. f не однолистна в D). Рассмотрим $\{g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)\}$, тогда $g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} g = f(z) - f(z_1)$. Поскольку f – не константа, функция g – не тождественно нулевая в D, при этом $g(z_2) = 0$; пусть порядок нуля z_2 для g равен p, $p \in \mathbb{N}$.

По теореме 4.1, существует $\delta_0 \in (0, |z_2 - z_1|)$ со следующими условиями: $\forall\, \delta \in (0, \delta_0)$ имеем $B(z_2, \delta) \subset D$ и найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, n > n_0$ выполнено равенство $N_{B(z_2,\delta)}(g_n) = p$. Последнее означает, что $\exists\, a_n \in B(z_2, \delta)$ с условием $g_n(a_n) = 0$, или $f_n(a_n) = f_n(z_1)$, что противоречит однолистности $\{f_n\}$. □

Определение 4.1. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ – некоторое непустое семейство функций из D в $\mathbb{C}$. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ *равномерно ограничено внутри D* (*р.о.вн. D*), если для любого компакта $K \subset D$ семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено на K, т.е. существует константа $M \in [0, +\infty)$ такая, что $||f||_K = \sup\limits_{z\in K} |f(z)| \leqslant M$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

Определение 4.2. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ – некоторое непустое семейство функций из D в $\mathbb{C}$. Семейство $\mathcal{F}$ называется *равностепенно непрерывным внутри D* (*р.н.вн. D*), если для любого компакта $K \subset D$ семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно на K, т.е. $\forall\, \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ при всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $z, z' \in K$ с условиями $|z - z'| < \delta$.

Теорема 4.3. *Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ р.о.вн. D, то $\mathcal{F}$ р.н.вн. D.*

Замечание. Обратное неверно, например, для семейства $\mathcal{F} = \{f_n \equiv n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Доказательство. Фиксируем K – произвольный непустой компакт в D. Положим $d = \min\bigl(\operatorname{dist}(K, \partial D),\, 1\bigr)$, $d > 0$. Для $\rho \in (0, d)$ определим $K_\rho = \overline{\bigcup_{z\in K} B(z,\rho)}$ (*компактное* ρ*-раздутие* K) – тоже компакт в D. Из р.о. $\mathcal{F}$ вн. D найдется $M > 0$ такое, что $\forall f \in \mathcal{F}$ верна оценка $||f||_{K_{d/2}} \le M$. Установим равностепенную непрерывность $\mathcal{F}$ на K.

Сначала докажем, что семейство $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$ равномерно ограничено на $K_{d/4}$. Пусть $f \in \mathcal{F}$, $z_0 \in K_{d/4}$. Воспользуемся интегральной формулой Коши в $B(z_0, d/4) \subset K_{d/2}$ (в частности, $|f(\zeta)| \le M$ при $\zeta \in \partial B(z_0, d/4)$):

$$|f'(z_0)| = \Bigl|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B(z_0,d/4)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta\Bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi} M \bigl(\frac{4}{d}\bigr)^2 2\pi \frac{d}{4} = \frac{4M}{d}\,.$$

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{d/4,\, d\varepsilon/(4M)\}$. Тогда для всех $z, z' \in K$ с условием $|z - z'| < \delta$ имеем $[z, z'] \subset K_{d/4}$, откуда по формуле Ньютона-Лейбница (для любой $f \in \mathcal{F}$):

$$|f(z) - f(z')| = \Bigl|\int\limits_{[z,z']} f'(\zeta)\,d\zeta\Bigr| < \frac{4M}{d}\delta \le \varepsilon\,,$$

что и доказывает равностепенную непрерывность семейства $\mathcal{F}$ внутри D. □

Определение 4.3. Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ называется *предкомпактным* (в топологии пространства $\mathcal{A}(D)$), если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ найдется её подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функция $g \in \mathcal{A}(D)$ такие, что $f_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} g$.

Непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ называется *компактным* (в топологии пространства $\mathcal{A}(D)$), если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можно найти подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функцию $g \in \mathcal{F}$ такие, что $f_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} g$.

Теорема 4.4. *[Теорема Монтеля.] Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$. Тогда $\mathcal{F}$ предкомпактно $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ р. о. вн. D.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). От противного. Предположим, что найдется компакт $K \subset D$, на котором семейство $\mathcal{F}$ не р. о., но при этом $\mathcal{F}$ предкомпактно. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ с условием $||f_n||_K > n$. Следовательно, $||f_{n_k}||_K \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ для любой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ из $\{f_n\}$. Но в силу предкомпактности семейства $\mathcal{F}$ существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ из $\{f_n\}$ и $g \in \mathcal{A}(D)$ такие, что $f_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} g$; в частности, $f_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} g$. Поэтому найдется $k_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_1$ имеем $||f_{n_k}||_K \leqslant ||f_{n_k} - g||_K + ||g||_K \leqslant 1 + ||g||_K < +\infty$. Противоречие.

($\Leftarrow$) Пусть семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ р.о.вн. D. Тогда по теореме 4.3 семейство $\mathcal{F}$ р.н.вн. D. Пусть $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ – произвольная последовательность. Пусть $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty}$ – некоторым образом занумерованные *все* различные точки из D, у которых обе координаты рациональны.

Поскольку $K_1 = \{z_1\}$ – компакт в D, последовательность $\{f_n(z_1)\}$ ограничена, и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k^1}(z_1)\}$. Аналогично предыдущему шагу выбираем *из последовательности* $\{f_{n_k^1}\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k^2}\}$, сходящуюся в точке z_2. И так далее. *Диагональная* подпоследовательность $\{f_{n_k^k}\}$ удовлетворяет следующему условию: $\forall\, m \in \mathbb{N}$ существует конечный $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k^k}(z_m)$. Без ограничения общности мы будем считать, что исходная последовательность $\{f_n\}$ совпадает с подпоследовательностью $\{f_{n_k^k}\}$. Докажем, что $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри D.

Фиксируем произвольный компакт $K \subset D$ и любое $\varepsilon > 0$. Пусть

$$d = \min\big(\operatorname{dist}(K, \partial D),\, 1\big)\ \ ,\ \ K_\rho = \overline{\bigcup_{z\in K} B(z,\rho)}\,,\ (\rho > 0)\,.$$

Так как $\mathcal{F}$ р.н.вн. D, существует $\delta \in (0, d/2)$ такое, что для всех $z, z' \in K_{d/2}$ с условием $|z - z'| < \delta$ имеем $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon/3$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покроем K кругами $\{B(z_m,\delta)\}_{m=1}^{\infty}$ и выберем конечное подпокрытие $\{B(z_{m_s},\delta)\}_{s=1}^{S}$. Без ограничения общности будем считать, что все $z_{m_s} \in K_{d/2}$, поскольку $\delta < d/2$ и указанные круги с центрами не из $K_{d/2}$ не пересекают K.

Поскольку S – конечно и последовательности $\{f_n(z_{m_s})\}$ сходятся при всех $s \in \{1,\dots,S\}$, мы можем найти $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_n(z_{m_s}) - f_{n'}(z_{m_s})| < \varepsilon/3$ для всех $n > N$, $n' > N$ и всех $s \in \{1,\dots,S\}$.

Тогда для всех $z \in K$, $n > N$ и $n' > N$ имеем:

$$|f_n(z) - f_{n'}(z)| \leqslant |f_n(z) - f_n(z_{m_s})| + |f_n(z_{m_s}) - f_{n'}(z_{m_s})| + |f_{n'}(z_{m_s}) - f_{n'}(z)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

где z_{m_s} выбрана так, что $z \in B(z_{m_s},\delta)$ (существует по построению).

Итак, последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по равномерной норме на компакте K и, следовательно, эта последовательность равномерно сходится на K. В силу произвольности K, по теореме Вейерштрасса найдется $g \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $f_n \overset{\text{вн.}D}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} g$, что и требовалось. $\square$

Определение 4.4. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ – непустое семейство функций из D в $\mathbb{C}$, $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ – функционал. Функционал Φ называется *непрерывным на* $\mathcal{F}$ (в топологии равномерной сходимости внутри D), если $\forall\, f \in \mathcal{F}$ и для всякой последовательности $\{f_n\}$ из $\mathcal{F}$ с условием $f_n \overset{\text{вн.}D}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f$ имеем $\Phi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(f)$.

Предложение 4.1. *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ компактно (в топологии $\mathcal{A}(D)$), Φ непрерывен на $\mathcal{F}$. Тогда Φ ограничен на $\mathcal{F}$ и достигает своего максимума модуля на $\mathcal{F}$, т.е. $\exists\, f_* \in \mathcal{F}$ с условиями*

$$|\Phi(f_*)| = \max_{f\in\mathcal{F}} |\Phi(f)| = \sup_{f\in\mathcal{F}} |\Phi(f)|\,.$$

Доказательство. По определению $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |\Phi(f)|$ найдется $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ с условием $\lim\limits_{n\to+\infty} |\Phi(f_n)| = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |\Phi(f)|$. Из компактности $\mathcal{F}$ следует, что найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ в $\{f_n\}$ и $f_* \in \mathcal{F}$ для которых $f_{n_k} \overset{\text{вн.}D}{\underset{k\to+\infty}{\rightrightarrows}} f_*$. Поскольку Φ непрерывен, имеем: $|\Phi(f_*)| = \lim\limits_{k\to+\infty} |\Phi(f_{n_k})| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\Phi(f_n)| = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |\Phi(f)|\,.$ $\square$

5. Лекция 5. Теорема Римана о конформном изоморфизме.

Теорема 5.1. *[Римана, о конформном изоморфизме.] Пусть D и Ω – односвязные области в $\mathbb{C}^\sharp$, т.е. $D_c^\sharp$ и $\Omega_c^\sharp$ связны в $\mathbb{C}^\sharp$, причем $D_c^\sharp$ и $\Omega_c^\sharp$ содержат более чем по одной точке. Пусть $a \in D \cap \mathbb{C}$, $b \in \Omega \cap \mathbb{C}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$. Тогда существует единственный конформный изоморфизм $f : D \xrightarrow{на} \Omega$, удовлетворяющий условиям $f(a) = b$, $\arg f'(a) = \theta$.*

Теорема 5.2. *[Римана, о конформном изоморфизме, "упрощенная"версия.] Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $D \neq \mathbb{C}$. Тогда $\forall\, a \in D$ существует и единственно конформное (в данном случае однолистное) отображение $f : D \xrightarrow{на} B_1 = B(0,1)$, удовлетворяющее условиям $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = 0$.*

Упражнение 5.1. С помощью ДЛО свести теорему 5.1 к теореме 5.2.

Доказательство теоремы 5.2. Фиксируем $a \in D$. Пусть $\mathcal{F}_0$ – семейство всех *однолистных* функций $g : D \to B_1$ таких, что $g(a) = 0$ (сюръективность не требуется). Сначала докажем, что $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Поскольку $D_c^\sharp = \mathbb{C}^\sharp \setminus D$ связно и неодноточечно (и, следовательно, континуально), мы можем выбрать две разные точки a_1 и a_2 в $\mathbb{C} \setminus D$. По лемме 3.2 функции $\sqrt{z-a_1}$ и $\sqrt{z-a_2}$ имеют в D голоморфные ветви $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Определим функции $g_1(z) = v_1(z)/v_2(z)$, $g_2(z) = -g_1(z)$.

Лемма 5.1. *Функции g_1 и g_2 однолистны в D, причем $g_1(D) \cap g_2(D) = \varnothing$.*

Доказательство. Заметим, что

$$g_1^2(z) = g_2^2(z) = \frac{v_1^2(z)}{v_2^2(z)} = \frac{z-a_1}{z-a_2}.$$

Т.е. $g_1^2(z) = g_2^2(z) =: L(z)$ – ДЛО, которое инъективно в $\mathbb{C}^\sharp$, а, значит, и на D.

Если $g_1(z) = g_1(z')$ при $z, z' \in D$, то $L(z) = g_1^2(z) = g_1^2(z') = L(z')$, откуда $z = z'$. Следовательно g_1 и $g_2 = -g_1$ однолистны в D.

Пусть теперь $g_1(z) = g_2(z')$ для $z, z' \in D$. Тогда $L(z) = g_1^2(z) = g_2^2(z') = L(z')$ и, следовательно, $z = z'$. Таким образом, $g_1(z) = g_2(z)$; с другой стороны, по определению, $g_2 \equiv -g_1$, откуда $g_1(z) = 0$, что невозможно. Это противоречие доказывает второе утверждение леммы. □

Докажем теперь, что $\mathcal{F}_0 \neq \varnothing$. Поскольку $g_2(D)$ – область в $\mathbb{C}$ (по Теореме 2.4) и $g_1(D) \cap g_2(D) = \varnothing$, найдутся $w_0 \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ такие, что $B(w_0, r) \subset g_2(D)$, откуда $B(w_0, r) \cap g_1(D) = \varnothing$.

Положим

$$g_0(z) = \frac{r}{2}\Big(\frac{1}{g_1(z) - w_0} - \frac{1}{g_1(a) - w_0}\Big).$$

Лемма 5.2. *Имеем $g_0 \in \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.*

Доказательство. Однолистность $g_0(z)$ в D следует из того, что функция $g_0(z)$ есть композиция однолистной в D функции $g_1(z)$ и некоторого ДЛО. Очевидно, $g_0(a) = 0$. Для того, чтобы доказать, что $g_0(D) \subset B_1$, достаточно заметить, что

$$\Big|\frac{1}{g_1(z) - w_0}\Big| < \frac{1}{r}\ , \forall\, z \in D,$$

поскольку $|g_1(z) - w_0| > r$ при $z \in D$. В силу этого, $\forall z \in D$ имеем

$$|g_0(z)| \leqslant \frac{r}{2}\Big(\Big|\frac{1}{g_1(z) - w_0}\Big| + \Big|\frac{1}{g_1(a) - w_0}\Big|\Big) < \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{r} = 1.$$

□

Лемма 5.3. *Пусть* $\mathcal{F} = \big\{ g \in \mathcal{F}_0 \,\big|\, g'(a) \geqslant |g_0'(a)| \big\}$. *Тогда* $\mathcal{F} \neq \varnothing$ *– компактное семейство в* $\mathcal{A}(D)$.

Доказательство. Сразу отметим, что предкомпактность семейства $\mathcal{F}$ следует из теоремы 4.4 (Монтеля), поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ равномерно ограничено внутри D единицей. Кроме того, $g_0'(a) \neq 0$ ввиду однолистности функции g_0 в D.

Положим
$$g_*(z) = \frac{|g_0'(a)|}{g_0'(a)} g_0(z).$$
Ясно, что $g_* \in \mathcal{F} \neq \varnothing$. Пусть теперь $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$. Поскольку $\mathcal{F}$ предкомпактно, найдется $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ – подпоследовательность в $\{f_n\}$ с условием $f_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} f_*$, где f_* – некоторая функция. Докажем, что $f_* \in \mathcal{F}$.

По теореме Вейерштрасса $f_* \in \mathcal{A}(D)$, причем $f_{n_k}' \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} f_*'$, поэтому
$$f_*'(a) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}'(a) \geqslant |g_0'(a)|.$$
При этом f_* не константа, поскольку $g_0'(a) \neq 0$. Следовательно, $f_*(z)$ однолистна в D по теореме 4.2 о равномерном пределе однолистных функций.

Поскольку $f_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{вн.}D}{\rightrightarrows}} f_*$, легко видеть, что $f_*(a) = 0$ и $f_*(D) \subset \overline{B_1}$. Но f_* – не константа, так что $f_*(D)$ – область, откуда сразу следует, что реально $f_*(D) \subset B_1$. Лемма доказана. □

Рассмотрим функционал $\Phi : g \to g'(a)$ на $\mathcal{F}$. Он непрерывен на $\mathcal{F}$ по теореме Вейерштрасса. По предложению 4.1 (с учетом того, что $g'(a) \in \mathbb{R}_+$ для $g \in \mathcal{F}$) найдется $f \in \mathcal{F}$ с условием $f'(a) = \max\limits_{g\in\mathcal{F}} \{g'(a)\}$. Докажем, что f – искомое отображение (т.е. конформное отображение D на B_1, удовлетворяющее условиям $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = 0$). Поскольку $f \in \mathcal{F}$, остается установить, что $f(D) = B_1$.

Пусть, от противного, $\exists\, b \in B_1 \setminus f(D)$; ясно, что $b \neq 0$, поскольку $f(a) = 0 \in f(D)$. Рассмотрим ДЛО
$$\Lambda(w) = \frac{w-b}{1-\bar{b}w}$$
– автоморфизм круга B_1, удовлетворяющий условиям:
$$\Lambda(0) = -b\ , \quad \Lambda(b) = 0\ , \quad \Lambda'(w) = \frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}w)^2}\ , \quad \Lambda'(0) = 1 - |b|^2\ .$$

Рассмотрим $\Lambda\big(f(z)\big)$ – однолистную в D функцию, не равную 0 в D (поскольку $f(z) \neq b$ в D). Так как D односвязна, по лемме 3.2 существует голоморфная ветвь $h_1(z) \in \mathcal{A}(D)$ многозначной функции $\sqrt{\Lambda\big(f(z)\big)}$ в D. Утверждается, что функция $h_1(z)$ однолистна в D. Действительно, если $h_1(z) = h_1(z')$ для $z, z' \in D$, то $\Lambda\big(f(z)\big) = h_1^2(z) = h_1^2(z') = \Lambda\big(f(z')\big)$ и, следовательно, $z = z'$. Ясно, что $h_1(z)$ принимает значения из B_1, поскольку $h_1^2(z)$ принимает значения из B_1.

Итак, $h_1^2(z) = \Lambda\big(f(z)\big)$ – равенство голоморфных функций в D (в частности, $h_1(a) \in \sqrt{-b}$ и поэтому $|h_1(a)| = \sqrt{|b|}$), которое мы можем продифференцировать в точке $a \in D$:
$$2h_1(a)h_1'(a) = \Lambda'(0) \cdot f'(a) = (1 - |b|^2) \cdot f'(a).$$

Поэтому

$$\left|h_1'(a)\right| = \frac{(1-|b|^2)\cdot\left|f'(a)\right|}{2|h_1(a)|} = \frac{f'(a)\cdot(1-|b|^2)}{2\sqrt{|b|}}\,.$$

Рассмотрим

$$h_2(z) = \frac{h_1(z)-h_1(a)}{1-\overline{h_1(a)}h_1(z)}$$

– композицию $h_1(z)$ с ДЛО-автоморфизмом круга B_1, переводящим $h_1(a)$ в 0. Для h_2 имеем: $h_2(a)=0$, h_2 однолистна и принимает значения в B_1. Найдем по определению производную h_2 в точке a:

$$h_2'(a) = \lim_{z\to a}\frac{h_2(z)-h_2(a)}{z-a} = \lim_{z\to a}\frac{h_2(z)}{z-a} = \lim_{z\to a}\Bigl(\frac{h_1(z)-h_1(a)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\overline{h_1(a)}h_1(z)}\Bigr) =$$

$$= \frac{h_1'(a)}{1-|h_1(a)|^2} = \frac{h_1'(a)}{1-|b|}.$$

Тогда

$$|h_2'(a)| = \frac{f'(a)\cdot(1-|b|^2)}{2\sqrt{|b|}(1-|b|)} = f'(a)\cdot\frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}} > f'(a),$$

поскольку $\frac{1+|b|}{2} > \sqrt{1\cdot|b|}$ (ибо $|b|<1$).

Наконец, пусть

$$h(z) = h_2(z)\cdot\frac{|h_2'(a)|}{h_2'(a)}\,.$$

Тогда h, как и h_2, однолистна в D и принимает значения из B_1, $h(a)=0$ и $h'(a) = |h_2'(a)| > f'(a)$, т.е. $h\in\mathcal{F}$, но при этом $h'(a) > f'(a) = \max\limits_{g\in\mathcal{F}}\{g'(a)\}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 5.2. □

Упражнение 5.2. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ – односвязная область, $D\neq\mathbb{C}$. Для любой точки $a\in D$ пусть $\mathcal{A}_1(D,a)$ – класс всех *голоморфных* функций $g : D\to B_1$ с условием $g(a)=0$. Доказать, что значение $\sup\{|g'(a)|\mid g\in\mathcal{A}_1(D,a)\}$ *достигается на конформных изоморфизмах* $f : D\to B_1$ с условием $f(a)=0$.

Напомним, что жорданова область D в $\mathbb{C}$ называется *специальной*, если существует конечное множество $\Sigma\subset D$ и функция (Шварца) $S(z)\in\mathcal{A}(D\setminus\Sigma)$, непрерывная в $\overline{D}\setminus\Sigma$, такая, что $S(z)=\overline{z}$ на ∂D.

Упражнение 5.3. С помощью теоремы Римана доказать, что функция Шварца специальной области определена единственным образом.

Упражнение 5.4. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{A}(D)$ и $\mathrm{Re}(f'(z))\geq 0$ всюду в D. Доказать, что f либо однолистна в D, либо постоянна.

6. Лекция 6. Принцип соответствия границ (теорема Каратеодори, частный случай).

Здесь мы докажем некоторый *упрощенный* вариант *принципа соответствия границ* (теоремы Каратеодори), который, тем не менее, вполне достаточен в ряде важных приложений, например при доказательстве наиболее общих версий принципа аргумента, теоремы Руше и обратного принципа соответствия границ, малой теоремы Пикара и разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в жордановых областях.

Теорема 6.1. *[Каратеодори]. Пусть D и Ω — жордановы области в $\mathbb{C}^\sharp$. Пусть $f\colon D \to \Omega$ — какой-либо их конформный изоморфизм (существующий по теореме Римана). Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\Omega}$.*

Замечание. Не ограничивая общности, мы будем рассматривать случай $D \subset \mathbb{C}$, $\Omega = B_1 := B(0,1)$. Кроме того, мы *будем опираться* на хорошо известный, но не тривиальный (даже по модулю теоремы Жордана) факт, что в указанных условиях *существует гомеоморфизм* $\overline{D}$ на $\overline{B}_1$, при котором D переходит на B_1.

Доказательство разобьем на несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес.

Лемма 6.1. *[Кёбе]. Пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$, $\|f\|_{B_1} = M < +\infty$. Пусть в B_1 проведены два радиуса I_0 и I_1 под углом π/p (p – натурально), а жорданов путь $\gamma\colon [0,1] \to B_1$* соединяет *эти радиусы (т.е. $\gamma(0) \in I_0$, $\gamma(1) \in I_1$). Тогда при $\varepsilon = \|f\|_{[\gamma]}$ справедлива оценка $|f(0)| \leqslant \sqrt[2p]{\varepsilon M^{2p-1}}$.*

Доказательство. Если $0 \in [\gamma] = \gamma([0,1])$, то $|f(0)| \leqslant \varepsilon$ и все доказано ввиду $\varepsilon \leqslant M$. Далее предполагается, что $0 \notin [\gamma]$. Напомним, что $||f||_E = \sup_{z\in E} |f(z)|$. Без ограничения общности мы будем считать, что I_0 совпадает с $[0,1)$, I_1 — с

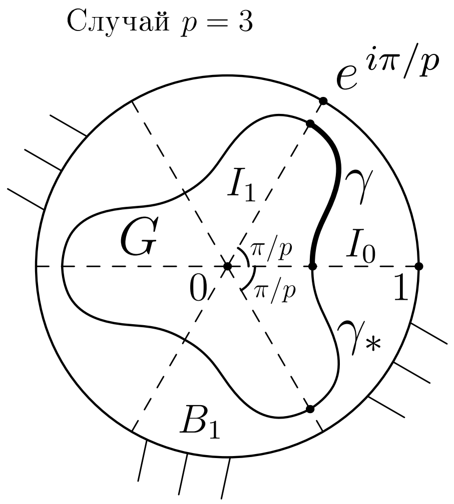

Рис. 6.1.

полуинтервалом $[0, e^{i\pi/p})$, а $[\gamma]$ не имеет других общих точек с I_0 и I_1, кроме концевых, причем $[\gamma]$ целиком лежит в том секторе между I_0 и I_1, который принадлежит (замкнутой) верхней полуплоскости.

Положим $g(z) = f(z)\overline{f(\overline{z})}$ и $\gamma_*(t) = \overline{\gamma(t)}$, $t \in [0,1]$. Тогда

$$g \in \mathcal{A}(B_1), \quad \|g\|_{B_1} \leqslant M^2, \quad \|g\|_{[\gamma]\cup[\gamma_*]} \leqslant M\varepsilon.$$

При $p = 1$ пусть $h(z) = g(z)$, а при $p > 1$ определим

$$h(z) = g(z)g(ze^{2\pi i/p}) \cdots g(ze^{2\pi i(p-1)/p}).$$

Рассмотрим (жорданову) область G, ограниченную кривой $\{\gamma_*^-\} \cup \{\gamma\}$ и (при $p > 1$) результатами её поворотов на углы $2\pi/p$, ..., $2\pi(p-1)/p$. При этом

$$h \in \mathcal{A}(G) \cap C(\overline{G}), \quad \|h\|_{\partial G} \leqslant \varepsilon M(M^2)^{p-1},$$

откуда по принципу максимума модуля (в G) получаем: $|h(0)| = |f(0)|^{2p} \leqslant \varepsilon M^{2p-1}$. То, что $0 \in G$ следует из очевидного соотношения $\mathrm{ind}_{\partial^+ G}(0) = 1$. □

Следствие 6.1.1. *Пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$, $\|f\|_{B_1} < +\infty$, p – натурально, $\delta \in (0,1)$. Пусть существует последовательность жордановых путей $\{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ таких, что (при каждом n) $[\gamma_n] \subset B_1 \setminus \overline{B(0,\delta)}$ и γ_n соединяет некоторую пару радиусов (не обязательно одну и ту же для разных n), образующую угол π/p. Если $\|f\|_{[\gamma_n]} \to 0$ при $n \to +\infty$, то $f \equiv 0$.*

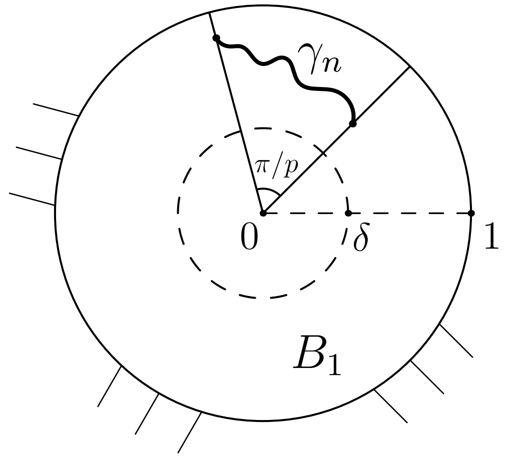

Рис. 6.2.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n = \|f\|_{[\gamma_n]}$, $M = \|f\|_{B_1}$. По предыдущей лемме, $|f(0)| \leqslant \sqrt[2p]{\varepsilon_n M^{2p-1}} \to 0$ при $n \to +\infty$, так что $f(0) = 0$. Пусть, от противного, $f \not\equiv 0$ в B_1 и $f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n$ – разложение Тейлора функции f в B_1, где k натурально и $c_k \neq 0$. Рассмотрим $f_1(z) = f(z)/z^k$ при $z \in B_1 \setminus \{0\}$, $f_1(0) = c_k$. Тогда f_1 удовлетворяет условиям настоящего следствия и, по доказанному, должно быть $f_1(0) = 0$. Противоречие. □

Лемма 6.2. *[Линделёф]. Пусть G – произвольная область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(G)$ и имеют место следующие условия:*

(1) *$M = \|f\|_G < +\infty$;*
(2) *найдутся $a \in G$ и $r \in (0,+\infty)$ такие, что окружность $\{|z-a| = r\}$ имеет (связную) дугу длины $2\pi r/p$ (p – натурально), лежащую вне G;*
(3) *при стремлении z из $G \cap B(a,r)$ к ∂G* все *предельные значения функции $|f(z)|$ не превосходят $\varepsilon \geqslant 0$.*

Тогда $|f(a)| \leqslant \sqrt[p]{\varepsilon M^{p-1}}$.

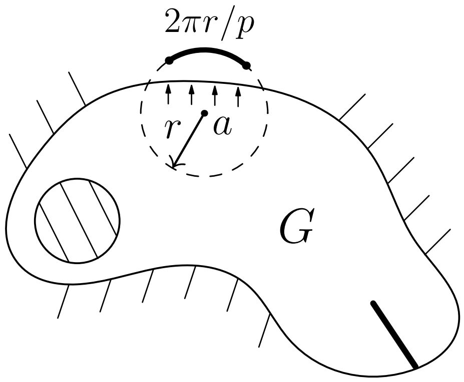

Рис. 6.3.

Доказательство. Будем считать, что $a = 0$. Пусть G_* – связная компонента (содержащая точку 0) открытого множества $\bigcap_{k=0}^{p-1} G_k$, где G_k – результат поворота области G вокруг начала координат на угол $2\pi k/p$). Очевидно, что $\{|z| = r\} \cap G_* = \emptyset$, так что $G_* \subset B(0, r)$. Нетрудно показать, что все предельные значения функции

$$h(z) = f(z)f(ze^{2\pi i/p}) \cdots f(ze^{2\pi i(p-1)/p})$$

на ∂G_* (изнутри G_*) не превышают εM^{p-1}. По принципу максимума модуля (усиленный вариант, доказать в качестве упражнения), $|h(0)| = |f(0)|^p \leqslant \varepsilon M^{p-1}$.

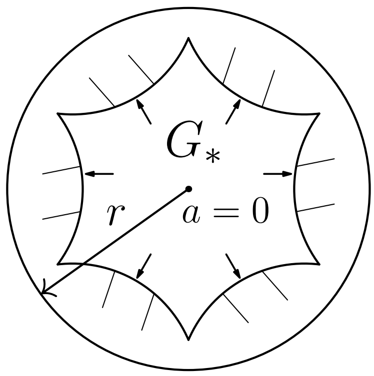

Рис. 6.4.

□

Лемма 6.3. *[Граничная теорема единственности]. Пусть G – область в $\mathbb{C}$ с условием $\partial G = \partial\overline{G}$, $f \in \mathcal{A}(G)$ и $\|f\|_G < +\infty$. Пусть найдутся $z_0 \in \partial G$ и $\delta > 0$ такие, что при стремлении z из $G \cap B(z_0, \delta)$ к ∂G все предельные значения функции $f(z)$ равны комплексному числу c. Тогда $f \equiv c$ в G.*

Доказательство. При $a \in G \cap B(z_0, \delta/2)$ и некотором $r \in (0, \delta/2)$ окружность $\{|z - a| = r\}$ имеет дугу, лежащую вне G (по свойству $\partial G = \partial\overline{G}$, точка z_0 является граничной также для множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$). Применяя предыдущую лемму для области G, функции $(f - c)$ и значения $\varepsilon = 0$, получим $f(a) - c = 0$. По теореме единственности $f \equiv c$ в G. □

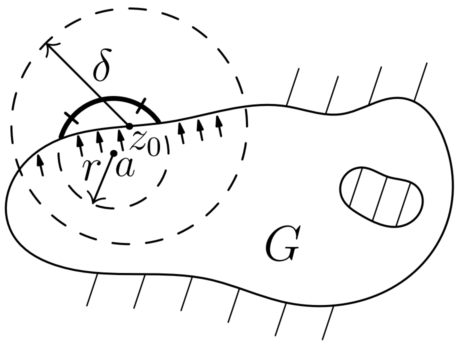

Рис. 6.5.

Приведем без доказательства одну известную теорему, которая для частного случая, когда Z_g° плотно в Z_g, непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

Теорема 6.2. *[Радо]. Пусть G – произвольная область в $\mathbb{C}$, $g \in C(G)$ и $Z_g = \{z \in G \mid g(z) = 0\}$. Если g голоморфна на $G \setminus Z_g$, то $g \in \mathcal{A}(G)$.*

Доказательство теоремы 6.1. Пусть D – жорданова область и $f : D \to B_1$ – конформный изоморфизм. *Считаем известным* существование гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{B}_1$, при котором D отображается на B_1.

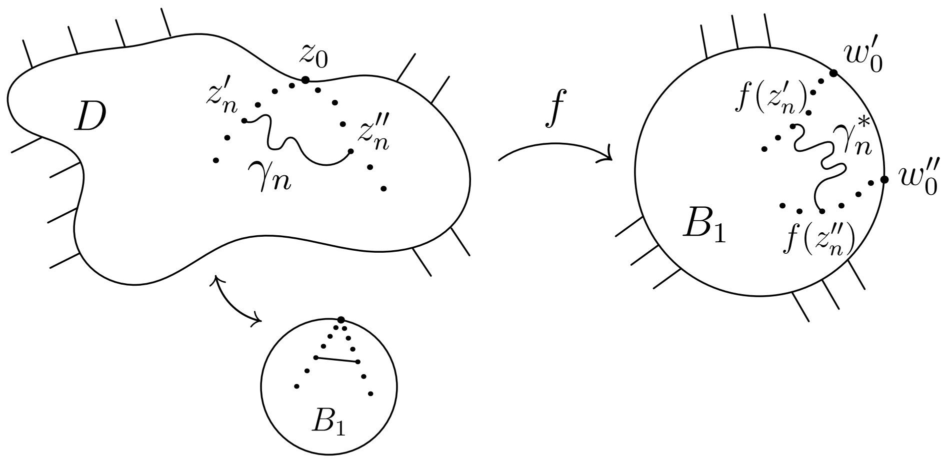

Рис. 6.6.

1°. Докажем, что f непрерывно продолжается на ∂D. Если, от противного, это не так, то найдутся $z_0 \in \partial D$ и последовательности $\{z'_n\}$, $\{z''_n\}$ в D, сходящиеся к z_0, такие, что $f(z'_n) \to w'_0$, $f(z''_n) \to w''_0$ при $n \to +\infty$, причем $w'_0 \neq w''_0$ (проверить!; существование таких последовательностей вытекает из ограниченности f). Поскольку $f\colon D \to B_1$ – *гомеоморфизм*, легко показать, что $w'_0, w''_0 \in \partial B_1$. Ввиду гомеоморфности $\overline{D}$ и $\overline{B}_1$ найдутся жордановы пути γ_n в D, соединяющие z'_n и z''_n, с условием $\operatorname{diam}([\gamma_n]) \to 0$ (т.е. $[\gamma_n] \to z_0$ при $n \to +\infty$). Пусть $\gamma_n^* = f \circ \gamma_n$. Применяя следствие 6.1.1 для $g(w) = f^{-1}(w) - z_0$ и $\{\gamma_n^*\}$ в B_1 (ясно, что $\|g\|_{[\gamma_n^*]} \to 0$ и $\{\gamma_n^*\}$ отделены от точки 0 при $n \to +\infty$), получаем $f^{-1}(w) \equiv z_0$ – противоречие.

2°. Продолжим f по непрерывности (единственным образом) из D на $\overline{D}$ согласно 1°. Как нетрудно видеть, $f(\partial D) \subset \partial B_1$. Поскольку $f\colon D \to B_1$ – гомеоморфизм, остается установить взаимную-однозначность функции f на ∂D.

От противного, пусть найдутся $z_1 \neq z_2 \in \partial D$, для которых $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Тогда существуют жордановы *пути* $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to \overline{D}$ (причем $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1) \to D$), $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = z_1$, $\gamma_2(1) = z_2$, при этом $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$ имеют только одну общую точку $\gamma_1(0)$ (здесь можно воспользоваться гомеоморфизмом $\overline{D}$ и $\overline{B}_1$, а в B_1 взять два соответствующих радиуса). При этом $f(\gamma_1(t)) \to w_0$ и $f(\gamma_2(t)) \to w_0$ при $t \to 1-$.

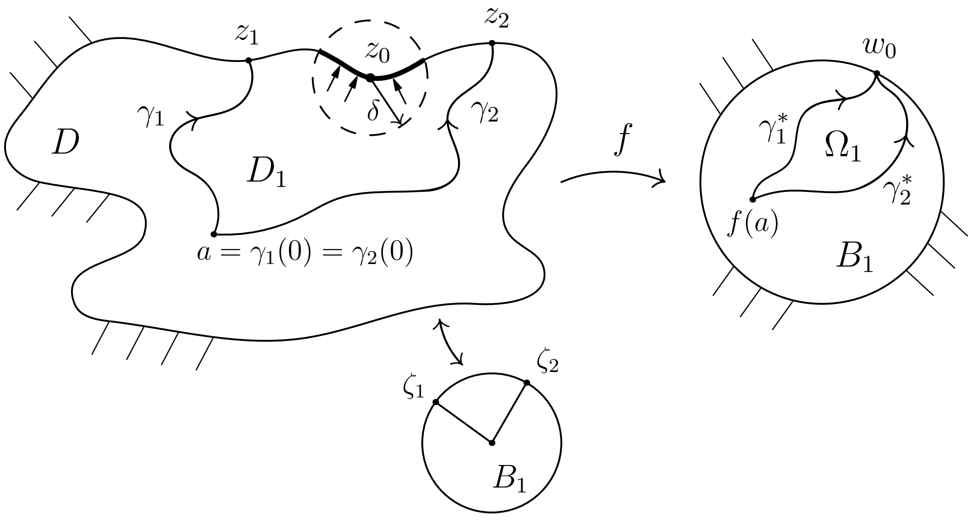

Рис. 6.7.

Положим $\gamma_1^* = f \circ \gamma_1$, $\gamma_2^* = f \circ \gamma_2$. Пусть Ω_1 – жорданова область (в B_1), ограниченная кривой $\{\gamma_1^*\} \cup \{\gamma_2^*\}^-$, и пусть $D_1 = f^{-1}(\Omega_1)$ (область D_1 тоже *жорданова*!). Пусть $z_0 \in \partial D_1 \setminus ([\gamma_1] \cup [\gamma_2])$. При некотором $\delta > 0$ круг $B(z_0, \delta)$ не пересекает $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$, так что к функции $f(z) - w_0$ в D_1 можно применить лемму 6.3, по которой $f \equiv w_0$ в D_1. Противоречие. $\square$

Упражнение 6.1. Пусть D, Ω – жордановы области в $\mathbb{C}$, $a \in D$, $b \in \Omega$, $c \in \partial D$, $d \in \partial\Omega$. Тогда $\exists\,!$ конформный изоморфизм $D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, такой, что $f(a) = b$, $f(c) = d$.
Указание. Отобразить обе области в круг ($a \to 0$, $b \to 0$) и сделать поворот круга на нужный угол.

Упражнение 6.2. Пусть D, Ω – жордановы области в $\mathbb{C}$, $c_1, c_2, c_3 \in \partial D$, $d_1, d_2, d_3 \in \partial\Omega$, причем тройки точек расположены на соответствующих границах «против часовой стрелки». Тогда $\exists\,!$ конформный изоморфизм $D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, такой, что $f(c_j) = d_j$, $j = 1, 2, 3$.
Указание. Сводим задачу к двум кругам. Применяем ДЛО. Напомним, что по лемме Шварца любой конформный изоморфизм круга есть ДЛО.

Упражнение 6.3. Адаптировать доказательство теоремы 6.1 на случай конформного изоморфизма двух колец.

7. Лекция 7. Следствия из теорем Римана и Каратеодори. Гомотопии кривых.

Приведем важные следствия из теорем Римана и Каратеодори, а также других теорем нашего курса.

Теорема 7.1. *[О разрешимости ЗД для ГрФ]. Пусть D – произвольная жорданова область в $\mathbb{C}$, $h_0 \in C(\partial D)$ – вещественная функция. Тогда ЗД для ГрФ с граничными данными h_0 разрешима.*

Доказательство. Для случая круга эта теорема доказана. Остается воспользоваться теоремами Римана и Каратеодори и методом конформных отображений для решения ЗД. □

Теорема 7.2. *[Принцип аргумента]. Пусть D – произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа (носителей) попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Пусть функция f голоморфна в D за исключением конечного множества M своих полюсов и непрерывна в $\overline{D} \setminus M$. Если f не обращается в 0 на ∂D, то в обозначениях теоремы 2.1 и определения 2.3 верно следующее равенство:*

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial_+ D} \operatorname{Arg}(f) = N_D(f) - P_D(f).$$

Доказательство. Обсудим доказательство для случая *жордановой* области D. Общий случай оставляем читателю (по аналогии). Пусть $k : B_1 \to D$ – конформный изоморфизм (теорема Римана), *продолженный* по теореме Каратеодори до гомеоморфизма $\overline{B_1}$ на $\overline{D}$. Из равномерной непрерывности k найдется $r \in (0,1)$ такое, что для путей $\gamma_1(t) = k(e^{it})$, $t \in [-\pi,\pi]$ ($\{\gamma_1\} = \partial^+ D$), и $\gamma_r(t) = k(re^{it})$, $t \in [-\pi,\pi]$, выполняются следующие условия ($[\gamma_r]$ ограничивает область D_r):

(а) все нули и полюса функции f лежат в D_r;

(б) $\|\gamma_1 - \gamma_r\|_{[-\pi,\pi]} < \min\{|\gamma_1(t)|,\ t \in [-\pi,\pi]|\}$.

По установленному ранее, $\Delta_{\partial_+ D} \operatorname{Arg}(f) = \Delta_{\partial_+ D_r} \operatorname{Arg}(f)$. Остается проверить (хорошее упражнение!), что область D_r – простая, а для них принцип аргумента установлен ранее. □

Теорема 7.3. *[Обратный принцип соответствия границ]. Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, $\Gamma^+ = \partial^+ D$. Пусть f инъективно отображает $[\Gamma^+]$ на $f([\Gamma^+])$ ($\Sigma = f(\Gamma^+)$ – тоже замкнутая жорданова кривая). Пусть Ω – жорданова область, ограниченная $[\Sigma]$ (по теореме Жордана). Тогда f конформно (однолистно) отображает D на Ω, причем $\Sigma = \partial^+\Omega$, т.е. Σ положительно ориентирована относительно Ω.*

Доказательство. Пользуемся доказательством теоремы 3.3 с применением усиленного принципа аргумента (теоремы 7.2). □

Упражнение 7.1. Доказать следующее утверждение. Пусть $D_1, \ldots, D_S$ – жордановы области в $\mathbb{C}$ ($S \geq 2$ – натурально). Предположим, что *замыкания* областей $D_2, \ldots, D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1. Тогда множество $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^{s=S} \overline{D_s})$ является областью.

Теорема 7.4. *[О специальных областях]. Пусть f голоморфна в $\mathbb{C}^\sharp$, за исключением конечного множества точек $F \subset \mathbb{C}^\sharp \setminus \overline{B_1}$, и взаимно-однозначна на $\overline{B_1}$. Тогда $\Omega = f(B_1)$ является специальной областью. Пусть $F = \{a_1, \ldots, a_N\}$,*

$z_n = 1/\overline{a_n}$, $w_n = f(z_n)$, $\Sigma = \{w_1, \ldots, w_N\} \subset \Omega$. *Тогда функция Шварца S области Ω определена по формуле*

$$S(w) = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}\,.$$

При этом функция S имеет в точке w_n особенность аналогичную особенности у функции f в точке a_n. В частности, область Ω является неванлинновской если и только если указанная функция f рациональна.

Обратно, если Ω – специальная область с функцией Шварца S (голоморфной в $\Omega \setminus \Sigma$), и f – какое-либо конформное отображение B_1 на Ω (продолженное до гомеоморфизма их замыканий), то f продолжается голоморфно из B_1 на $\mathbb{C}^\sharp \setminus F$, где F и Σ связаны как ранее (включая типы соответствующих особых точек у f и S).

Доказательство. Отметим сначала, что формула для S получена из условия

$$\overline{z} = \overline{f^{-1}(w)} = 1/f^{-1}(w) = 1/z \iff \overline{w} = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}$$

при $w \in \partial\Omega$, $z \in \partial B_1$, так что $\overline{w} = S(w)$ на $\partial\Omega$. Положим $Z = \{z_1, \ldots, z_N\}$. Как в принципе симметрии доказывается, что функция $g(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ голоморфна на $B_1 \setminus Z$ и, следовательно, $S(w) = g(f^{-1}(w))$ является голоморфной на $\Omega \setminus \Sigma$. Легко проверяется наличие или отсутствие $\lim_{w \to w_n} S(w)$ (аналогично $\lim_{z \to a_n} f(z)$, т.е. соответствие типов особых точек у f и S), а также непрерывность функции S на $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$. Обратное утверждение теоремы доказывается аналогично с использованием теоремы Морера. □

Упражнение 7.2. Пусть $b_1, \ldots, b_N$ – заданные разные точки в $\mathbb{C}$; $p_1, \ldots, p_N$ – натуральные числа. Пользуясь предыдущей теоремой привести алгоритм построения какой-либо неванлинновской области Ω, у которой функция Шварца имеет в Ω полюса b_n порядка p_n, $n \in \{1, \ldots, N\}$ (без других особых точек в Ω).

Указание. В обозначениях предыдущей теоремы при $a_1 = \infty$ $(z_1 = 0)$ рассмотреть функцию f вида

$$f(z) = z + \frac{\varepsilon z^p (z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - a_2)^{p_2} \cdots (z - a_N)^{p_N}}\ , \quad p = p_1 + \cdots + p_N - (N+1)\,,$$

для достаточно малого ε. Тогда $w_n = z_n$ при $n \in \{1, \ldots, N\}$.

В дальнейшем (в конце курса) мы применим теоремы Римана и Каратеодори для построения модулярной функции (при доказательстве малой теоремы Пикара). А сейчас эти две теоремы нам понадобятся в связи с появлением понятия гомотопии.

Определение 7.1. Пусть D – область в $\mathbb{C}$; $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ – пути в D, причем $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Говорят, что γ_0 и γ_1 *гомотопны в D как пути с одинаковыми концами* (или *(1)-гомотопны в D*), если существует отображение $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) Γ непрерывно по совокупности двух переменных на $[0,1]^2$;

(2) $\forall s \in [0,1]$ имеем $\begin{cases} \Gamma(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ \Gamma(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1); \end{cases}$

(3) $\forall t \in [0,1]$ имеем $\begin{cases} \Gamma(t,0) = \gamma_0(t), \\ \Gamma(t,1) = \gamma_1(t). \end{cases}$

Краткое обозначение указанного условия: $\gamma_0 \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$.

Определение 7.2. Пусть D – область в $\mathbb{C}$; $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ – пути в D, причем $\gamma_0(0) = \gamma_0(1), \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$. Говорят, что γ_0 и γ_1 *гомотопны в D как замкнутые пути* (или *(2)-гомотопны в D*), если существует отображение $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) Γ непрерывно по совокупности переменных на $[0,1]^2$;

(2) $\forall s \in [0,1]$ имеем $\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s)$;

(3) $\forall t \in [0,1]$ имеем $\begin{cases} \Gamma(t,0) = \gamma_0(t), \\ \Gamma(t,1) = \gamma_1(t). \end{cases}$

Краткое обозначение: $\gamma_0 \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$.

В обоих случаях (при фиксированном s) путь $\gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$, $t \in [0,1]$, называется *s-м путем гомотопии.* Семейство путей $\{\gamma_s \,|\, s \in [0,1]\}$ называется *семейством, осуществляющим гомотопию* Γ.

Предложение 7.1. *Если $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ (эквивалентные пути на $[0,1]$), то $\gamma_0 \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$ для любой области D, содержащей $[\gamma_0] = [\gamma_1]$. Если $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ и пути γ_0 и γ_1 замкнуты, то $\gamma_0 \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$ для любой области D, содержащей $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.*

Доказательство. Положим $\Gamma(t,s) = \gamma_1\big((1-s)h(t)+st\big)$, где $h : [0,1] \to [0,1]$ – существующий по определению эквивалентности путей возрастающий гомеоморфизм с условием $\gamma_1\big(h(t)\big) = \gamma_0(t)$. □

Таким образом, корректно говорить о *гомотопных кривых* в области (для обоих типов гомотопности).

Упражнение 7.3. Если $\{\gamma_0\} \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \{\gamma_1\}$, то кривая $\{\gamma\} = \{\gamma_0\} \cup \{\gamma_1\}^- \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \{0\}_D$.

Обозначение $\{0\}_D$ используется для *класса всех точечных путей* в D (любые два точечных пути в D (2)-гомотопны в D).

Упражнение 7.4. Положим $D = \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (в качестве D можно взять и любое кольцо с центром в нуле, содержащее ∂B_1). Пусть $\gamma : [0,1] \to D$ – замкнутый путь, $n = \mathrm{ind}_\gamma(0) = (2\pi)^{-1}\Delta_\gamma Arg\,(z)$. Если $\gamma_n(t) = e^{2\pi int}|_{[0,1]}$ – путь, равномерно проходящий n раз ∂B_1, то $\gamma \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_n$.

Определение 7.3. Область D в $\mathbb{C}$ называется $\Gamma(1)$-односвязной (соответственно, $\Gamma(2)$-односвязной), если любые два пути $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ с одинаковыми концами (соответственно, замкнутые пути в D) (1)-гомотопны в D (соответственно, (2)-гомотопны в D).

Теорема 7.5. *[Эквивалентные определения односвязной области в $\mathbb{C}$.] Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1.1) D односвязна в $\mathbb{C}$, т.е. $D_c^\sharp = \mathbb{C}^\sharp \setminus D$ связно в $\mathbb{C}^\sharp$;

(1.2) $\partial^\sharp D$ связна в $\mathbb{C}^\sharp$;

(2.1) D гомеоморфна B_1;

(2.2) D конформно эквивалентна B_1 (это условие эквивалентно остальным при $D \neq \mathbb{C}$);

(3) существует исчерпание D жордановыми областями (являющимися гомеоморфными образами кругов), т.е. существует семейство $\{G_n\}_{n=1}^{+\infty}$ жордановых областей с условиями: $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ и $\overline{G_n} \subset D$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} G_n = D$;

(4) D является $\Gamma(1)$-односвязной;

(5) D является $\Gamma(2)$-односвязной ($\pi_1(D) = \{0\}$);

(6) D односвязна по Жордану, т.е. выполнено любое из двух эквивалентных условий:

(6.1) для любого компакта K в D его оболочка $\hat{K} \subset D$;

(6.2) для всякой замкнутой жордановой ломаной γ в D имеем $\overline{D_\gamma} \subset D$.

План доказательства.

(1.2) $\Rightarrow$ (1.1) – от противного (из определений связности и границы).

(1.1) $\Rightarrow$ (6.1) – было в прошлом семестре.

(6.1) $\Rightarrow$ (6.2) – по теореме Жордана для ломаных.

(6.2) $\Rightarrow$ (2.2) – здесь верна теорема о $\exists$-ии п/о, и по теореме Римана.

(2.2) $\Rightarrow$ (2.1) – очевидно.

(2.1) $\Rightarrow$ (3) – устраиваем исчерпание образами кругов $\{|z| < n/(n+1)\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) – нужное условие выполняется в каждом $\{G_n\}$.

(4) $\Rightarrow$ (5) – несложное упражнение (разобрать на семинарах).

(5) $\Rightarrow$ (2.2) – докажем в будущем (см. теорему о монодромии).

(2.1) $\Rightarrow$ (1.2) – см. ниже.

(2.1) $\Rightarrow$ (1.2) (прямое доказательство). Пусть, от противного, $f : B_1 \to D$ – гомеоморфизм, но $\partial^\sharp D$ не связна. Найдем открытые Ω_1 и Ω_2 в $\mathbb{C}^\sharp$ с условиями $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\partial^\sharp D \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\partial^\sharp D \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ и $\partial^\sharp D \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Введем $K = \partial\Omega_1 \cap D$ – непустой компакт в D (иначе $D \subset \Omega_1$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ – противоречие). Тогда $K_1 = f^{-1}(K)$ – компакт в B_1, так что найдется $r \in (0,1)$ с условием $K_1 \subset \overline{B_r}$, где $B_r = B(0,r)$. Так как $f(\overline{B_r})$ – компакт в D, то найдутся $z_1 \in \Omega_1 \setminus f(\overline{B_r})$ и $z_2 \in \Omega_2 \setminus f(\overline{B_r})$. Положим $w_1 = f^{-1}(z_1)$, $w_2 = f^{-1}(z_2)$ и соединим их путем (ломаной) γ в $B_1 \setminus \overline{B_r}$. Но тогда $f \circ \gamma$ – путь, соединяющий z_1 и z_2 в D, не пересекающий $f(\overline{B_r})$ и, следовательно, содержащееся в нем множество $\partial\Omega_1 \cap D$. Таким образом, $f \circ \gamma$ не пересекает всю $\partial\Omega_1$. Поскольку $z_1 \in \Omega_1$, а $z_2 \notin \Omega_1$, мы приходим к противоречию (достаточно воспользоваться принципом вложенных отрезков).

$\square$

Упражнение 7.5. Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$ и f – гомеоморфизм $\overline{B_1}$ на $\overline{D}$. Тогда $f|_{B_1}$ – гомеоморфизм B_1 и D.

8. Лекция 8. Аналитическое продолжение по Вейерштрассу. Единственность аналитического продолжения вдоль пути.

Определение 8.1. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{A}(G)$. Пара $\mathcal{G} = (G, g)$ называется *аналитическим элементом.*

Определение 8.2. Аналитические элементы $\mathcal{G}_1 = (G_1, g_1)$ и $\mathcal{G}_2 = (G_2, g_2)$ называются *непосредственными аналитическими продолжениями* друг друга, если существует открытый круг B с условиями $B \subset G_1 \cap G_2$ и $g_1 \equiv g_2$ в B. В частности, $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$.

Краткое обозначение для указанного условия: $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

Определение 8.3. Аналитические элементы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ называются *аналитическими продолжениями* друг друга *по цепочке (аналитических) элементов* $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_N$, если $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_1 \leftrightarrow ... \leftrightarrow \mathcal{F}_N \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

Определение 8.4. Пусть $B = B(a, R_a)$ – открытый круг, $f \in \mathcal{A}(B)$, причем B является кругом сходимости ряда Тейлора функции f с центром a. Элемент $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a = (B, f)$ называется *каноническим аналитическим элементом* (с функцией f, центром a, радиусом R_a). Для краткости такой элемент будет также обозначаться через $Э_a^f$.

В дальнейшем рассматриваются только канонические аналитические элементы, если не оговорено противного.

Упражнение 8.1. Пусть $f(z) = ln\, z$ в $\mathbb{C}_-$. Тогда $\forall a \in \mathbb{C}_-$ определен $Э_a^f$.
1) Выписать все $Э_a^f$.
2) Для каких a, b верно, что $Э_a^f \leftrightarrow Э_b^f$?

Предложение 8.1. *Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a) = (B(a, R_a), f_a)$, $\mathcal{F}_b = (B_b, f_b) = (B(b, R_b), f_b)$ – канонические аналитические элементы, и пусть $\mathcal{F}_a \leftrightarrow \mathcal{F}_b$. Тогда*
1) если $R_a = +\infty$, то $R_b = +\infty$ и $f_a \equiv f_b$ – целая функция;
2) если $R_a < +\infty$, то $R_b < +\infty$, $\big|R_a - R_b\big| \le \big|a - b\big|$ и $f_a \equiv f_b$ на $B_a \cap B_b$.

Доказательство. 1) По теореме единственности.
2) Ни один из соответствующих *замкнутых* кругов $\overline{B_a}$ или $\overline{B_b}$ не может строго содержаться внутри второго по теореме Коши-Тейлора. Поэтому найдется точка $c \in \partial B_a \cap \partial B_b$. Тогда $|R_a - R_b| \le |a - b|$ по неравенству треугольника для трех точек a, b, c, а $f_a \equiv f_b$ на $B_a \cap B_b$ по теореме единственности. $\square$

Предложение 8.2. *Пусть $\{\mathcal{F}^t \,|\, t \in T\}$ – семейство (канонических) элементов, удовлетворяющих следующим условиям:*
(1) для любых $\tau_1, ..., \tau_J$ из T $(J \in \mathbb{N})$ круги $B^{\tau_1}, ..., B^{\tau_J}$ элементов $\mathcal{F}^{\tau_1}, ..., \mathcal{F}^{\tau_J}$ имеют непустое пересечение $(B^{\tau_1} \cap ... \cap B^{\tau_J} \neq \varnothing)$;
(2) для любых $t, t' \in T$ найдутся $t_1, ..., t_N \in T$ $(N \in \mathbb{N})$ такие, что $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_1} \leftrightarrow ... \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_N} \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$.
Тогда для всех $t, t' \in T$ имеем $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$.

Доказательство. *Фиксируем* произвольные $t, t' \in T$. В обозначениях (2) пусть $B^t, B^{t_1}, \ldots B^{t_N}, B^{t'}$ – круги элементов $\mathcal{F}^t, \mathcal{F}^{t_1}, \ldots, \mathcal{F}^{t_N}, \mathcal{F}^{t'}$ соответственно. Поскольку множество $B^t \cap B^{t_1} \cap \cdots \cap B^{t_N} \cap B^{t'}$ открыто и (по условию (1)) непусто, в нем содержится некоторый открытый круг B_0. Таким образом, $f^t \equiv f^{t_1} \equiv \cdots \equiv f^{t_N} \equiv f^{t'}$ на B_0, т.е. по определению имеем $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$, что и требовалось. $\square$

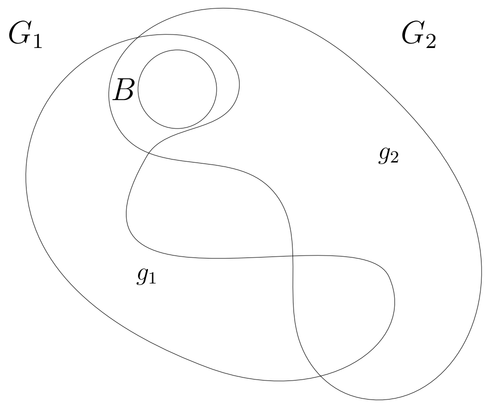

Рис. 8.1.

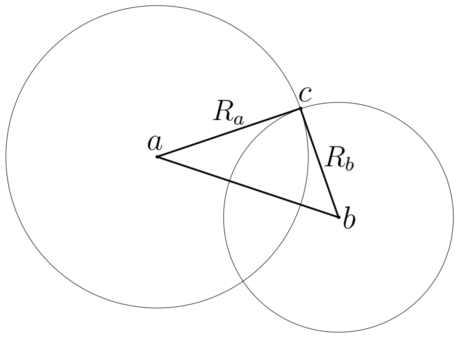

Рис. 8.2.

Определение 8.5. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ – (канонический) элемент с центром $a \in \mathbb{C}$, и пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, такой, что $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ (последние два свойства будем кратко обозначать, используя символ γ_{ab} вместо γ).

Говорят, что элемент $\mathcal{F}_a$ *допускает аналитическое продолжение (АП) вдоль пути* γ_{ab}, если существует семейство $\mathbb{F}_\gamma = \left\{\mathcal{F}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ элементов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathcal{F}_\gamma^\alpha = \mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_\gamma^t$ имеет центр $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$;

2) для любого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ найдется окрестность $O(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$, такая, что при всех $t \in O(t_0)$ имеем $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$.

Элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_\gamma^\beta$ называется *результатом продолжения* элемента $\mathcal{F}_a$ *вдоль* γ. Совокупность элементов $\left\{\mathcal{F}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ называется *семейством, осуществляющим это продолжение.*

Замечание 1. Далее будет доказано, что семейство, осуществляющее аналитическое продолжение вдоль пути (если существует) – единственно, поэтому определения семейства и результата продолжения корректны.
Замечание 2. Элемент $\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)$ зависит от t, а не только от $\gamma(t)$.

Пример 8.1 (Логарифм). Пусть $f(z) = ln\, z$ в $\mathbb{C}_-$, $a \in \mathbb{C}_-$, $\mathcal{L}_a = Э_a^f$. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – путь, $\gamma(\alpha) = a$. Определим семейство $\left\{\mathcal{L}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$, осуществляющее АП $\mathcal{L}_a$ вдоль γ.

Мы знаем, что существует (и единственна) непрерывная ветвь $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ (на всем $[\alpha, \beta]$) многозначной функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$, определяемая условием $\varphi(\alpha) =$

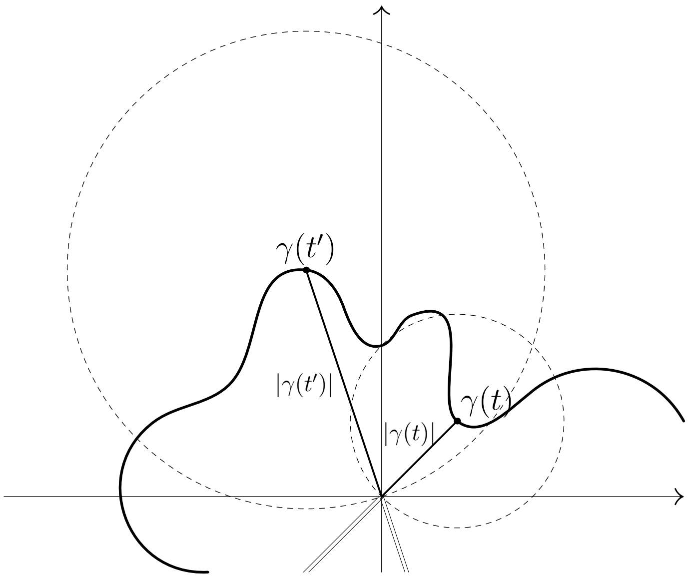

Рис. 8.3.

$\arg(a)$. Тогда при $t \in [\alpha, \beta]$ положим $\mathcal{L}_\gamma^t = \Big(B_\gamma^t, l_\gamma^t(z)\Big)$, где

$$B_\gamma^t = B\big(\gamma(t), |\gamma(t)|\big)\ , \quad l_\gamma^t(z) = \underset{(\varphi(t)-\pi/2,\,\varphi(t)+\pi/2)}{ln(z)} = ln|z| + i \underset{(\varphi(t)-\pi/2,\,\varphi(t)+\pi/2)}{arg(z)} .$$

Упражнение 8.2. Доказать, что семейство $\big\{\mathcal{L}_\gamma^t\big\}$, определенное в примере 8.1, действительно осуществляет АП $\mathcal{L}_a$ вдоль γ, т.е. требуется найти какую-либо окрестность $O(t_0)$ из определения 8.5. Найти максимальную $O(t_0)$.

Доказать, что $\mathcal{L}_a$ не продолжается вдоль пути γ_{ab}, который проходит через точку 0.

Указание. По построению, для любого $t \in [\alpha, \beta]$ в соответствующем круге B_γ^t имеем $\big(l_\gamma^t(z)\big)' = 1/z$, поэтому $\forall t, t' \in [\alpha, \beta]$ имеем $l_\gamma^t(z) = l_\gamma^{t'}(z) + 2\pi i k(t, t')$ в $B_\gamma^t \cap B_\gamma^{t'}$ (где $k(t, t') \in \mathbb{Z}$). Поэтому остается показать, что $k(t, t') = 0$ для достаточно близких t, t'.

Упражнение 8.3. Пусть $p \in \mathbb{C}$ фиксировано, $z_{(o)}^p = e^{p\,ln(z)}$ на $\mathbb{C}_-$, $a \in \mathbb{C}_-$. Возникает элемент $\mathcal{P}_a^p = \ni_a^{z_{(o)}^p}$. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_\flat$ – путь, $\gamma(\alpha) = a$. Выписать семейство $\big\{\mathcal{P}_\gamma^{pt}\big\}_{[\alpha,\beta]}$, осуществляющее АП $\mathcal{P}_a^p$ вдоль γ. Найти максимальную $O(t_0)$.

Доказать, что $\mathcal{P}_a^p$ не продолжается вдоль пути γ_{ab}, который проходит через точку 0.

Предложение 8.3. *В условиях (и обозначениях) определения 8.5 либо при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $R_\gamma^t = +\infty$ (и, следовательно, все f_γ^t – равные целые функции), либо справедливы следующие утверждения:*

(1) при всех $t \in [\alpha, \beta]$ выполняется условие $R_\gamma^t < +\infty$ и $\forall t \in O(t_0)$ имеем $\big|R_\gamma^t - R_\gamma^{t_0}\big| \leqslant \big|\gamma(t) - \gamma(t_0)\big|$ (в частности, $R_\gamma(t) = R_\gamma^t$ – непрерывная строго положительная на $[\alpha, \beta]$ функция, и существует $\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]} R_\gamma(t) = R_\gamma > 0$;

(2) пусть $\tilde{O}(t_0)$ – какая-либо связная (открытая) окрестность точки t_0 на $[\alpha,\beta]$, для которой верно условие: при всех $t \in \tilde{O}(t_0)$ имеем $\gamma(t_0) \in B(\gamma(t), R^t_\gamma)$; тогда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взята в качестве $O(t_0)$;

(3) существует $\delta > 0$ такое, что из условий $\left|t - t'\right| \leqslant \delta$ и $t, t' \in [\alpha,\beta]$ вытекает $\mathcal{F}^t_\gamma \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}_\gamma$ (в частности, в качестве $O(t_0)$ можно взять δ-окрестность $O_\delta(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha,\beta]$).

Доказательство. (1) Следует из предложения 8.1.

(2) Пусть $U(t_0) = \{t \in \tilde{O}(t_0) \,|\, \mathcal{F}^t_\gamma \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_0}_\gamma\}$. Ясно, что $t_0 \in U(t_0) \neq \emptyset$. По предложению 8.2 и свойству (1) множество $U(t_0)$ открыто и замкнуто в $\tilde{O}(t_0)$ (проверить!). Поскольку $\tilde{O}(t_0)$ – связное множество, имеем $\tilde{O}(t_0) = U(t_0)$, откуда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взято в качестве $O(t_0)$.

(3) Пусть R_γ взято из $\big(1\big)$, и $\delta > 0$ определяется из условия $\{|t - t'| < \delta\} \Rightarrow \{|\gamma(t) - \gamma(t')| < R_\gamma\}$ (оно существует в силу равномерной непрерывности γ). Тогда $O_\delta(t_0) \subset \tilde{O}(t_0)$, откуда $O_\delta(t_0)$ также может быть взята в качестве $O(t_0)$. □

Теорема 8.1. *[Единственность аналитического продолжения вдоль пути.] В условиях определения 8.5, если элемент $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}$, то элементы семейства $\mathbb{F}_\gamma$, осуществляющего это продолжение (в частности, конечный элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}^\beta_\gamma$) определены однозначно.*

Доказательство. Далее считаем, что $R^t_\gamma < +\infty$ при всех $t \in [\alpha,\beta]$, иначе все $R^t_\gamma = +\infty$ (все $\mathcal{F}^t_\gamma$ совпадают) и доказывать нечего. Пусть, от противного, существуют два различных семейства $\mathbb{F}_\gamma = \big\{\mathcal{F}^t_\gamma = (B(\gamma(t), R^t_\gamma), f^t_\gamma)\big\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ и $\tilde{\mathbb{F}}_\gamma = \big\{\tilde{\mathcal{F}}^t_\gamma = (B(\gamma(t), \tilde{R}^t_\gamma), \tilde{f}^t_\gamma)\big\}_{t\in[\alpha,\beta]}$, осуществляющих аналитическое продолжение $\mathcal{F}_a$ вдоль γ_{ab}.

Из предложения 8.3 (1) определим $R_\gamma = R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) > 0$ и $\tilde{R}_\gamma = R_\gamma(\tilde{\mathbb{F}}_\gamma) > 0$, тогда $R_0 = \min(R_\gamma, \tilde{R}_\gamma) > 0$. Определим $\delta > 0$ из условия: $\{|t - t'| < \delta\} \Rightarrow \{|\gamma(t) - \gamma(t')| < R_0\}$ $(t, t' \in [\alpha,\beta])$. Положим $t_n = \alpha + n\,\delta$, $n \in \{1, ..., N\}$, где число $N = (\beta - \alpha)/\delta$ без ограничения общности будем считать натуральным. Для всех $t \in [\alpha, t_1]$ имеем:

$$\mathcal{F}^t_\gamma \leftrightarrow \mathcal{F}_a \leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}^t_\gamma\,,$$

и для таких t, очевидно, $\mathcal{F}^t_\gamma$ и $\tilde{\mathcal{F}}^t_\gamma$ совпадают. Далее повторяем это рассуждение $N - 1$ раз. □

9. Лекция 9. АП по «близким» путям. Теорема о монодромии. АП первообразного элемента.

Предложение 9.1. *[Связь аналитического продолжения по путям и по цепочкам.] Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_a$ и $\mathcal{F}_b$ – канонические элементы с центрами a и b соответственно. Следующие условия эквивалентны:*

(a) существует путь $\gamma = \gamma_{ab}$ такой, что элемент $\mathcal{F}_b$ является результатом продолжения $\mathcal{F}_a$ вдоль γ_{ab} (с семейством $\left\{\mathcal{F}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$);

(b) существует цепочка канонических элементов $\mathcal{F}_{a_n}$, $n \in \{1, ..., N\}$, с условиями $\mathcal{F}_a \leftrightarrow \mathcal{F}_{a_1} \leftrightarrow ... \leftrightarrow \mathcal{F}_{a_N} \leftrightarrow \mathcal{F}_b$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Положим $a_n = \gamma(\alpha + n\,\delta)$, $n \in \{1, \ldots, N\}$, где $N + 1 = (\beta - \alpha)/\delta$, а δ определено условием предложения 8.3 (3) так, чтобы N было натуральным. Остается положить $\mathcal{F}_{a_n} = \mathcal{F}_\gamma^{\alpha+n\,\delta}$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Без ограничения общности полагаем $a = a_0 \neq a_1, a_1 \neq a_2, \ldots, a_N \neq a_{N+1} = b$ и пусть $\mathcal{F}_{a_n} = (B_{a_n}, f_{a_n})$ $(n \in \{0, \ldots, N+1\})$. Пусть $\gamma(t)$ – натуральная параметризация ломаной $L = [a, a_1] \cup \cdots \cup [a_N, b]$, определенная на отрезке $[0, \ell]$, $\ell = \ell(L)$ - длина L. Пусть $\{0 = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \alpha_{N+1} = \ell\}$ – разбиение отрезка $[0, \ell]$ такое, что $\gamma|_{[\alpha_n,\alpha_{n+1}]} = [a_n, a_{n+1}]$ $(n \in \{0, \ldots, N\})$. Теперь, для каждого $n \in \{0, \ldots, N\}$, при $t \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ положим $\mathcal{F}_\gamma^t = \text{Э}_{\gamma(t)}^{f_{a_n}}$, если $\gamma(t) \in B_{a_n}$, $\mathcal{F}_\gamma^t = \text{Э}_{\gamma(t)}^{f_{a_{n+1}}}$, если $\gamma(t) \in B_{a_{n+1}}$ (напомним, что $f_{a_n} = f_{a_{n+1}}$ на пересечении B_{a_n} и $B_{a_{n+1}}$ в силу предложения 8.1). Завершить доказательство. $\square$

Теорема 9.1. *[Об аналитическом продолжении по «близким» путям.] Пусть элемент $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, R_γ определен как в предложении 8.3, $R_\gamma < +\infty$. Пусть есть другой путь $\tilde\gamma = \tilde\gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ с условием $d(\gamma, \tilde\gamma) < R_\gamma$, где*

$$d(\gamma, \tilde\gamma) = ||\gamma - \tilde\gamma||_{[\alpha,\beta]} = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\gamma(t) - \tilde\gamma(t)|.$$

Тогда $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль $\tilde\gamma$ и результаты продолжений $\mathcal{F}_b$ и $\tilde{\mathcal{F}}_b$ элемента $\mathcal{F}_a$ (вдоль γ и $\tilde\gamma$ соответственно) совпадают.

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}_\gamma = \left\{\mathcal{F}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ – семейство, осуществляющее аналитическое продолжение элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ,

$$\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t) = (B_\gamma^t, f_\gamma^t)\,.$$

Укажем явно семейство $\tilde{\mathbb{F}}_{\tilde\gamma} = \left\{\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde\gamma}^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль $\tilde\gamma$.

Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $|\tilde\gamma(t) - \gamma(t)| < R_\gamma \leqslant R_\gamma^t$, поэтому $\tilde\gamma(t) \in B_\gamma^t$ и определен элемент $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde\gamma}^t = \text{Э}_{\tilde\gamma(t)}^{f_\gamma^t} = (B(\tilde\gamma(t), \tilde R_{\tilde\gamma}^t), \tilde f_{\tilde\gamma}^t)$. Докажем, что это $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde\gamma}^t$ – искомое.

По условию, $\max\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |\gamma(t) - \tilde\gamma(t)| < R_\gamma$, поэтому найдется $\varepsilon \in (0, R_\gamma]$ с условием $\max\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |\gamma(t) - \tilde\gamma(t)| = R_\gamma - \varepsilon$. Следовательно, при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$\tilde R_{\tilde\gamma}^t \geqslant R_\gamma^t - \left|\gamma(t) - \tilde\gamma(t)\right| \geqslant \min_{t\in[\alpha,\beta]} R_\gamma^t - \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\gamma(t) - \tilde\gamma(t)| = R_\gamma - (R_\gamma - \varepsilon) = \varepsilon\,,$$

т.е. $\tilde R_{\tilde\gamma}^t$ отделен от нуля.

Фиксируем произвольную точку $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Остается найти окрестность $O(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$ такую, что $\forall t \in O(t_0)$ имеем $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde\gamma}^t \leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde\gamma}^{t_0}$.

Действительно, найдется такое $\delta > 0$, что $\forall t \in O_\delta(t_0)$ (напомним, что $O_\delta(t_0)$ – это δ-окрестность точки t_0 в $[\alpha, \beta]$) справедливы следующие утверждения:

(1) $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$ (семейство $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{[\alpha,\beta]}$ аналитически продолжает $\mathcal{F}_a$ вдоль γ);

(2) $\tilde{\gamma}(t_0) \in B_\gamma^t$ (ввиду непрерывности функций $\gamma(t)$, R_γ^t и условия $\tilde{\gamma}(t_0) \in B_\gamma^{t_0}$);

(3) $\tilde{\gamma}(t_0) \in \tilde{B}_{\tilde{\gamma}}^t = B(\tilde{\gamma}(t), \tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t)$ (функция $\tilde{\gamma}(t)$ непрерывна и $\tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t \geq \varepsilon$).

Остается воспользоваться предложением 8.2 для семейства $\left\{\mathcal{F}_\gamma^t,\, \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t\right\}_{t\in O_\delta(t_0)}$ с учетом того, что $\tilde{\gamma}(t_0)$ лежит во всех кругах указанных элементов, $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^t$ и $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$. □

Теорема 9.2. *[Об аналитическом продолжении по путям гомотопии.] Пусть $\Gamma : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ – (1)-гомотопия. При фиксированном s положим $\gamma_s(t) = \Gamma(t,s)\big|_{t\in[0,1]}$, $a = \gamma_s(0)$, $b = \gamma_s(1)$.*

Пусть элемент $\mathcal{F}_a$ (с центром в точке a) аналитически продолжается вдоль γ_s для любого $s \in [0,1]$. Тогда результаты $\mathcal{F}_{b,s} = \mathcal{F}_b$ всех этих продолжений совпадают.

Доказательство. При $s \in [0,1]$ пусть

$$\mathbb{F}_{\gamma_s} = \left\{\mathcal{F}_s^t = (B(\gamma_s(t), R_s^t), f_s^t)\right\}_{t\in[0,1]}$$

– семейство, аналитически продолжающее $\mathcal{F}_a$ вдоль γ_s. Тогда $R_s = \min\limits_{t\in[0,1]} R_s^t > 0$.

В силу равномерной непрерывности Γ на $[0,1]^2$, для всякого $s \in [0,1]$ существует $\delta > 0$ с условием $||\gamma_{s'} - \gamma_s||_{[\alpha,\beta]} < R_s$ при всех $s' \in O_\delta(s)$. По теореме 9.1 результаты $\mathcal{F}_{b,s'}$ продолжения элемента $\mathcal{F}_a$ по всем путям $\gamma_{s'}$, $s' \in O_\delta(s)$ совпадают. Остается воспользоваться компактностью отрезка $[0,1]$ (завершить доказательство). □

Теорема 9.3. *[О монодромии.] Пусть D – $\Gamma(1)$-односвязная область в $\mathbb{C}$, $a \in D$, $\mathcal{F}_a$ – канонический элемент с центром a, который аналитически продолжается вдоль любого пути γ_a с началом в точке a, целиком лежащего в D. Тогда для любой точки $b \in D$ результаты продолжений $\mathcal{F}_b$ элемента $\mathcal{F}_a$ по всем путям γ_{ab} в D (с началом a и концом b) совпадают.*

Более того, найдется $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\mathcal{F}_b = Э_b^f$ при всех $b \in D$.

Доказательство. Для любой фиксированной точки $b \in D$ единственность элемента $\mathcal{F}_b$ следует из предыдущей теоремы, поскольку область D является $\Gamma(1)$-односвязной.

Итак, для любой точки $z \in D$ однозначно определен элемент $\mathcal{F}_z = (B_z, f_z)$. Определим функцию f по формуле $f(z) = f_z(z)$. Ясно, что для любого фиксированного $z_0 \in D$ и круга $B(z_0, r) \subset B_{z_0} \cap D$ при всех $z \in B(z_0, r)$ имеем $f_{z_0}(z) = f_z(z)$, поэтому $f \in \mathcal{A}(D)$. □

Упражнение 9.1. Доказать теорему о монодромии для $\Gamma(2)$-односвязной области в $\mathbb{C}$.

Теорема 9.4. *[Об аналитическом продолжении первообразного элемента.] Пусть $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – спрямляемый путь ($\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$),*

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon([\gamma]) = \cup_{t\in[\alpha,\beta]} B(\gamma(t), \varepsilon)$$

– ε-окрестность $[\gamma]$ (является областью в $\mathbb{C}$), $\varepsilon > 0$.

Пусть $f \in \mathcal{A}\big(U_\varepsilon\big)$ и F_a – первообразная (п/о) для f в $B(a,\varepsilon)$ с условием $F_a(a) = 0$. Пусть, наконец, $\mathcal{F}_a = Э_a^{F_a}$ – канонический элемент.

Тогда $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль γ и для семейства $\mathbb{F}_\gamma$, осуществляющего это продолжение, имеем $R_\gamma = R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geqslant \varepsilon$.

Замечание. Элемент $\mathcal{F}_a$ называется *первообразным каноническим элементом для* f (п/о-элементом для f) в точке a.

Доказательство. Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ при $z \in B(\gamma(t), \varepsilon)$ определим

$$F_\varepsilon^t(z) = \int\limits_{\gamma|_{[\alpha,t]}} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{[\gamma(t),z]} f(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{9.1}$$

Очевидно, что $F_\varepsilon^t \in \mathcal{A}(B(\gamma(t), \varepsilon))$ и $\big(F_\varepsilon^t(z)\big)' = f(z)$ в $B(\gamma(t), \varepsilon)$.

Определим $\mathcal{F}^t = Э_{\gamma(t)}^{F_\varepsilon^t} =: (B(\gamma(t), R^t), F^t) =: (B^t, F^t)$, тогда $R^t \geqslant \varepsilon$. Докажем, что $\mathbb{F}_\gamma = \big\{\mathcal{F}^t\big\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ осуществляет АП элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ. При этом $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geqslant \varepsilon$.

Фиксируем t_0. В силу непрерывности γ, существует $\delta > 0$ такое, что $\forall t \in O_\delta(t_0)$ имеем $\big|\gamma(t) - \gamma(t_0)\big| < \varepsilon$. Докажем, что $O_\delta(t_0)$ можно взять в качестве $O(t_0)$ из определения АП вдоль пути для $\mathbb{F}_\gamma$. Для этого достаточно показать, что $\forall t \in O_\delta(t_0)$ найдется круг $B_{\gamma(t)}$ с центром в точке $\gamma(t)$ такой, что $B_{\gamma(t)} \subset B^t \cap B^{t_0}$ и $F^t = F^{t_0}$ в $B_{\gamma(t)}$.

Поскольку $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$, существует круг с центром $\gamma(t)$, лежащий внутри $B(\gamma(t), \varepsilon) \cap B(\gamma(t_0), \varepsilon)$. Обозначим его $B_{\gamma(t)}$.

По определению, для всех $z \in B_{\gamma(t)}$ имеем:

$$F^{t_0}(z) = F_\varepsilon^{t_0}(z) = \int\limits_{\gamma|_{[\alpha,t_0]}} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{[\gamma(t_0),z]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

$$F^t(z) = F_\varepsilon^t(z) = \int\limits_{\gamma|_{[\alpha,t_0]}} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\gamma|_{[t_0,t]}} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{[\gamma(t),z]} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Так как в $B_{\gamma(t)}$ имеем $(F^t)' = (F^{t_0})' = f$, нам остается установить, что $F^t(\gamma(t)) = F^{t_0}(\gamma(t))$. Последнее непосредственно (в силу интегральной теоремы Коши в односвязной области $B(\gamma(t_0), \varepsilon)$) следует из равенства

$$\int\limits_{\gamma|_{[t_0,t]}} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{[\gamma(t_0),\gamma(t)]} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Замечание. Спрямляемость пути γ была нужна для возможности интегрирования по нему. $\square$

Следствие 9.4.1. *Теорема 9.4 верна без условия спрямляемости пути* γ.

Доказательство. Пусть мы находимся в условиях теоремы 9.4, за исключением условия спрямляемости γ, т.е теперь $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – произвольный путь. Найдем путь $\lambda = \lambda_{ab} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, который является вписанной в γ ломаной и для которого верно $||\gamma - \lambda||_{[\alpha,\beta]} < \varepsilon/3$ (путь λ_{ab} существует в силу равномерной непрерывности γ на $[\alpha, \beta]$).

Путь λ спрямляем, $f \in \mathcal{A}\big(U_{2\varepsilon/3}([\lambda])\big)$, поэтому по теореме 9.4 элемент $\mathcal{F}_a$ продолжается вдоль λ. Пусть $\mathbb{F}_\lambda = \{\mathcal{F}_\lambda^t = (B(\lambda(t), R_\lambda^t), F_\lambda^t)\}_{[\alpha,\beta]}$ – семейство, осуществляющее указанное продолжение. Тогда $R_\lambda = R_\lambda(\mathbb{F}_\lambda) \geqslant 2\varepsilon/3$. По теореме 9.1 (о продолжении по «близким» путям) элемент $\mathcal{F}_a$ продолжается и вдоль γ, причем из ее доказательства следует, что $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geqslant \varepsilon/3$.

Пусть $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), F_\gamma^t)\}_{[\alpha,\beta]}$ – семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ. Из доказательств теорем 9.1 и 9.4 следует, что $(F_\gamma^t(z))' = f(z)$ в $B(\gamma(t), \varepsilon/3)$ (то, что $(F_\lambda^t(z))' = f(z)$ в $B(\lambda(t), 2\varepsilon/3)$ видно из явной формулы для случая спрямляемого пути λ, а F_γ^t есть просто переразложение F_λ^t в ряд Тейлора с центром в точке $\gamma(t) \in B(\lambda(t), 2\varepsilon/3))$. Но тогда (по теореме единственности) функция F_γ^t должна быть голоморфна по крайней мере в $B(\gamma(t), \varepsilon)$, где голоморфна ее производная $f(z)$. Откуда $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geqslant \varepsilon$. $\square$

Определение 9.1. В условиях следствия 9.4.1 определим

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = F_b(b) - F_a(a) = F_b(b)\,.$$

Напомним, что элемент $\mathcal{F}_b = (B_b, F_b)$ – результат продолжения $\mathcal{F}_a$ вдоль γ. Таким образом, если $f \in \mathcal{A}\big(U([\gamma])\big)$, где $U([\gamma])$ – некоторая окрестность носителя пути γ, то определен интеграл от f по этому пути, который для спрямляемых путей совпадает с определенным ранее.

Следствие 9.4.2. *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, γ_0 и γ_1 – пути в D, определенные на* $[0, 1]$.

Если $\gamma_0 \underset{(1)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$, то $\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz$.

Доказательство. Пусть $\Gamma : [0, 1]^2 \to D$ – (1)-гомотопия в D между γ_0 и γ_1. Обозначим через $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)|_{t\in[0,1]}$ – s-й путь гомотопии ($s \in [0, 1]$), $\gamma_s(0) = a$, $\gamma_s(1) = b$. Результат продолжения п/о-элемента $\mathcal{F}_a$ для f вдоль γ_s при любом $s \in [0, 1]$ один и тот же (по теореме 9.2), обозначим его через $\mathcal{F}_b = (B_b, F_b)$. Тогда $\int\limits_{\gamma_s} f(z)\,dz = F_b(b)$. В частности, $\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz$. $\square$

Упражнение 9.2. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, γ_0 и γ_1 – пути на $[0, 1]$ в D. Доказать, что если $\gamma_0 \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_1$, то $\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz$.

10. Лекция 10. Следствия. Полная аналитическая функция. Точки ветвления многозначных ветвей ПАФ.

Следствие 10.1. *Пусть область D в $\mathbb{C}$ является $\Gamma(1)$-односвязной, $f \in \mathcal{A}(D)$, причем $f(z) \neq 0$ в D. Тогда существует функция $g \in \mathcal{A}(D)$, такая, что $g(z) \in Ln(f(z))$ при всех $z \in D$. Т.е. g – голоморфная ветвь м-функции $Ln(f(z))$ в D, или $f = \exp(g)$ в D.*

Доказательство. Фиксируем $a \in D$ и канонический элемент $\mathcal{H}_a = (B_a, h_a)$, $h'_a(z) = f'(z)/f(z)$ в некоторой окрестности точки a, $h_a(a) = 0$. По следствию 9.4.1, примененному к функции $f'(z)/f(z)$, $\mathcal{H}_a$ продолжается вдоль любого пути γ_{ab}, $[\gamma_{ab}] \subset D$. По теореме 9.3 найдется функция $h \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $\forall\, b \in D$ результат продолжения элемента $\mathcal{H}_a$ по любому пути γ_{ab} в D есть $Э^h_b$. В частности, для функции h имеем: $h(a) = 0$, $h'(z) = f'(z)/f(z)$ в D.

В качестве искомой функции $g(z)$ можно взять $g(z) = h(z) + \underset{(o)}{ln} f(a)$. Действительно, для $g(z)$ имеем: $g'(z) = f'(z)/f(z)$, $g(a) \in Ln\, f(a)$. При этом множество $\big\{z \in D \big| g(z) \in Ln\, f(z)\big\}$ открыто и замкнуто в D, поэтому совпадает с D, так что g – действительно искомая функция. □

Упражнение 10.1. Доказать аналог следствия 10.1 для $\Gamma(2)$-односвязной области D в $\mathbb{C}$.

Следствие 10.2. *Для $\Gamma(1)$-односвязной (или $\Gamma(2)$-односвязной) области D в $\mathbb{C}$ и функции $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ в D, при любом натуральном $n \geqslant 2$ найдется функция $g_n \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $f(z) = (g_n(z))^n$, $\forall z \in D$; т.е. g_n – голоморфная ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в D.*

Доказательство. Пусть $g(z)$ – голоморфная ветвь многозначной функции $Ln\, f(z)$ в D. Положим $g_n(z) = \exp(g(z)/n)$. Элементарно проверяется, что g_n – искомая. □

Следствие 10.3. *Если D – $\Gamma(1)$-односвязная (или $\Gamma(2)$-односвязная) область в $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, то D конформно эквивалентна $B_1 = \big\{|z| < 1\big\}$. Этим завершается доказательство теоремы 7.5 (об эквивалентности определений односвязной области в $\mathbb{C}$).*

Доказательство. В доказательстве теоремы 5.2 (Римана), свойство односвязности области D используется только для построения в этой области голоморфных ветвей квадратных корней из голоморфных функций, не имеющих нулей в D. С учетом следствия 10.2, теперь мы умеем строить такие ветви в $\Gamma(1)$- и $\Gamma(2)$-односвязных областях. □

Определение 10.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_a$ – некоторый фиксированный канонический элемент. *Полной аналитической функцией (ПАФ)*, определяемой элементом $\mathcal{F}_a$, называется совокупность Φ всех канонических элементов, полученных из $\mathcal{F}_a$ аналитическим продолжением по всем путям в $\mathbb{C}$ с началом в точке a, по которым продолжение возможно. Через D_Φ обозначается объединение кругов всех элементов из Φ (D_Φ называется *областью определения ПАФ* Φ).

Замечание 1. ПАФ Φ определяется любым своим элементом.
Замечание 2. Множество D_Φ – открытое связное множество, т.е. действительно является областью. По определению, $\forall\, b \in D_\Phi$ найдется элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi$ – канонический элемент с центром b.

Теорема 10.1. *[Пуанкаре-Вольтерра] Если Φ – ПАФ, $b \in D_\Phi$, то число элементов из Φ с центром в точке b не более чем счетно.*

Доказательство. Фиксируем $b \in D_\Phi$ и некоторый элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi$ с центром в точке b. Все другие элементы $\tilde{\mathcal{F}}_b \in \Phi$ с центром в точке b получаются из $\mathcal{F}_b$ с помощью АП по замкнутым путям с началом и концом b.

Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_b$ получен из $\mathcal{F}_b$ с помощью АП вдоль пути $\gamma = \gamma_{bb} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$. Пусть $R_\gamma > 0$ – минимальный радиус из предложения 8.3 для указанного продолжения. Существует ломаная $\lambda = \lambda_{bb} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = b$, такая, что $||\gamma - \lambda||_{[\alpha,\beta]} < R_\gamma$ и все вершины ломаной λ имеют рациональные координаты (кроме начала и конца b). По теореме 9.1 (об АП по близким путям) результаты продолжения элемента $\mathcal{F}_b$ по γ и по λ совпадают. Остается заметить, что совокупность всех возможных ломаных с началом и концом b и остальными вершинами в точках с (обеими) рациональными координатами не более чем счетна. □

Пример 10.1 (ПАФ $Ln\,(z - z_0)$). Фиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Напомним обозначения (при $z_0 = 0$ все *нижние индексы* z_0 в этих обозначениях опускаются).

Пусть $\mathbb{C}_{z_0\flat} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Для $a \in \mathbb{C}_{z_0\flat}$ определим базовый элемент:

$$\mathcal{L}_{z_0 a} = \text{Э}_a^{l_{z_0 a}}\ ,\ \ l_{z_0 a}(z) = \underset{(\arg(a-z_0)-\pi/2,\, \arg(a-z_0)+\pi/2)}{ln(z - z_0)}\ .$$

Для произвольного пути $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_{z_0\flat}$, $\gamma(\alpha) = a$, пусть $\varphi(t)$ – непрерывная ветвь м-функции $Arg(\gamma(t)-z_0)$ на $[\alpha, \beta]$, для которой $\varphi(\alpha) = \arg(a-z_0) \in (-\pi, \pi]$. Определим функции

$$l^t_{z_0\gamma}(z) = \underset{(\varphi(t)-\pi/2,\, \varphi(t)+\pi/2)}{ln(z - z_0)}\ .$$

Элемент $\mathcal{L}_{z_0 a}$ продолжается вдоль пути γ. Семейство, осуществляющее это продолжение, имеет вид:

$$\mathbb{L}_{z_0\gamma} = \Big\{\mathcal{L}^t_{z_0\gamma} = \Big(B\big(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|\big), l^t_{z_0\gamma}(z)\Big)\Big\}_{t\in[\alpha,\beta]}\ .$$

Ясно, что $R_\gamma = \min_{t\in[\alpha,\beta]} |\gamma(t) - z_0|$. В частности, из элемента $\mathcal{L}_{z_0 a}$ можно с помощью АП получить все элементы $\mathcal{L}_{z_0 b}$, $b \neq z_0$. Если же путь γ проходит через точку z_0, то продолжения вдоль этого пути элемента $\mathcal{L}_{z_0 a}$ не существует (доказать).

Получаем, что для каждой точки $b \neq z_0$ множество всех различных элементов с центром b в рассматриваемой ПАФ имеет вид $\big\{\mathcal{L}^k_{z_0 b} = \mathcal{L}_{z_0 b} + 2\pi i\, k\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$. При этом, если $\gamma = \gamma_{bb} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_{z_0\flat}$ – путь, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$ и $n_{z_0\gamma} = ind_\gamma(z_0)$, то результатом продолжения элемента $\mathcal{L}^k_{z_0 b}$ вдоль γ является элемент $\mathcal{L}^k_{z_0 b} + 2\pi i\, n_{z_0\gamma}$. Прибавление константы к элементу означает, что константа прибавляется к функции указанного элемента, а радиус элемента не меняется.

Указанная ПАФ обозначается $Ln(z - z_0)$. Ясно, что здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0\flat}$.

Пример 10.2 (ПАФ z^p). Здесь $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ фиксировано. Используются обозначения из предыдущего примера при $z_0 = 0$. При $a \in \mathbb{C}_\flat$ определим исходный элемент

$$\mathcal{P}^p_a = \Big(B\big(a, |a|\big), z^p_a\Big)\ ,\ \ z^p_a = \exp(p\, l_a(z))\ ,$$

который аналитически продолжается вдоль любого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_\flat$, $\gamma(\alpha) = a$. Семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид:

$$\mathbb{P}^p_\gamma = \big\{\mathcal{P}^{p\,t}_\gamma = \Big(B\big(\gamma(t), |\gamma(t)|\big), \rho^{pt}_\gamma\Big)\big\}\ ,\ \ \rho^{pt}_\gamma(z) = \exp(p\, l^t_\gamma(z))\ ,$$

где функция $l^t_\gamma(z)$ определена в примере 10.1. Поскольку экспонента – целая функция, окрестности $O(t_0)$ из определения АП для семейства $\mathbb{P}^p_\gamma$ можно брать такие же, как для $\mathbb{L}_\gamma$ при $z_0 = 0$. Аналогично предыдущему примеру, из элемента $\mathcal{P}^p_a$ можно с помощью АП получить все элементы $\mathcal{P}^p_b$, $b \neq 0$.

Пусть есть элемент $\mathcal{P}^p_b$ и путь $\gamma = \gamma_{bb} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_\flat$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, $n_\gamma = \mathrm{ind}_\gamma(0)$. Тогда результатом продолжения элемента $\mathcal{P}^p_b$ вдоль γ является элемент $\mathcal{P}^p_b\, e^{p\,2\pi i\, n_\gamma}$, т.е. функция элемента $\mathcal{P}^p_b$ умножается на постоянную $e^{p\,2\pi i\, n_\gamma}$, а круг не меняется. При $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ число разных элементов нашей ПАФ над каждой точкой $b \neq 0$ будет конечным, при $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ – бесконечным (счетным). Указанная ПАФ обозначается z^p. Здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_\flat$

Рассмотрим подробнее случай $p = 1/n$, $n \geqslant 2$ натурально. Представим $n_\gamma = kn + q$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Тогда

$$e^{(1/n)2\pi i\, n_\gamma} = (e^{2\pi i})^k\, e^{(q/n)2\pi i} = e^{q(2\pi i)/n} \in \sqrt[n]{1}\,.$$

Следовательно, над каждой точкой $b \neq 0$ имеется ровно n различных элементов из ПАФ $z^{1/n}$ (она же $\sqrt[n]{z}$), соответствующих различным значениям q.

Определение 10.2. Пусть Φ – ПАФ, D_Φ – ее область определения, $D_1 \subset D_\Phi$ – область. Пусть $\mathcal{F}_b \in \Phi$ – элемент с центром в точке $b \in D_1$, *который продолжается вдоль любого пути* γ_b в D_1 с началом в точке b. Совокупность различных элементов, полученных в результате всех таких продолжений, обозначим через Φ_1. Будем говорить, что Φ_1 – (многозначная, вообще говоря) *аналитическая ветвь ПАФ* Φ *над* D_1, определяемая элементом $\mathcal{F}_b$.

В указанных условиях число $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ элементов из Φ_1 с центром в каждой из точек $c \in D_1$ – одно и тоже (поэтому в этом случае Φ_1 еще называют *n-значной аналитической ветвью над* D_1).

Определение 10.3. Пусть (в условиях предыдущего определения) $D_2 \subset D_1$ – еще одна область, и функция $f \in \mathcal{A}(D_2)$ такова, что $\forall\, c \in D_2$ имеем $\ni^f_c \in \Phi_1$. Тогда говорят, что f есть *голоморфная* (следовательно, однозначная) *ветвь для аналитической ветви* Φ_1 *в* D_2.

Замечание. Пусть в условиях определения 10.2 область D_1 односвязна. Тогда по теореме о монодромии найдется $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$ такая, что

(1) $\forall\, c \in D_1$ имеем $\ni^f_c \in \Phi_1$;

(2) $\forall\, c \in D_1$ и $\forall\, \mathcal{F}_c \in \Phi_1$ имеем $\mathcal{F}_c = \ni^{f_1}_c$,

т.е. f_1 – единственная голоморфная ветвь для Φ_1 в D_1, причем f_1 и Φ_1 в известном смысле можно отождествить.

Определение 10.4. Пусть $D_2 \subset D_1$ – область. Пусть $\{f_j\}_{j\in J}$ – семейство различных функций в D_2, обладающее следующими свойствами:

(1) $\forall\, j \in J$ функция f_j есть голоморфная ветвь для Φ_1 в D_2;

(2) $\forall\, c \in D_2$ и $\forall\, \mathcal{F}_c \in \Phi_1$ найдется $j \in J$ с условием $\mathcal{F}_c = \ni^{f_j}_c$.

Тогда говорят, что Φ_1 *распадается над* D_2 *на голоморфные ветви* $\{f_j\}_{j\in J}$.

Замечание 1. По теореме Пуанкаре-Вольтерра указанное семейство $\{f_j\}_{j\in J}$ не более чем счетно.

Определение 10.5. В условиях определения 10.2 пусть $z_0 \in D_1$, тогда $\exists\, \delta > 0$ с условием $D_2 = B(z_0, \delta) \subset D_1$. Поскольку D_2 односвязна, Φ_1 распадается над D_2 на голоморфные ветви. Говорят, что точка z_0 – *правильная для* Φ_1 (Φ_1 *аналитична над* z_0, Φ_1 *аналитична над* D_1).

Определение 10.6. Пусть $D_1 = B'(z_0, \delta) \subset D_\Phi$ (сама z_0 может как принадлежать D_Φ, так и не принадлежать). Пусть $b \in D_1$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$, Φ_1 – аналитическая ветвь Φ над D_1, определяемая элементом $\mathcal{F}_b$ (согласно определению 10.2, $\mathcal{F}_b$ продолжается вдоль любого пути в D_1 с началом в точке b). Возможны три случая:

(1) После одного обхода точки z_0 (по пути в D_1) элемент $\mathcal{F}_b$ переходит в себя. Из теоремы о монодромии, примененной в двух односвязных областях (полученных из D_1 с помощью разрезов по двум разным радиусам, не проходящим через b), найдется функция $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$, определяющая Φ_1 (т.е. Φ_1, распадающаяся на одну голоморфную ветвь f_1 над D_1, является однозначной над D_1). Следовательно, $\forall c \in D_1$ единственный элемент $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$ также при обходе вокруг z_0 переходит в себя.

В этом случае говорят, что z_0 является *изолированной особой точкой однозначного характера для* Φ_1; она классифицируется также, как для f_1 – голоморфной функции в проколотой окрестности z_0 (устранимая, полюс некоторого порядка, существенно особая);

(2) найдется $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ такое, что элемент $\mathcal{F}_b$ после $1, \dots, (n-1)$ обходов в D_1 точки z_0 переходит в элемент, отличный от $\mathcal{F}_b$, а после n обходов переходит в $\mathcal{F}_b$ (то же будет $\forall\, c \in D_1$ и $\forall\, \mathcal{F}_c \in \Phi_1$); тогда говорят, что z_0 – *точка ветвления порядка n для* Φ_1 (или что Φ_1 имеет *над* точкой z_0 ветвление порядка n);

(3) при любом натуральном числе обходов вокруг z_0 в D_1 элемент $\mathcal{F}_b$ не переходит в себя; тогда говорят, что z_0 – *точка ветвления бесконечного порядка (логарифмическая точка ветвления)* для Φ_1 (или что Φ_1 имеет *над* точкой z_0 логарифмическое ветвление).

Так, в примере 10.1 (для ПАФ $\Phi = Ln(z - z_0)$) точки z_0 и ∞ – логарифмические точки ветвления при $D_1 = D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\Phi_1 = \Phi$. В примере 10.2 (для ПАФ $\Phi = \sqrt[n]{z}$, $n \in \{2, 3, \dots\}$) точки 0 и ∞ – точки ветвления порядка n при $D_1 = D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Phi_1 = \Phi$.

Упражнение 10.2. Найти условия на область U в $\mathbb{C}_\flat$ необходимые и достаточные для того, чтобы ПАФ $\Phi = Ln(z)$ имела над U только одну аналитическую ветвь. Верно ли, что если таких ветвей не одна, то все они – однозначные, т.е. Φ распадается над U на голоморфные ветви?

11. Лекция 11. Примеры полного описания ПАФ. АП сложного элемента.

Укажем в чем состоит *полное описание* ПАФ Φ.

1. Выбрать исходный элемент $\mathcal{F}_a \in \Phi$, обсудить его каноничность. Отметим, что даже формула элементарной функции может не задать корректно ПАФ. Так, формула $\sqrt{z^2}$ задает две однозначные ПАФ $\Phi(z) = z$ и $\Phi(z) = -z$ в $\mathbb{C}$.

2. Установить вдоль каких путей этот элемент продолжается, а вдоль каких – нет (с обоснованием); выписать семейства, осуществляющие эти продолжения. Найти область определения D_Φ.

3. Указать сколько различных элементов данной ПАФ имеют своим центром произвольную точку $b \in D_\Phi$, как эти элементы связаны друг с другом.

4. Найти и классифицировать все ИОТ *ветвей* ПАФ Φ. Отметим, что одна и та же точка $z_0 \in D_\Phi$ может иметь разную классификацию у разных ветвей ПАФ Φ. В этом случае следует указывать: сколько различных ветвей имеют изолированную особенность *над этой точкой* и классифицировать *каждую* из них.

Для ПАФ Φ и произвольной области $U \subset D_\Phi$ полезно ввести обозначение $\Phi|_U$ – совокупность всех *элементов* из Φ с центрами в U.

Если производные всех элементов ПАФ Φ задают рациональную функцию (как в случае $Ln(z - z_0)$, или в следующем примере), то для описания Φ достаточно воспользоваться линейными комбинациями *табличных* продолжений для $Ln(z - z_0)$ (и, возможно, просто рациональными функциями).

Пример 11.1. [ПАФ $\Phi = \mathrm{Arctg}(z)$].

1. Исходный элемент $\mathcal{F}_0 = Э_0^{\mathrm{arctg}(z)} = (B(0,1), \mathrm{arctg}(z))$ – канонический (из табличных тейлоровских разложений). Поскольку $(\mathrm{arctg}(z))' = 1/(z^2+1) = \frac{i/2}{z+i} + \frac{-i/2}{z-i}$, мы получаем

$$\mathcal{F}_0 = \left(B(0,1), \frac{i}{2} \underset{(0,\pi)}{\ln}(z+i) + \frac{-i}{2} \underset{(-\pi,0)}{\ln}(z-i) + \pi/2\right),$$

где области определения логарифмов должны содержать $B(0,1)$. Таким образом, можно воспользоваться табличными ПАФ $Ln(z+i)$ и $Ln(z-i)$.

2. Конкретно, пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, $\gamma(\alpha) = a = 0$, – путь (если он проходит через $-i$ или i, то АП не существует, подобные утверждения в своих задачах надо коротко доказывать!). Тогда семейство, осуществляющее нужное АП $\mathcal{F}_0$ вдоль γ, имеет вид:

$$\mathbb{F}_\gamma = \left\{\mathcal{F}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}, \ \mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R^t), f^t),$$

$$R^t = \min\{|\gamma(t) + i|, |\gamma(t) - i|\}, \ f^t(z) = \frac{i}{2} l_{-i\gamma}^t(z) + \frac{-i}{2} l_{i\gamma}^t(z) + \pi/2$$

(см. определение $l_{z_0\gamma}^t(z)$ в примере 10.1; здесь также нужно коротко объяснить почему R^t такой, и почему по путям, проходящим через $-i$ или i нужного АП не существует). Таким образом $D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ и Φ является (своей) аналитической ветвью над D_Φ.

3. Пусть $b \in D_\Phi$, и $\mathcal{F}_b = (B(b, R_b), f_b) \in \Phi$, тогда $R_b = \min\{|b+i|, |b-i|\}$. Пусть путь γ с началом и концом в точке b не проходит через точки $-i$ и i. Положим $n_- = \mathrm{ind}_{-i}(\gamma)$, $n_+ = \mathrm{ind}_i(\gamma)$. Тогда элемент $\mathcal{F}_b$ в результате АП вдоль γ перейдет в элемент $\mathcal{F}_b + (i/2)2\pi i n_- + (-i/2)2\pi i n_+ = \mathcal{F}_b - \pi n_- + \pi n_+$. Следовательно, над

точкой b имеется счетное число элементов из Φ с указанными равными радиусами R_b, и отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные $\pi k\,,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Из указанных соображений сразу получаем, что точки $-i$ и i являются точками ветвления бесконечного порядка для *аналитических ветвей* $\Phi|'_B(-i,2)$ и $\Phi|'_B(i,2)$ соответственно (по одному логарифмическому ветвлению). Над точкой ∞ имеется счетное число аналитических однозначных ветвей. Конкретно, в проколотой окрестности $V=\{1<|z|<+\infty\}$ точки ∞ имеется счетное число голоморфных функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$; каждая f_j задает свою однозначную аналитическую ветвь Φ_j над V для ПАФ Φ); при этом справедливы равенства: $f_j-f_{j'}=\pi(j-j')$. Действительно, если $b\in V$ и путь γ_{bb} обходит $+1$ раз точку ∞, оставаясь в V, то он обходит одновременно по -1 разу точки $\pm i$. Поэтому любой элемент $\mathcal{F}_b\in\Phi$ после АП вдоль γ_{bb} перейдет в себя.

Чтобы перейти на другую ветвь в V надо обойти точку $-i$ или i.

Наконец, каждая голоморфная ветвь f_j имеет в точке ∞ устранимую особенность, поскольку она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки ∞. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $f'_j(z)=1/(z^2+1)$ и применить формулу Ньютона-Лейбница (проверить!).

Заметим, что $\Phi|_V$ *не является аналитической ветвью* над V и, следовательно, мы *не должны* говорить, что Φ_V распадается над V на голоморфные ветви. Однако Φ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_1=D_\Phi$ и Φ распадается над $D_2=V$ на голоморфные ветви $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Следующий пример также входит в экзаменационную программу.

Пример 11.2. $\left[\text{ПАФ } \Phi = \text{Ж}^{-1}(z)\right]$.

Исходный элемент имеет вид $\text{Э}_0^f=(B(0,1),f)$, где $f(z)=\text{Ж}_+^{-1}(z)|_{B(0,1)}$, $f(0)=i$. Решая уравнение $\text{Ж}(w)=z$, находим $w\in z+\sqrt{z^2-1}=:\text{Ж}^{-1}(z)$, откуда

$$f(z)=z+\underset{(-\pi/2,+\pi/2)}{\sqrt{z+1}}\cdot\underset{(\pi/2,3\pi/2)}{\sqrt{z-1}}\,.$$

Покажем, что элемент Э_0^f продолжается вдоль любого пути $\gamma:[\alpha,\beta]\to D=\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, $\gamma(\alpha)=0$.

Сначала выпишем семейство, осуществляющее АП вдоль пути $\sigma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ табличного элемента ($p\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ фиксировано, $a\neq z_0$)

$$\mathcal{P}^p_{z_0a}=\Big(B\big(a,|a-z_0|\big),(z-z_0)^p_a\Big)\,,\ \ (z-z_0)^p_a=\exp(p\,l_{z_0a}(z))\,.$$

Оно имеет вид $\{\mathcal{P}^{pt}_{z_0\sigma}\}_{[\alpha,\beta]}$, где

$$\mathcal{P}^{pt}_{z_0\sigma}=\big(B(\sigma(t),|\sigma(t)-z_0|),\rho^{pt}_{z_0\sigma}\big)\,,\ \ \rho^{pt}_{z_0\sigma}(z)=\exp(p\,l^t_{z_0\sigma}(z))\,.$$

В частности, мы находим (табличную) ПАФ $(z-a)^p$, являющуюся аналитической ветвью над всей своей областью определения $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}=\mathbb{C}_{z_0\flat}$, с двумя точками ветвления одного и того же порядка (какого?) z_0 и ∞ для всей этой ПАФ (ветви) над $\mathbb{C}_{z_0\flat}$.

Искомое АП элемента Э_0^f вдоль γ имеет вид $\{\mathcal{F}^t_\gamma=\big(B(\gamma(t),R^t_\gamma),f^t_\gamma\big)\}_{[\alpha,\beta]}$, где $R^t_\gamma=\min\{|\gamma(t)-1|,|\gamma(t)+1|\}$ и

$$f^t_\gamma(z)=z+\rho^{(1/2)t}_{-1\gamma}(z)\cdot\rho^{(1/2)t}_{1\gamma}(z)\,,\ \ t\in[\alpha,\beta]\,.$$

Каждая конечная точка $b\neq\pm1$ – правильная для нашей ПАФ, имеется два элемента нашей ПАФ с центром в этой точке. Обозначим их $\mathcal{F}_b=(B(b,R_b),f_b)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_b=(B(b,R_b),\tilde{f}_b)$, $R_b=\min\{|b-1|,|b+1|\}$. При однократном обходе (только) одной из точек -1 или $+1$ элемент $\mathcal{F}_b$ переходит в $\tilde{\mathcal{F}}_b$, и наоборот. При этом

$\tilde{f}_b(z) = 1/f_b(z)$ в $B(b, R_b)$. ПАФ Φ является аналитической ветвью над своей $D_\Phi = D$. Точки -1 и 1 являются точками ветвления второго порядка для аналитических ветвей $\Phi|_{B'(-1,2)}$ и $\Phi|_{B'(1,2)}$ соответственно (по одному ветвлению). Над проколотой окрестностью $B'(\infty, 1) = \{1 < |z| < +\infty\}$ точки ∞ – две однозначные ветви: одна с полюсом 1 порядка, другая устранимая в точке ∞. Последнее можно установить, доказав, что функции $Ж_{o,i}^{-1}$ и являются этими ветвями (над $B'(\infty, 1)$).

Упражнение 11.1. Доказать, что каждая голоморфная ветвь *многозначной* функции $Ln(z)$ ($\sqrt[n]{z}$, $Arctg(z)$, $Ж^{-1}(z)$) является голоморфной ветвью для некоторой *аналитической ветви* соответствующей *ПАФ*.

В случае, когда производные всех элементов ПАФ "задают"(однозначную) мероморфную функцию в $\mathbb{C}$ (но не рациональную), удобно использовать теорему 9.4 (и следствие 9.4.1) о продолжении п/о элемента с формулой (9.1).

Пример 11.3. [ПАФ $\Phi = Ln(\sin(z))$]

1. Исходный элемент $\mathcal{F}_a = Э_a^{\ln(\sin(z))} = (B(a, |a|), f_a)$, где $a = \pi/2$, $f_a \in \mathcal{A}(B(a, |a|))$ совпадает с $\ln(\sin(z))$ в некоторой окрестности точки a. Заметим, что $f_a'(z) = (\ln(\sin(z)))' = \operatorname{ctg}(z)$ в некоторой окрестности точки a, и, следовательно, во всем круге голоморфности $B(a, |a|)$ функции $\operatorname{ctg}(z)$ (откуда и берется радиус $R_a = \pi/2$). По теореме единственности, поскольку функция $\operatorname{ctg}(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ (имеет простые полюса πk, $k \in \mathbb{Z}$), для любого элемента $\mathcal{F}_b = (B_b, f_b)$, принадлежащего нашей ПАФ Φ (определяемой элементом $\mathcal{F}_a$), мы имеем $f_b'(z) = \operatorname{ctg}(z)$ в B_b. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 9.4 (и следствием 9.4.1) о продолжении п/о элемента и формулой (9.1).

2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to D = \mathbb{C} \setminus \{\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\gamma(\alpha) = a$, – путь. Если он проходит хотя бы через одну из точек множества $P = \{\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т.е. не лежит целиком в D, то АП $\mathcal{F}_a$ вдоль γ не существует (доказать!). По теореме 9.4 о продолжении п/о элемента (её следствию 9.4.1 и формуле (9.1)) семейство $\mathbb{F}_\gamma = \left\{\mathcal{F}_\gamma^t\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ $(\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), F_\gamma^t)$, осуществляющее АП $\mathcal{F}_a$ вдоль γ имеет вид:

$$F_\gamma^t(z) = \int\limits_{\gamma|_{[\alpha,t]}} \operatorname{ctg}(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{[\gamma(t),z]} \operatorname{ctg}(\zeta)\, d\zeta\ , \quad z \in B(\gamma(t), R_\gamma^t)\,,$$

при этом ясно, что $R^t = \min\{|\gamma(t) - \pi k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Так что $D_\Phi = D = \mathbb{C} \setminus P$.

3. Пусть теперь $b \in D$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$ и путь γ_k с началом и концом в точке b обходит точку πk ровно $+1$ раз, не обходя при этом никакую другую точку из P. Из формулы (9.1) (её аналога для $\mathcal{F}_b$ и γ_k), получаем, что при АП элемента $\mathcal{F}_b$ вдоль γ_k элемент $\mathcal{F}_b$ перейдет в элемент

$$\mathcal{F}_b + \int\limits_{\gamma_k} \operatorname{ctg}(\zeta)\, d\zeta = \mathcal{F}_b + 2\pi i \operatorname*{res}_{\pi k}(\operatorname{ctg}(z)) = \mathcal{F}_b + 2\pi i\,.$$

Следовательно, над точкой b имеется счетное число элементов из Φ с равными радиусами $R_b = \min\{|b - \pi k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$, и отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные $2\pi i j$, $j \in \mathbb{Z}$.

4. В результате получаем, что каждая точка $z_k = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) является точкой ветвления бесконечного порядка (по одному логарифмическому ветвлению в $B'(z_k, \pi)$ для аналитической ветви $\Phi|_{B'(z_k,\pi)}$). Точка ∞ не является ИОТ для Φ, поэтому она не подлежит классификации.

Теорема 11.1. *[О продолжении сложного элемента] Пусть* $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ *– канонический элемент с центром* a*, который продолжается вдоль пути* $\gamma = \gamma_{ab} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$*, и пусть*

$$\left\{\mathcal{F}^t = (B^t, f^t) = (B(\gamma(t), R^t), f^t)\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$$

– семейство, осуществляющее указанное продолжение. Определим путь

$$\Gamma(t) = f^t\bigl(\gamma(t)\bigr)\,,\ t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Пусть элемент $\mathcal{G}_A = (B_A, g_A)$ *с центром* $A = \Gamma(\alpha)$ *аналитически продолжается вдоль пути* Γ*, и*

$$\left\{\mathcal{G}^t = (\tilde{B}^t, g^t) = (B(\Gamma(t), \tilde{R}^t), g^t)\right\}_{t\in[\alpha,\beta]}$$

– семейство, осуществляющее это продолжение.

Тогда элемент $\mathcal{H}_a = \text{Э}_a^{g_A\circ f_a}$ *продолжается вдоль пути* γ*, причем семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид*

$$\{\mathcal{H}^t = \text{Э}_{\gamma(t)}^{g^t\circ f^t}\}_{t\in[\alpha,\beta]}\,.$$

Доказательство. Надо установить, что Γ – путь, и проверить, что указанное семейство $\{\mathcal{H}^t\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ канонических элементов удовлетворяет условию 2) определения 8.5.

Фиксируем любую $t_0 \in [\alpha, \beta]$. По утверждению 1) предложения 8.3 найдется сколь угодно малое $\delta > 0$ и связная открытая окрестность $O_1(t_0)$ (зависящая от δ) такие, что при всех $t \in O_1(t_0)$ выполняются следующие свойства:

(1) $B_0 = B(z_0, \delta) \subset B^t$, где $z_0 = \gamma(t_0)$;

(2) $\gamma(t) \in B_0$, $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_0}$, откуда $f^t = f^{t_0}$ всюду в B_0;

следовательно, для всех $t \in O_1(t_0)$ имеем $\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = f^{t_0}(\gamma(t))$ и, значит, $\Gamma(t)$ непрерывна в окрестности точки t_0. Так что Γ – путь на $[\alpha, \beta]$.

Аналогично, найдется $\varepsilon > 0$ и связная открытая окрестность $O_2(t_0)$ такие, что при всех $t \in O_2(t_0)$ выполняются следующие свойства:

(3) $\tilde{B}_0 = B(w_0, \varepsilon) \subset \tilde{B}^t$, где $w_0 = \Gamma(t_0) = f^{t_0}(z_0)$;

(4) $\Gamma(t) \in \tilde{B}_0$, $\mathcal{G}^t \leftrightarrow \mathcal{G}^{t_0}$, откуда $g^t = g^{t_0}$ всюду в $\tilde{B}_0$;

(5) фиксируем указанное ε и выберем (фиксируем) столь малое δ, чтобы дополнительно выполнялось включение $f^{t_0}(B_0) \subset \tilde{B}_0$, т.е. чтобы функция $h_0(z) = g^{t_0} \circ f^{t_0}(z)$ была голоморфна в B_0.

Из этих свойств получаем, что при всех $t \in O_1(t_0) \cap O_2(t_0)$ имеем $h_0(z) = g^t \circ f^t(z)$ в B_0 и, следовательно,

$$\mathcal{H}^t = \text{Э}_{\gamma(t)}^{g^t\circ f^t} = \text{Э}_{\gamma(t)}^{h_0}\,,$$

т.е. $\mathcal{H}^t \leftrightarrow \mathcal{H}^{t_0}$. $\square$

Примерами применения теоремы 11.1 могут служить полные исследования ПАФ $\cos\bigl(\pi/(2 + \sqrt[3]{z})\bigr)$ и $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$ (см. в следующей лекции).

12. Лекция 12. ПАФ $\cos\left(\pi/(2+\sqrt[3]{z})\right)$, $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ и $\operatorname{Arcsin}(z)$.

Пример 12.1. *[ПАФ $\Phi = \cos\left(\pi/(2+\sqrt[3]{z})\right)$].* Положим $h(z) = \cos\left(\pi/(2+\sqrt[3]{z}_{(o)})\right)$, $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_-)$, где $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Требуется охарактеризовать ПАФ Φ, определяемую элементом $\mathcal{H}_1 = Э_1^h$ (и, следовательно, любым элементом $Э_b^h$, $b \in \mathbb{C}_-$).

1. Пусть $\gamma : [0,\beta] \to \mathbb{C}_\flat$ - путь, $\gamma(0) = 1$. Семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{F}_1 = Э_1^{\sqrt[3]{z}_{(o)}}$ вдоль γ имеет вид $\{\mathcal{F}^t = (B(\gamma(t), |\gamma(t)|), f^t)\}_{[0,\beta]}$, где

$$f^t(z) = \sqrt[3]{|z|}\, \exp\left(\frac{i}{3} \underset{(\varphi(t)-\pi/2, \varphi(t)+\pi/2)}{\arg(z)}\right),$$

$\varphi(t)|_{[0,\beta]}$ – непрерывная ветвь $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$ на $[0,\beta]$ с условием $\varphi(0) = 0$ (т.е. $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}$, $t \in [0,\beta]$). Пусть $\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = \sqrt[3]{|\gamma(t)|}\, e^{i\varphi(t)/3}$, $t \in [0,\beta]$.

2. Элемент $\mathcal{G}_1 = Э_1^{\cos(\pi/(2+w))}$ продолжается вдоль Γ, если и только если Γ не проходит через точку -2, т.е. если $\sqrt[3]{|\gamma(t)|} \neq 2$ при $e^{i\varphi(t)/3} = -1$ (т.е. $\gamma(t) \neq -8$ при $\varphi(t) = 3\pi + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Пусть $\{\mathcal{G}^t = (B(\Gamma(t), |\Gamma(t)+2|), g^t)\}_{[0,\beta]}$ – семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{G}_1$ вдоль указанного пути Γ, где

$$g^t(w) = Э_{\Gamma(t)}^{\cos(\pi/(2+w))}.$$

По теореме об АП сложного элемента, исходный элемент $\mathcal{H}_1 = Э_1^h$ продолжается вдоль *указанных* γ, и соответствующее продолжающее семейство имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = Э_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t}\}_{[0,\beta]}.$$

Пусть Φ – полученная ПАФ, $D_\Phi = \mathbb{C}_\flat$. Введем еще $D_1 = \mathbb{C}\setminus\{0,-8\}$. Поскольку исходный элемент $\mathcal{H}_1$ продолжается по всем путям в D_1, ветвь $\Phi_1 = \Phi|_{D_1}$ является аналитической над D_1 и, следовательно, ПАФ Φ имеет только *три особые точки*: $0, -8$ и ∞. Над областью $\mathbb{C}_-$ ветвь Φ_1 распадается на 3 голоморфных ветви (указать какие, например h). Над областью $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin [0,+\infty), z \neq -8\}$ Φ_1 также распадается на 3 голоморфных ветви (указать какие, например h_{-8} ниже), две из которых голоморфны также и в точке -8, а одна имеет в этой точке существенную особенность. Над каждой точкой $b \in D_1$ имеется 3 элемента ПАФ Φ (с какими радиусами?).

Над точками 0 и ∞ – по одному ветвлению третьего порядка. Над точкой -8 – две (однозначные) голоморфные ветви и однозначная голоморфная ветвь с существенной особенностью, задаваемая голоморфной ветвью

$$h_{-8}(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2+\sqrt[3]{z}_{(2\pi,4\pi)}}\right)$$

в области $0 < |z+8| < 8$.

Пример 12.2. *[ПАФ $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{z}}$].* Пусть $h(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$. Требуется охарактеризовать ПАФ Φ, определяемую элементом $Э_1^h$.

1. Легко проверяется, что $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_-)$, т.е. h - голоморфная ветвь ПАФ Φ, поэтому $\forall a \in \mathbb{C}_-$ элемент $Э_a^h \in \Phi$.

2. Функция h удовлетворяет уравнению $(h^2(z)-1)^2 = z$, т.е. $h^4-2h^2+1-z=0$ (и, следовательно, Φ - *алгебраическая* ПАФ). Поэтому, по теореме единственности, если $\mathcal{H}_b = (B(b,R_b),h_b) \in \Phi$, то $(h_b^2(z)-1)^2 \equiv z$ при $z \in B(b,R_b)$, откуда, в частности, если $z \neq 0$ и 1, то $h_b(z) \neq \pm 1$ и $h_b(z) \neq 0$ в $B(b,R_b)$.

3. Из предыдущего (и элементарных свойств непрерывности функций h_b в $B(b,R_b)$) следует, что над каждой точкой $b \neq 0$, $b \neq 1$ может быть <u>не более</u> 4 различных элементов из Φ с центром b (проверить!).

4. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, и пусть $\gamma : [0,\beta] \to \mathbb{C}_\flat$ - путь с началом в точке x_0. Семейство, осуществляющее продолжение элемента $\text{Э}_{x_0}^{\sqrt{z}_{(o)}}$ вдоль γ имеет вид $\{\mathcal{F}^t = (B(\gamma(t),|\gamma(t)|),f^t)\}_{[0,\beta]}$, где $f^t(z) = \sqrt{|z|}\exp(i \underset{(\varphi(t)-\pi/2,\varphi(t)+\pi/2)}{\arg(z)} /2)$, где $\varphi(t)|_{[0,\beta]}$– непрерывная ветвь $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$ на $[0,\beta]$ с условием $\varphi(0)=0$ (т.е. $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}$, $t \in [0,\beta]$). Пусть $\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = \sqrt{|\gamma(t)|}\,e^{i\varphi(t)/2}$, $t \in [0,\beta]$.

Элемент $\mathcal{G}_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{1+w}_{(o)}}$ продолжается вдоль Γ, если и только если Γ не проходит через точку -1, т.е. если $\sqrt{|\gamma(t)|} \neq 1$ при $e^{i\varphi(t)/2} = -1$ (т.е. $\gamma(t) \neq 1$ при $\varphi(t) = 2\pi + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$). Пусть $\{\mathcal{G}^t = (B(\Gamma(t),|\Gamma(t)+1|),g^t)\}_{[0,\beta]}$ – семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{G}_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{1+w}_{(o)}}$ вдоль такого пути Γ, где

$$g^t(w) = \sqrt{|w+1|}\exp(i \underset{(\psi(t)-\pi/2,\psi(t)+\pi/2)}{arg(w+1)} /2)$$

и $\psi(t)$ – непрерывная ветвь $\operatorname{Arg}(\Gamma(t)+1)$ на $[0,\beta]$ с условием $\psi(0)=0$.

По теореме об АП сложного элемента, исходный элемент $\mathcal{H}_{x_0}^h$ продолжается вдоль *указанных* γ и соответствующее продолжающее семейство имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = \text{Э}_{\gamma(t)}^{g^t\circ f^t}\}_{[0,\beta]}. \tag{12.1}$$

Отсюда следует, что Φ имеет только <u>три особые точки</u>: $0, 1$ и ∞.

5. При АП элемента $\text{Э}_{1/2}^h$ (+ 1 раз) вдоль окружности $\{(1/2)e^{it} \mid t \in [0,2\pi]\}$ мы приходим к элементу $\text{Э}_{1/2}^{h_-}$, где $h_-(z) = \sqrt{1-\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)} \in \mathcal{A}(D_0)$ и $D_0 = (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}) \cup (0,1)$. После еще одного обхода снова получаем $\text{Э}_{1/2}^h$, т.е. имеем ветвление 2 порядка у этой аналитической ветви в <u>$B'(0,1)$</u>, что легко следует из 12.1, где можно брать вместо g^t функцию $g^+(w) = \sqrt{1+w}_{(o)}$.

6. Поскольку $h(z) = \sqrt[4]{z}_{(o)}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)}$ на $\mathbb{C}_-\setminus\overline{B_1}$ (применить теорему единственности), легко видеть, что, продолжая Э_2^h вдоль пути $\{2e^{it} \mid t \in [0,2\pi]\}$, после + одного обхода получаем элемент $\text{Э}_2^{i\sqrt[4]{z}_{(o)}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)}}$, после 2-го – элемент $\text{Э}_2^{-\sqrt[4]{z}_{(o)}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)}}$, после третьего – элемент $\text{Э}_2^{-i\sqrt[4]{z}_{(o)}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)}}$, после четвертого возвращаемся к элементу Э_2^h. Поэтому над ∞ имеем 1 ветвление 4 порядка (над кольцом $\{|z|>1\}$). В частности, отсюда следует, что над каждой точкой этого кольца наша ПАФ имеет по 4 элемента, которые попарно отличаются только знаками.

7. По теореме единственности над каждой точкой $b \neq 0$, $b \neq 1$ ПАФ Φ также имеет по 4 различных элемента, попарно отличающихся только знаками. Над $b=0$ имеется 2 ветвления 2-го порядка (второе получается из пункта 5. сменой знака у внешнего корня; как его получить продолжением вдоль пути из $\text{Э}_{1/2}^h$?).

8. Над точкой $a=1$ имеется две однозначные ветви (которые задаются голоморфными ветвями $\pm h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_-)$), и одно ветвление второго порядка. Разобрать последний случай самостоятельно, рассмотрев элемент $\mathfrak{Э}^{h_-}_{1/2}$, где

$$h_-(z) = \sqrt{1-\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)} = \frac{\sqrt{1-z}_{(o)}}{\sqrt{1+\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}} = \frac{-i\sqrt{z-1}_{(\pi/2,3\pi/2)}}{\sqrt{1+\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}}$$

в $B(1/2,1/2)$.

Каковы радиусы элементов из Φ?

Замечание 12.1. *Если в предыдущей задаче взять* $h(z) = \sqrt{z+\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$, *то для описания соответствующей новой ПАФ используем равенство* $h(z) = \sqrt[4]{z}_{(o)}\sqrt{1+\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$ *в* $\mathbb{C}_-$, *и сводим эту задачу к предыдущей.*

Аналогично можно рассматривать задачи об описании ПАФ с исходными элементами $\mathfrak{Э}^h_1$ *при* $h(z) = \sqrt[n]{az^m + b\sqrt[k]{z}_{(o)}}_{(o)}$, *где* a *и* $b \in (0,+\infty)$, n *и* $k \in \{2,3,\dots\}$, $m \in \{0,1,\dots\}$.

Пример 12.3. *[Полное описание ПАФ* $\mathrm{Arcsin}(z)$*].*

В качестве исходного элемента берем $\mathcal{F}_0 = (B(0,1), f_0)$, где $f_0(z) = \arcsin(z)$. Напомним, что $\arcsin(z)$ – главная ветвь арксинуса, определенная и голоморфная в области $D_0 = \mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$. Покажем, что $\mathcal{F}_0$ - канонический. Действительно, "производная"этого элемента в круге $B_0 = B(0,1)$ по теореме единственности имеет вид

$$f_0'(z) = (\arcsin(z))' = \frac{i}{\sqrt{z+1}_{(-\pi/2,\pi/2)}\sqrt{z-1}_{(\pi/2,3\pi/2)}},$$

поскольку в этом равенстве участвуют две голоморфные функции, совпадающие на $(-1,1)$. В частности, f_0' неограничена в B_0.

Пользуясь "табличными" ПАФ $\sqrt{z-z_0}$, мы можем продолжить элемент $\mathcal{F}_0' = \left(B_0, f_0'\right)$ вдоль любого пути с началом в точке 0, не проходящего через точки -1, 1 (и не можем продолжать по другим путям). При этом радиус любого из полученных элементов с центром в точке $b \in \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ равен $\min\{|b+1|,|b-1|\}$.

Упражнение: выписать семейство, осуществляющее такое продолжение и описать соответствующую ПАФ, которую обозначим через Φ'. *(Ответ: по одному ветвлению 2 порядка над точками* -1 *и* 1*; над точкой* ∞ *– две однозначные ветви с устранимыми особенностями в* ∞*). ПАФ* Φ' *является аналитической ветвью над своей областью определения* $D_1 = \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, *она над каждой односвязной областью* $D_2 \subset D_1$ *распадается на две голоморфные ветви, отличающиеся только знаком.*

По теореме о продолжении первообразного элемента мы можем продолжать и исходный элемент $\mathfrak{F}_0$ вдоль тех же путей и с такими же радиусами: достаточно разбить путь на последовательные "короткие"пути, в окрестностях которых выделяются соответствующие голоморфные ветви ПАФ Φ'. Таким образом, ПАФ $\Phi = \mathrm{Arcsin}(z)$ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_\Phi = D_1 = \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$.

Охарактеризуем особые точки -1, 1 и ∞ ПАФ $\mathrm{Arcsin}(z)$. Для этого посмотрим: что происходит с элементом $\mathcal{F}_0$ при однократном (положительном) обходе точек -1 и 1 по окружностям $\gamma_{-1} = \{-1+e^{it}\,|\,t\in[0,2\pi]\}$ и $\gamma_1 = \{1+e^{it}\,|\,t \in$

$[-\pi, \pi]\}$, соответственно. При $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ положим

$$\arcsin(x + i0) = \lim_{y \to 0+} \arcsin(x + iy) \ , \quad \arcsin(x - i0) = \lim_{y \to 0+} \arcsin(x - iy) \ .$$

Убедимся, что

$$\arcsin(x + i0) + \arcsin(x - i0) = \pi \ \text{при} \ x \in (1, +\infty) \, , \tag{12.2}$$

$$\arcsin(x + i0) + \arcsin(x - i0) = -\pi \ \text{при} \ x \in (-\infty, -1) \, . \tag{12.3}$$

Действительно, при фиксированном $x \in (1, +\infty)$ траектории $\arcsin(x + it)$ и $\arcsin(x - it)$ (где $t > 0$ мало) симметричны относительно вещественной оси (ввиду равенства $\arcsin(\overline{z}) = \overline{\arcsin(z)}$), и при $t \to 0+$ они выходят на прямую $\{Re(z) = \pi/2\}$. Из этого вытекает равенство (12.2). Если же $x \in (-\infty, -1)$, то аналогичные траектории будут симметрично выходить на прямую $\{Re(z) = -\pi/2\}$, что дает равенство (12.3).

Рассмотрим элемент $\mathcal{F}_2^+ = (B(2,1), f_2^+)$ (соответственно, $\mathcal{F}_2^- = (B(2,1), f_2^-)$) с центром 2, получаемый из элемента $\mathcal{F}_0$ продолжением вдоль пути $\gamma_+ = \{1 + e^{-it} \,|\, t \in [-\pi, 0]\}$ (соответственно, $\gamma_- = \{1 + e^{it} \,|\, t \in [-\pi, 0]\}$). В силу равенства (12.2) и теоремы единственности получаем, что $f_2^+ + f_2^- \equiv \pi$ в $B(2,1)$, откуда вытекает, что элемент $\mathcal{F}_0$ после обхода точки 1 по γ_1 перейдет в элемент $-\mathcal{F}_0 + \pi = (B_0, -f_0 + \pi)$. После двух оборотов по γ_1 элемент $\mathcal{F}_0$ перейдет в себя. Аналогично, если пройти по траектории γ_{-1}, то элемент $\mathcal{F}_0$ перейдет в $-\mathcal{F}_0 - \pi$ (поскольку выполнено (12.3)), а при двукратном обходе он перейдет в себя. При обходе по γ_1, а потом по γ_{-1} элемент $\mathcal{F}_0$ переходит в элемент $\mathcal{F}_0 + 2\pi = (B_0, f_0 + 2\pi)$. (Аналогичным образом проверяется, что при обходе вдоль окружности $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, элемент $\mathcal{F}_2^+$ переходит в $\mathcal{F}_2^+ - 2\pi$.)

Из теоремы об аналитическом продолжении элементов по гомотопным путям получаем, что у ПАФ $\mathrm{Arcsin}(z)$ над каждой точкой $b \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ имеется счетное число элементов вида $\mathcal{F}_b + 2\pi k$ и $-\mathcal{F}_b + \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathcal{F}_b$ – некоторый фиксированный элемент ПАФ $\mathrm{Arcsin}(z)$ с центром b (например, $Э_b^{\arcsin(z)}$ при $z \in D_0$).

Итак, над точками 1 и -1 у $\mathrm{Arcsin}(z)$ имеется счетное число ветвлений второго порядка; над точкой ∞ есть два логарифмических ветвления (проверить!).

13. Лекция 13. Модулярная функция и малые теоремы Пикара.

Пусть $\gamma = \partial B_1 = \big\{|z| = 1\big\}$ – единичная окружность ($B_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$). Фиксируем точки a_0^1, $a_0^2 = i$, a_0^3 на γ, делящие эту окружность на три равные части (см. рис. 13.1).

Проведем через точки a_0^1 и a_0^2 окружность Γ_0^1, перпендикулярную γ. Часть ее внутри B_1 (без точек a_0^1 и a_0^2) назовем γ_0^1. Аналогично проводим окружности Γ_0^2 (через a_0^2 и a_0^3, перпендикулярно γ) и Γ_0^3 (через a_0^3 и a_0^1, перпендикулярно γ) и обозначим их части внутри B_1 соответственно через γ_0^2 и γ_0^3. В результате, γ_0^1, γ_0^2 и γ_0^3 ограничивают (открытый) криволинейный треугольник, который обозначим через T_0.

При инверсии относительно окружности Γ_0^1 дуга γ_0^1 остается на месте (поточечно), γ переходит в себя в силу перпендикулярности окружностей γ и Γ_0^1, точка a_0^3 переходит в точку a_1^1 на γ, треугольник T_0 переходит в треугольник T_1^1, ограниченный дугами γ_0^1, γ_1^1 (соединяет точки a_0^1 и a_1^1) и γ_1^2 (соединяет точки a_1^1 и a_0^2), ортогональными γ (см. рис 13.1). Аналогично, точка a_1^2 симметрична точке a_0^1 относительно Γ_0^2, точка a_1^3 – симметрична a_0^2 относительно Γ_0^3; треугольники T_1^2 и T_1^3 симметричны треугольнику T_0 относительно γ_0^2 и γ_0^3 соответственно.

При симметрии относительно Γ_0^1 дуга γ_0^2 переходит в γ_1^2, а дуга γ_0^3 – в γ_1^1. При симметрии относительно Γ_0^2 дуга γ_0^1 переходит в γ_1^3, а γ_0^3 – в γ_1^4. При симметрии относительно Γ_0^3 дуга γ_0^1 переходит в γ_1^6, а γ_0^2 переходит в γ_1^5.

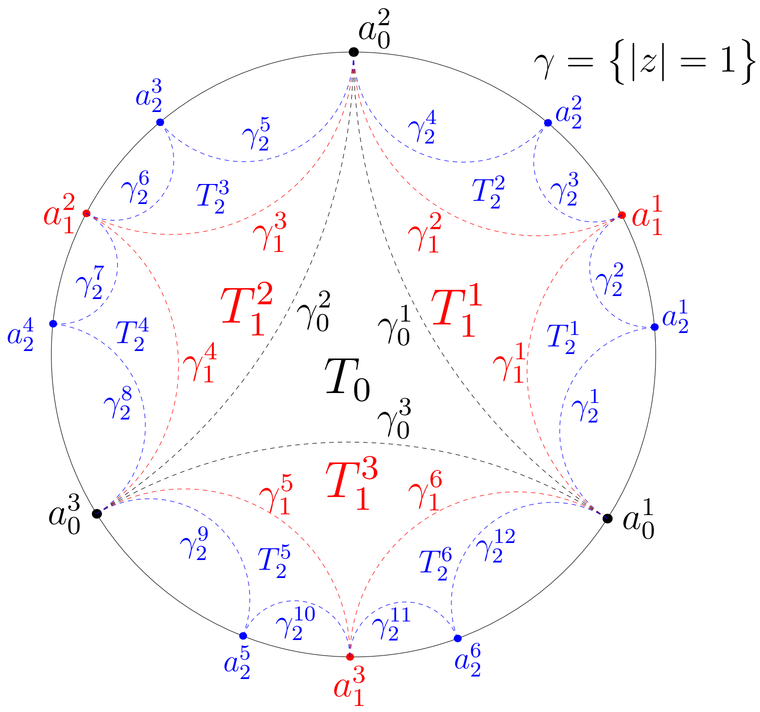

Рис. 13.1.

Все дуги γ_1^k, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, – части перпендикулярных γ окружностей (обозначаемых соответственно Γ_1^k, $k \in \{1, \ldots, 6\}$), находящиеся внутри B_1. Какие у них концевые точки, можно увидеть на рис. 13.1.

Для порядка в индексах на каждом уровне мы нумеруем объекты, начиная с точки a_0^1 и двигаясь против часовой стрелки. Нижний индекс отвечает за шаг индукции, верхний – за номер объекта на этом шаге (именно так обозначены

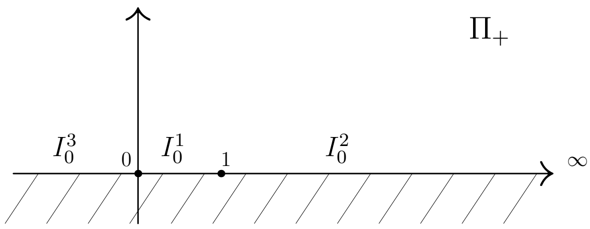

Рис. 13.2.

γ_1^k, $k \in \{1, \ldots, 6\}$). Например, через T_n^j обозначен j-й открытый криволинейный треугольник n-го уровня.

Введем ещё обозначения: $P_1^j = T_0 \sqcup \gamma_0^j \sqcup T_1^j$ – "пары"первого уровня с номером $j \in \{1, 2, 3\}$), а также $D_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{3} P_1^j$.

По теореме Римана конформно отобразим T_0 на верхнюю полуплоскость Π_+; тогда по теореме Каратеодори это отображение будет продолжаться до гомеоморфизма $\overline{T}_0$ на ${}^\sharp\overline{\Pi}_+$ (замыкание берется в $\mathbb{C}^\sharp$). Применяя дополнительно ДЛО-автоморфизм в Π_+, найдем (единственное) гомеоморфное отображение $\mu_0 : \overline{T}_0 \to {}^\sharp\overline{\Pi}_+$, конформно отображающее T_0 на Π_+, с условиями: $a_0^1 \mapsto 0$, $a_0^2 \mapsto 1$, $a_0^3 \mapsto \infty$ (откуда следует, что $\gamma_0^1 \to (0, 1) = I_0^1$, $\gamma_0^2 \to (1, +\infty) = I_0^2$, $\gamma_0^3 \to (-\infty, 0) = I_0^3$).

Введем обозначения: $\Omega_1^j = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \cup I_0^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. По принципу симметрии, для каждого $j \in \{1, 2, 3\}$ функцию μ_0 можно продолжить до конформного отображения $\mu_1^j : P_1^j \xrightarrow{\text{на}} \Omega_1^j$. Поэтому μ_0 можно продолжить до локально конформного отображения $\mu_1 : D_1 \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, где $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$.

Пусть сделан n-й шаг индукции ($n \geq 1$), т.е. построены криволинейные треугольники T_n^j, $j = 1, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}$, со "свободными"сторонами γ_n^k, $k = 1, \ldots, 3 \cdot 2^n$, причем γ_n^{2j-1} и γ_n^{2j} – стороны треугольника T_n^j для всех $j = 1, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}$. Кроме того, определены "пары"P_n^j и конформные отображения $\mu_n^j : P_n^j \xrightarrow{\text{на}} \Omega_n^j$, а также локально конформное отображение $\mu_n : D_n \xrightarrow{\text{на}} \Omega$.

По индукции, криволинейный треугольник T_{n+1}^{2j-1} (соответственно, T_{n+1}^{2j}) получается из T_n^j симметрией относительно окружности Γ_n^{2j-1}, определяемой дугой γ_n^{2j-1} (соответственно, Γ_n^{2j}, определяемой дугой γ_n^{2j}). Определим также "пары"уровня $(n + 1)$:

$$P_{n+1}^{2j-1} = T_n^j \sqcup \gamma_n^{2j-1} \sqcup T_{n+1}^{2j-1}\ ,\ P_{n+1}^{2j} = T_n^j \sqcup \gamma_n^{2j} \sqcup T_{n+1}^{2j}\ ,\ j = 1, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}\ ,$$

и область

$$D_{n+1} = D_n \bigcup_{k=1}^{3 \cdot 2^n} P_{n+1}^k$$

Рисунок 13.1 соответствует окончанию второго шага индукции.

По принципу симметрии $\mu_n|_{T_n^j}$ продолжается до конформных отображений

$$\mu_{n+1}^{2j-1} : P_{n+1}^{2j-1} \xrightarrow{\text{на}} \Omega_{n+1}^{2j-1} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_n^{2j-1},$$
$$\mu_{n+1}^{2j} : P_{n+1}^{2j} \xrightarrow{\text{на}} \Omega_{n+1}^{2j} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_n^{2j},$$

где $I_n^k \in \left\{I_0^1, I_0^2, I_0^3\right\}$ для всех рассматриваемых n и k (что следует из явной формулы в доказательстве принципа симметрии). Таким образом, определено локально конформное отображение

$$\mu_{n+1} : D_{n+1} \overset{\text{на}}{\to} \Omega\ ,\ \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}\ .$$

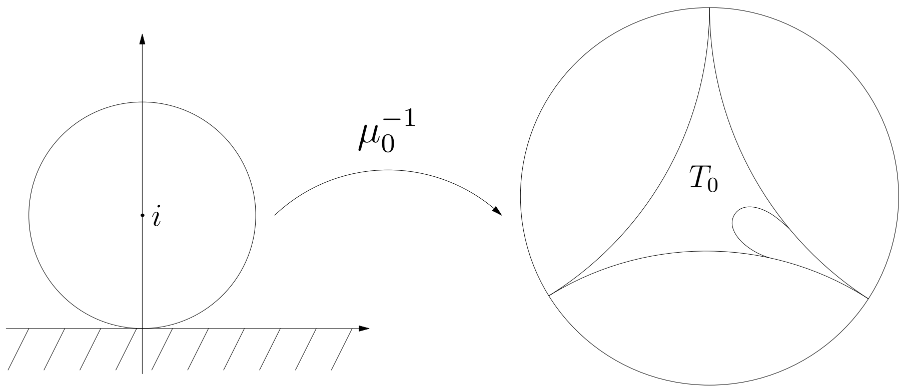

Рис. 13.3.

Пусть $D = \cup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Тогда $D \subset B_1$ – односвязная область (что легко следует, например, из её звёздности относительно нуля). В результате определено локально конформное отображение $\mu : D \overset{\text{на}}{\to} \Omega$, совпадающее с μ_n на D_n, $n \in \mathbb{N}$. Это отображение μ называется *модулярной функцией.*

Упражнение 13.1. Доказать, что $D = B_1$ (в настоящем доказательстве этого не потребуется).

Для каждой пары P_n^j, $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$, определено конформное отображение $(\mu_n^j)^{-1} : \Omega_n^j \overset{\text{на}}{\to} P_n^j$, обратное к μ_n^j. Рассмотрим отображение $\mu_0^{-1} : \Pi_+ \to T_0$.

Положим $\mathfrak{G}_i = \ni_i^{\mu_0^{-1}} = (B(i, R_i), g_i)$. Покажем, что радиус R_i этого элемента равен 1. Ясно, что R_i не меньше 1. Если, от противного, $R_i > 1$, то в точке 0 существовала бы ненулевая производная некоторого конечного порядка $p \geq 1$ для функции g_i (поскольку функция μ_0^{-1} непостоянна); но тогда бесконечно малый угол величины π в Π_+ с вершиной в нуле перейдет под действием g_i (а, значит, μ_0^{-1}) в бесконечно малый угол величины $p\pi$ с центром a_0^1, чего не может быть, так как он переходит в бесконечно малый угол величины 0 (см. рис. 13.3).

Обозначим через μ^{-1} ПАФ, определяемую элементом $\mathfrak{G}_i$.

Упражнение 13.2. Элемент $\mathfrak{G}_i$ продолжается вдоль любого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ с началом в точке i, не проходящего через точки 0 и 1 и не продолжается по другим путям. Следовательно, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ является областью определения ПАФ μ^{-1} и μ^{-1} аналитична над всей Ω, а все точки $b \in \Omega$ являются правильными для ПАФ μ^{-1}. Точки $0, 1, \infty$ – точки логарифмического ветвления, причем над каждой из них имеется счетное число логарифмических ветвлений.

Указание (для доказательства существования АП). Построить *цепочку* (неканонических) элементов, которые "задают"нужное продолжение элемента $\mathfrak{G}_i$ вдоль γ, используя следующие два факта. Над каждой области Ω_n^j определена голоморфная функция $(\mu_n^j)^{-1}$ (которая является голоморфной ветвью ПАФ μ^{-1}). Путь γ можно представить в виде $\gamma = \bigcup\limits_{s=1}^{S} \gamma_s$, где каждый из $[\gamma_s]$ полностью содержится в одной из Ω_n^j.

Теорема 13.1 (Теорема Пикара для целых функций). *Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – целая функция, не являющаяся тождественной константой. Тогда f принимает (в $\mathbb{C}$) все значения из $\mathbb{C}$, кроме, быть может, одного.*

Если последнее значение существует, оно называется *исключительным пикаровским значением (ИПЗ)* для f.

Доказательство. Пусть, от противного, найдется $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, не равная тождественно константе, и различные числа a и b из $\mathbb{C}$, для которых $f(z) \neq a$ и $f(z) \neq b$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда целая функция $f_1(z) = (f(z) - a)/(b - a)$ не принимает значений 0 и 1. Будем считать, что $f_1 = f$.

Утверждается, что $f(\mathbb{C}) \cap B(i, 1) \neq \varnothing$. Действительно, в противном случае функция $1/(f(z) - i) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ограничена по модулю единицей, и по теореме Лиувилля является константой, а, следовательно, и f является константой, что не так. Таким образом, найдется $z_0 \in \mathbb{C}$ с условием $w_0 = f(z_0) \in B(i, 1)$.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – произвольный путь, удовлетворяющий условию $\gamma(\alpha) = z_0$. Тогда $Э^f_{z_0}$ продолжается вдоль γ, поскольку f – целая функция.

Рассмотрим путь $\Gamma(t) = f(\gamma(t)) : [\alpha, \beta] \to \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, $\Gamma(\alpha) = w_0$.

Рассмотрим $\mathfrak{G}_{w_0} = \mathfrak{G}^{\mu_0^{-1}}_{w_0}$. Поскольку $R_i = R(\mathfrak{G}_i) = 1$, элемент $\mathfrak{G}_{w_0}$ может быть получен из элемента $\mathfrak{G}_i$ переразложением. Следовательно, $\mathfrak{G}_{w_0}$ продолжается вдоль любого пути, не проходящего через 0 и 1 (в частности, вдоль Γ), и определяет ПАФ μ^{-1}.

По теореме 11.1 (о продолжении сложного элемента) элемент $\mathfrak{H}_{z_0} = Э^{\mu_0^{-1} \circ f}_{z_0}$ аналитически продолжается вдоль γ.

Упражнение 13.3. Проверить, что множество значений всех функций из элементов, получающихся АП $\mathfrak{H}_{z_0}$ по всем указанным путям, принадлежат области $D \subset B_1$.

Поскольку путь γ – произвольный, в результате продолжений элемента $\mathfrak{H}_{z_0}$ по всем путям в $\mathbb{C}$ мы получим целую функцию $h(z)$ (по теореме о монодромии), ограниченную по модулю единицей (поскольку все ее значения принадлежат B_1). Поэтому $h(z) \equiv const$, и, следовательно, $f(z) \equiv const$ в некоторой окрестности точки z_0. Поскольку $f(z)$ – целая функция, по теореме единственности $f(z) \equiv const$ в $\mathbb{C}$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 13.1. □

Теорема 13.2 (Малая теорема Пикара для мероморфных функций). *Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ и f не является тождественной константой. Тогда f принимает (в $\mathbb{C}$) все значения из $\mathbb{C}^\sharp$, кроме, быть может, двух (называемых ИПЗ для f).*

Напомним, что условие мероморфности функции f в $\mathbb{C}$ означает, что она голоморфна всюду в $\mathbb{C}$, за исключением (локально конечного множества) полюсов. Считается, что значение f в её полюсе равно ∞.

Доказательство. Пусть, от противного, f не принимает в $\mathbb{C}$ трех различных значений a, b, c из $\mathbb{C}^\sharp$. Если одно из них равно ∞, то f – целая, не принимающая двух различных (конечных) значений. Если все они конечны, то функция $f_1(z) = 1/(f(z) - a)$ – целая (после устранения особенностей), не принимающая двух значений $1/(b - a)$ и $1/(c - a)$. В обоих случаях имеем противоречие с предыдущей теоремой. □

Пример 13.1. Функция e^z – целая с ИПЗ, равным 0; мероморфная с ИПЗ, равными 0 и ∞.

Пример 13.2. Функция $tg(z)$ – мероморфная с ИПЗ, равными $\pm i$.

14. Лекция 14. Вычисление интегралов вида $\int\limits_a^b (x-a)^p(b-x)^q R(x)dx$.

Пример 14.1. *[Вычисление интегралов вида* $\int\limits_a^b (x-a)^p(b-x)^q R(x)dx$ *при* $-\infty < a < b < +\infty$, $p \in (-1,1)$, $q \in (-1,1)$, $p \notin \mathbb{Z}$, $q \notin \mathbb{Z}$, $p+q \in \mathbb{Z}$, $R(z)-$ *рациональная функция без полюсов на* $[a,b]$ *].*

Для примера вычислим $J = \int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt[3]{x(1-x)^2}}{(x+2)^2}dx$; $p = \dfrac{1}{3}, q = \dfrac{2}{3}, R(z) = \dfrac{1}{(z+2)^2}.$

Рассмотрим функцию $g(z) = z_{(o)}^{1/3} \cdot (z-1)_{(o)}^{2/3}$, голоморфную в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Эта функция непрерывно продолжается и на $(-\infty, 0)$ (становясь непрерывной на $\mathbb{C} \setminus [0,1]$) , поскольку $|g(z)|$, очевидно, непрерывна на $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, а функция $\arg(z_{(o)}^{1/3}) = \frac{1}{3}\arg(z)$ имеет перепад $\frac{2\pi}{3}$ (функция $\arg((z-1)_{(o)}^{2/3}) = \frac{2}{3}\arg(z-1)$ имеет перепад $4\pi/3$) при переходе $(-\infty, 0]$ снизу наверх. Общий перепад составляет 2π, что и требовалось. По теореме Мореры получаем, что $g \in \mathcal{A}(D), D = \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Пусть теперь $f(z) = g(z)/(z+2)^2$, $f_0(x)$ - *подынтегральная* функция (на $[0,1]$).

Отметим, что при $x \in (0,1)$ имеем:

$$f(x+) := \lim_{y\to 0+} f(x+iy) = f_0(x)e^{2\pi i/3}\,,\ f(x-) := \lim_{y\to 0-} f(x+iy) = f_0(x)e^{-2\pi i/3}\,,$$

поскольку $\arg{(x+iy)}_{(o)}^{2/3} \to 0$ при $y \to 0\pm$ и $\arg{(x+iy-1)}_{(o)}^{2/3} \to \pm 2\pi/3$ при $y \to 0\pm$.

Выберем лучи I_0 (с вершиной в 0) и I_1 (с вершиной в 1) так, чтобы на них не было полюсов функции $R(z)$, I_0 лежал в левой полуплоскости, I_1 – правее точки 1, а круг $B = B(0,r)$ содержал все полюса $R(z)$ и отрезок $[0,1]$.

Введем жордановы области D_1 и D_2 так, чтобы $\partial D_1 = I_{0r} \cup [0,1] \cup I_{1r} \cup \Gamma_{1r}$, где $I_{0r} = I_0 \cap B, I_{1r} = I_1 \cap B$, Γ_{1r} (соответственно Γ_{2r}) – часть окружности ∂B, лежащая между лучами I_0 и I_1 сверху (соответственно, снизу); аналогично: $\partial D_2 = I_{0r} \cup \Gamma_{2r} \cup I_{1r} \cup [0,1]$. Пусть $f_1(z) = f(z)$ на $\overline{D_1} \setminus [0,1], f_1(x) = f(x+)$ при $x \in (0,1)$, аналогично $f_2(z) = f(z)$ в $\overline{D_2} \setminus [0,1], f_2(x) = f(x-)$ на $(0,1)$. Будем считать, что $-2 \in D_1$, т.е. I_0 лежит в 3-м квадранте.

По теореме Коши о вычетах (вообще говоря, в формулировке для (vp) - интегралов), где надо использовать свойства

$$\operatorname*{res}_{(a,D_1)} f_1 = \operatorname*{res}_{(b,D_1)} f_1 = \operatorname*{res}_{(a,D_2)} f_2 = \operatorname*{res}_{(b,D_2)} f_2 = 0\,,$$

имеем:

$$J_1 = \int\limits_{\partial^+ D_1} f_1(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{-2} f_1 = 2\pi i \operatorname*{res}_{-2} f,\ J_2 = \int\limits_{\partial^+ D_2} f_2(z)dz = 2\pi i \cdot 0 = 0\,.$$

Пусть J - исходный интеграл, тогда

$$J_1 + J_2 = \int\limits_{\Gamma_{1r}^+} f_1(z)dz + \int\limits_{\Gamma_{2r}^+} f_2(z)dz + \int\limits_0^1 f(x+)dx - \int\limits_0^1 f(x-)dx =$$

$$= \int\limits_{\partial^+ B} f(z)dz + e^{2\pi i/3} J - e^{-2\pi i/3} J = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f + 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cdot J = 2\pi i \operatorname*{res}_{-2} f,$$

откуда $J = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}}(\operatorname*{res}_{-2} f + \operatorname*{res}_{\infty} f)$.

Чтобы найти $\operatorname*{res}_{-2} f$ учтем, что в D_1 выполнено равенство

$$f_1(z) = z_{(*)}^{1/3}(z-1)_{(*)}^{2/3}(z+2)^{-2}\,,$$

где $(z-z_0)_{(*)}^p = (z-z_0)^p_{(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} = \exp(p \ln_{(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}(z-z_0))$, то есть разрез идет строго вниз. Тогда

$$\operatorname*{res}_{-2} f = \lim_{z\to -2}\Big(z_{(*)}^{1/3}(z-1)_{(*)}^{2/3}\Big)' = \frac{1}{3}(-2)_{(*)}^{-2/3}(-3)_{(*)}^{2/3} + (-2)_{(*)}^{1/3}\frac{2}{3}(-3)_{(*)}^{-1/3} =$$

$$= 2^{-2/3}3^{-1/3}e^{-2\pi i/3}e^{2\pi i/3} + 2^{4/3}3^{-4/3}e^{\pi i/3}e^{-\pi i/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt[3]{\frac{16}{81}}.$$

Поскольку $g(z) = z + \overline{\overline{o}}(z)$ при $z \to \infty$ (это, очевидно, так при $z \in (1,+\infty)$), имеем: $f(z) = \frac{z+\overline{\overline{o}}(z)}{(z+2)^2} = \frac{1}{z} + \overline{\overline{o}}(\frac{1}{z})$, откуда $\operatorname*{res}_{\infty} f = -1$. Таким образом,

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt[3]{\frac{16}{81}} - 1\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{7}{6}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 1\Big)\,.$$

Упражнение 14.1. *В общем случае* следует брать $g(z) = (z-a)_{(o)}^p (z-b)_{(o)}^q$. Доказать, что g продолжается голоморфно на $\mathbb{C}\backslash[a,b]$. При $a=0$ найти разложение Лорана функции g в проколотой окрестности точки ∞ по степеням z (ясно, что $g(z) = z^{p+q}(1-b/z)_{(o)}^q$ при $|z| > b$, поскольку это так на $(b,+\infty)$).

Задача 14.1. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}{x^2+1}dx$ (взять $I_0 = (-\infty,0), I_1 = (1,+\infty)$).

Задача 14.2. Вычислить $\int\limits_{-1}^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{x\,dx}{x+2}$.

Задача 14.3. Вычислить (нашим способом!) значение

$$B(\frac{7}{5},\frac{8}{5}) = \int\limits_0^1 x^{2/5}(1-x)^{3/5}dx\,.$$