

Оглавление

1. Лекция 1. Арифметика и топология поля \mathbb{C} . Предел и непрерывность. Экспонента и логарифм.	3
2. Лекция 2. Связность. Теорема Жордана. Стереографическая проекция. Односвязная область. Оболочка компакта.	8
3. Лекция 3. Комплексная производная. Производная сложной и обратной функции. \mathbb{C} - и \mathbb{R} -дифференцируемость. Теорема Коши - Римана. Свойства производных. Производная по направлению. Голоморфность в точке и области.	13
4. Лекция 4. Конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства.	18
5. Лекция 5. Группы ДЛО-автоморфизмов B_1 , \mathbb{P}_+ , \mathbb{C} . Функция Жуковского. Тригонометрические функции. Многозначные функции и их однозначные ветви.	23
6. Лекция 6. Непрерывная ветвь m -функции $\text{Arg}(z)$ вдоль пути. Индекс пути относительно точки. Эквивалентные пути. Действия с кривыми. Спряжляемые пути и кривые. Интеграл вдоль кривой по комплексной переменной	29
7. Лекция 7. Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути. Лемма Гурса. Лемма о приближении. Теорема Коши для односвязной области.	34
8. Лекция 8. Существование первообразной в односвязной области. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная теорема Коши для допустимых областей.	39
9. Лекция 9. Доказательство ИТК для простых областей. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Формула Коши для производных. Теорема Морера. Теорема Вейерштрасса.	44
10. Лекция 10. Степенные ряды. Теорема Коши-Тейлора и её следствия. Теорема о нулях и теорема единственности для голоморфной функции.	49
11. Лекция 11. Обобщенные степенные ряды. Теорема Лорана. Классификация изолированных особых точек (ИОТ) голоморфных функций. Связь рядов Лорана с рядами Фурье.	54
12. Лекция 12. Лемма Шварца и её следствие. Пространства Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$ и пространство $\mathcal{A}(D)$. ИОТ ∞ . Вычеты в ИОТ. Теорема Коши о вычетах. Примеры вычисления интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах.	59
13. Лекция 13. Примеры вычисления интегралов. Лемма Жордана и преобразование Фурье рациональных функций. Специальные области и функция Шварца.	64

14. Лекция 14. Интеграл в смысле главного значения. Вычет функции в точке относительно области. Теорема о вычетах для $(vp) \int$. Примеры вычисления $(vp) \int$. 68
15. Лекция 15. Гармонические функции двух переменных. Базовые свойства. Задача Дирихле. Разложение в ряд по однородным гармоническим полиномам. 72

1. Лекция 1. Арифметика и топология поля \mathbb{C} . Предел и непрерывность. Экспонента и логарифм.

Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Поле комплексных чисел* называется множество

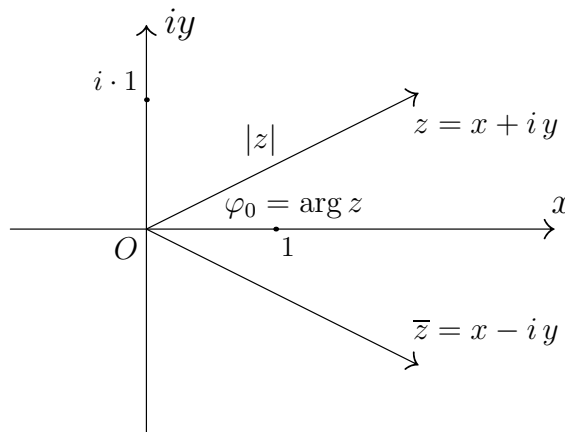
$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i - \text{символ} \}$$

с операциями

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned}$$

где $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$.

Выражение $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа z ; $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = y$ — его *действительной* и *мнимой частями* соответственно.



УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Проверить, что \mathbb{C} — поле (9 аксиом), нулем и единицей в котором являются $0 = 0 + i \cdot 0$ и $1 = 1 + i \cdot 0$ соответственно. Подполе $\{ x + i \cdot 0 \mid x \in \mathbb{R} \}$ изоморфно \mathbb{R} (далее они отождествляются), $i^2 = -1$.

Указание: ассоциативность умножения удобнее проверять в тригонометрической форме, которая будет определена ниже.

Важно понимать, что

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если $z = x + iy$, то его *комплексно сопряженным* называется число $\bar{z} = x - iy$, а его *модулем* — число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

При $z \neq 0$ обратный элемент к z вычисляется по формуле

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Множество комплексных чисел интерпретируется как совокупность точек (или их радиус-векторов) декартовой плоскости Oxy . При этом отображение $z \mapsto \bar{z}$ – это симметрия относительно оси Ox .

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Каков геометрический смысл отображения $z \mapsto iz$?

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Полярным радиусом* числа $z = x + iy$ называется его модуль: $r = |z|$.

Если $z \neq 0$, то существует единственное $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$ с условиями $x = r \cos(\varphi_0)$, $y = r \sin(\varphi_0)$. Это φ_0 называется *главным значением (полярного) аргумента* z и обозначается $\varphi_0 = \arg(z)$. Отметим, что углы у нас всегда измеряются в радианах. *Совокупным (полярным) аргументом* числа z называется множество

$$\text{Arg}(z) = \{ \varphi_0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Если $\varphi \in \text{Arg } z$, то $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Последнее выражение называется *тригонометрической формой* числа z (при $\varphi = \varphi_0$ – *основной тригонометрической формой*).

Элементарно проверяется, что при $\varphi_{1,2} \in \text{Arg}(z_{1,2})$, $r_{1,2} = |z_{1,2}|$ справедливо равенство

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отсюда следует *формула Муавра*: если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$, то

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

ПРИМЕР 1.1. Вычислим $(1 - i)^{15}$.

$$(1 - i)^{15} = \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \right)^{15} = 2^{\frac{15}{2}} \left(\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right) \right) = 2^7 (1 + i).$$

Извлечение корней из комплексных чисел.

Пусть $n \in \{2, 3, \dots\}$. По определению, $w \in \sqrt[n]{z} \iff w^n = z$.

Ясно, что $\sqrt[n]{0} = \{0\}$. Из (1.1) следует, что при $z \neq 0$ совокупность $\sqrt[n]{z}$ состоит из n элементов $\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$, находящихся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) \right), \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Элемент w_0 называется *главным (основным) значением* $\sqrt[n]{z}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Доказать, что в последних обозначениях

$$w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = 0.$$

Следующие теоремы известны из курса алгебры.

ТЕОРЕМА 1.1. (*Основная теорема алгебры*). *Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, т.е. всякий многочлен $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, имеет корень в \mathbb{C} .*

ТЕОРЕМА 1.2. (*Частный случай теоремы Фробениуса*). *Пусть \mathbb{P} – поле, содержащее \mathbb{C} , причем $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P} < \infty$. Тогда $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.*

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Привести пример какого-либо бесконечномерного поля \mathbb{P} над \mathbb{C} .

Топология (метрика) в \mathbb{C} .

В \mathbb{C} вводится метрика $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ (как в \mathbb{R}^2). Через $B(a, r)$ обозначается *открытый* круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$.

Предполагаются известными определения *открытых, замкнутых, ограниченных, компактных, связных* множеств в произвольном метрическом пространстве (в частности, в \mathbb{R}^2). Тем не менее, ряд основных понятий мы напомним.

Предел последовательности в (\mathbb{C}, d) . Экспонента.

Пусть $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Говорят, что *число a является пределом последовательности $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ при $n \rightarrow +\infty$* , и пишут

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n,$$

если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon$ имеем $d(z_n, a) < \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Пусть $z_n = x_n + i y_n$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \operatorname{Re} a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \operatorname{Im} a \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.

(2) При $a \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = |a|, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arg}(z_n) = \operatorname{Arg}(a) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Последнее равенство понимается так. Найдутся $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$ и $\varphi_0 \in \operatorname{Arg}(a)$ такие, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \varphi_0$.

Рассмотрим пример. *Фиксируем* произвольное $z \in \mathbb{C}$. Определим

$$e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

т.е. докажем, что данный предел существует, и обозначим его через e^z . Считаем стандартные свойства функции e^x , $x \in \mathbb{R}$, известными.

Пусть, как всегда, $z = x + i y$. Тогда

$$\left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right) + i \frac{y}{n}\right|^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{2x}{n}\right)\right),$$

откуда, ввиду известного соотношения $\ln(1+t) \sim t$ при $t \rightarrow 0$ ($t \in \mathbb{R}$), находим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = e^x.$$

Найдем теперь предел (полярного) аргумента последовательности $w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (по $\pmod{2\pi}$). Если $n \gg 1$, то $|z/n| < 1$, поэтому $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ находится в правой полуплоскости и справедливо равенство

$$\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \sim \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Из формулы Муавра получаем, что предел последовательности $\operatorname{Arg}(w_n) \sim y/(1+x/n)$ (по $\pmod{2\pi}$) существует и

$$y \in \operatorname{Arg}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right).$$

Итак,

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y) =: e^z.$$

В частности, если $x = 0$, то $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Например,

$$e^{2\pi i} = 1. \quad (1.2)$$

Кроме того, из тригонометрической формы комплексных чисел, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем *показательную форму* записи комплексных чисел: $z = r e^{i\varphi}$.

Пусть теперь $z_j = x_j + i y_j$, $j \in \{1, 2\}$. Тогда, по доказанному,

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = e^{x_1+x_2} ((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i (\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)) = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (1.3)$$

Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Число $2\pi i$ называется *основным периодом экспоненты*.

Предел функции. Непрерывность. Классы $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$.

В дальнейшем через $B'(z_0, r)$ обозначается проколота r -окрестность точки z_0 , т.е. $B'(z_0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \emptyset$, z_0 – предельная точка E (т.е. в любой проколота окрестности точки z_0 есть точка из E) и пусть $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая функция. Говорят, что f имеет предел $A \in \mathbb{C}$ при z стремящемся к z_0 (по E), и пишут

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} f(z) = A, \quad (1.4)$$

если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall z \in B'(z_0, \delta) \cap E$ имеем $f(z) \in B(A, \varepsilon)$.

Если E содержит некоторую проколота окрестность точки z_0 , то строка $z \in E$ в записи (1.4) опускается.

Функция f называется *непрерывной в точке $z_0 \in E$ (по E)*, если $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} f(z) = f(z_0)$ (когда z_0 – предельная точка E), либо z_0 – изолированная точка в E .

Функция f называется *непрерывной на множестве $E_1 \subset E$ (по E)*, если она непрерывна в каждой точке этого множества (по E).

Напомним, что через $o(1)$ (при $z \rightarrow z_0$) обозначается класс всех функций h , определенных в (каждая h в своей) проколота окрестности точки z_0 и удовлетворяющих условию $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$.

Если функция g определена в некоторой проколота окрестности точки z_0 , то через $o(g(z))$ (или $o(g)$ при $z \rightarrow z_0$) обозначается класс функций $g(z)o(1)$ (при $z \rightarrow z_0$).

Есть надежда, что читатели сами легко вспомнят определения классов $O(1)$ и $O(g)$ (при $z \rightarrow z_0$).

В качестве примера работы с классами $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ покажем, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Пусть, как всегда, $z = x + i y$. Тогда $z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$, откуда

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = (1 + x + o(x)) \cdot (1 + i y + o(y)) = 1 + z + o(z), \quad z \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Следовательно, $(e^z - 1)/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, что и требовалось.

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Доказать:

$$(1) o(x) \not\subset o(z), o(y) \not\subset o(z), z \rightarrow 0; \quad (2) o(z) = o(\bar{z}) = o(|z|), z \rightarrow 0.$$

Экспонента и логарифм.

Как обычно, полагаем $z = x + iy$ и $w = u + iv$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $-\infty < \alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi < +\infty$. Определим, куда переходит горизонтальная полоса $\Pi_{(\alpha, \beta)} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \text{Im } z < \beta\}$ под действием отображения $w = e^z$.

Сначала посмотрим куда перейдет горизонтальная прямая $z_1(t) = t + iy_0$, $t \in \mathbb{R}$ ($y_0 \in (\alpha, \beta)$ фиксировано):

$$w_1(t) = e^{z_1(t)} = e^{t+iy_0} = e^t \cdot e^{iy_0}, t \in \mathbb{R},$$

– (открытый) луч на плоскости w , выходящий из точки 0 под углом y_0 (в радианах) к оси Ox .

Пусть теперь $z_2(t) = x_0 + it$, $t \in (\alpha, \beta)$, – вертикальный интервал полосы $\Pi_{(\alpha, \beta)}$. Тогда

$$w_2(t) = e^{z_2(t)} = e^{x_0} \cdot e^{it}, t \in (\alpha, \beta),$$

– дуга окружности радиуса e^{x_0} с центром в точке 0 на плоскости w , проходящая между лучами $\{w \in \mathbb{C} : \alpha \in \text{Arg } w\}$ и $\{w \in \mathbb{C} : \beta \in \text{Arg } w\}$.

Таким образом, $\Pi_{(\alpha, \beta)}$ под действием экспоненты переходит в угол $V_{(\alpha, \beta)} = \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha < \arg w < \beta\}$ (здесь берется конкретная однозначная ветвь $\arg w_{(\alpha, \beta)}$ функции $\text{Arg } w$, удовлетворяющая указанным условиям).

Нетрудно видеть, что экспонента является гомеоморфизмом $\Pi_{(\alpha, \beta)}$ на $V_{(\alpha, \beta)}$. Обратное к этому отображение обозначается так: $z = \underset{(\alpha, \beta)}{\ln} w$.

Определим теперь *многозначную* функцию $\text{Ln}(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. $w \in \text{Ln } z \Leftrightarrow z = e^w$ (ясно, что $z \neq 0$).

Представим z в основной тригонометрической форме: $z = re^{i\varphi_0}$. Поскольку $z = e^w = e^u \cdot e^{iv}$, получаем, что $u = \ln r$, $v = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (проверить!). Таким образом,

$$\text{Ln}(z) = \{ \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z} \}, z \neq 0.$$

Основной ветвью логарифма называется функция $\ln(z) = \ln |z| + i \arg z$, $z \neq 0$. Слева в последнем равенстве \ln обозначает определяемую здесь функцию *комплексной переменной* z , справа – уже известную логарифмическую функцию положительного аргумента. Нетрудно видеть, что $\ln(z) = \underset{(-\pi, \pi)}{\ln}(z)$ на $V_{(-\pi, \pi)}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Доказать, что при $-\infty < \alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi/n < +\infty$ отображение $w = z^n$ является гомеоморфизмом угла $V_{(\alpha, \beta)}$ на угол $V_{(n\alpha, n\beta)}$. Обратное к нему отображение обозначается следующим образом:

$$z = \underset{(n\alpha, n\beta)}{\sqrt[n]{w}} = \exp\left(\frac{1}{n} \underset{(n\alpha, n\beta)}{\ln}(w)\right).$$

В частности, $\underset{(-\pi, \pi)}{\sqrt[n]{w}} = \underset{(0)}{\sqrt[n]{w}}$ на $V_{(-\pi, \pi)}$. Каково множество точек разрыва функции

$\underset{(0)}{\sqrt[n]{z}}$ в \mathbb{C} ?

2. Лекция 2. Связность. Теорема Жордана. Стереографическая проекция. Односвязная область. Оболочка компакта.

Связные множества.

Пусть (T, τ) – топологическое пространство (τ – система всех открытых подмножеств в T с известным набором свойств).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $X \subset T$ и существуют $U_1, U_2 \in \tau$ со следующими свойствами:

$$(1) : U_1 \cap X \neq \emptyset; (2) : U_2 \cap X \neq \emptyset; (3) : U_1 \cap U_2 = \emptyset; (4) : X \subset U_1 \cup U_2.$$

Тогда множества U_1 и U_2 называются *разделяющими* (для X), а множество X называется *несвязным* в (T, τ) . Если для $X \neq \emptyset$ не существует разделяющих множеств, то X называется *связным* в (T, τ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $X \subset T$. Подмножество $X_1 \subset X$ называется *связной компонентой* множества X , если X_1 связно и не существует связного множества X_2 со свойством $X_1 \subsetneq X_2 \subseteq X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Областью* в \mathbb{C} называется всякое (непустое) открытое связное множество в \mathbb{C} .

При $E \subset \mathbb{C}$ через ∂E обозначается *граница* множества E в \mathbb{C} , а через \bar{E} – *замыкание* множества E в \mathbb{C} .

Пути и кривые в \mathbb{C} . Теорема Жордана.

Пусть (T, τ) – топологическое пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, и пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow (T, \tau)$ – непрерывное отображение. Тогда γ называется *путем* в (T, τ) , а множество $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta])$ – его *носителем*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Множество $X \subset T$, $X \neq \emptyset$, называется *линейно связным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существует путь $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow (T, \tau)$, $[\gamma] \subset X$, с условием $\gamma(\alpha) = x_1$, $\gamma(\beta) = x_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Доказать эквивалентность понятий связности и линейной связности для открытых множеств в \mathbb{C} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *жордановым*, если он взаимно однозначен на $[\alpha, \beta]$ (т.е. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$).

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *замкнутым жордановым*, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при всех $\alpha \leq t_1 < t_2 < \beta$, но $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

ТЕОРЕМА 2.1. (Жордана). Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь в \mathbb{C} с носителем $S = \gamma([\alpha, \beta])$. Обозначим $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$.

- (1) Если γ – жорданов путь, то Ω связно и $\partial \Omega = S$.
- (2) Если γ – замкнутый жорданов путь, то Ω состоит ровно из двух непересекающихся компонент (областей): ограниченной (D_γ) и неограниченной (Ω_γ), причем $\partial D_\gamma = \partial \Omega_\gamma = S$.

В программу экзамена включается доказательство этой теоремы для случая произвольной замкнутой жордановой ломаной (см. СК, лекция 2).

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Привести пример двух непересекающихся ограниченных областей D_1 и D_2 в \mathbb{C} с условием $\partial D_1 = \partial D_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть (T, τ) – хаусдорфово локально-компактное топологическое пространство. Его *одноточечной компактификацией* (по Александрову) называется топологическое пространство (T^\sharp, τ^\sharp) , где ∞ – символ ($\infty \notin T$),

$$T^\sharp = T \sqcup \{\infty\}, \quad \tau^\sharp = \tau \sqcup \{T^\sharp \setminus K\}_{K \in \mathcal{K}},$$

где \mathcal{K} – совокупность всех компактных подмножеств в (T, τ) .

При этом (T^\sharp, τ^\sharp) компактно и хаусдорфово, а вложение (T, τ) в (T^\sharp, τ^\sharp) непрерывно.

Одноточечная компактификация комплексной плоскости \mathbb{C} (с её стандартной топологией) называется *расширенной комплексной плоскостью* (часто обозначаемой $\overline{\mathbb{C}}$, но мы придерживаемся обозначения \mathbb{C}^\sharp).

Сферическая метрика на \mathbb{C}^\sharp . Стереографическая проекция.

Ранее на комплексной плоскости была введена евклидова метрика:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Определим *сферическую метрику* на $\mathbb{C}^\sharp = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$:

$$d^\sharp(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \sqrt{1+|z_2|^2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \\ 0, & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Из предложения 2.1 будет следовать, что $d^\sharp(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет аксиомам метрики, причем топология, задаваемая этой метрикой, является топологией одноточечной компактификации плоскости \mathbb{C} .

Рассмотрим в $\mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$ сферу Σ с радиусом $1/2$ и центром в точке $(0, 0, 1/2)$ и отождествим $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ с подпространством $\mathbb{R}_{(\xi, \eta)}^2 \subset \mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$. Введем обозначения $O = (0, 0, 0)$, $N = (0, 0, 1)$.

Любой точке $M = (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus N$ можно сопоставить точку $z = z_M$ комплексной плоскости $\mathbb{C}_z = \mathbb{R}_{(x, y)}^2$, продолжив луч NM до пересечения с последней.

Отображение $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^\sharp$, заданное по правилу

$$\sigma(M) = \begin{cases} z_M, & M \neq N \\ \infty, & M = N \end{cases}$$

называется *стереографической проекцией*. Легко видеть, что оно взаимно однозначно. Будем обозначать $M_z = \sigma^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; $N = \sigma^{-1}(\infty)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Вывести формулы стереографической проекции:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}; \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}; \quad \xi = \frac{x}{1 + |z|^2}; \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}; \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2},$$

пользуясь коллинеарностью векторов \overrightarrow{NM} и $\overrightarrow{Nz_M}$ и уравнением сферы Σ . В данном случае $M_z = (\xi, \eta, \zeta)$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если $\rho(A, B)$ – евклидово расстояние (в $\mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$) между точками A и B , то во введенных выше обозначениях имеем:

$$d^\sharp(z_1, z_2) = \rho(M_{z_1}, M_{z_2}).$$

Таким образом, $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^\sharp$ – изометрия (Σ, ρ) и $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$. Поскольку (Σ, ρ) – компактное метрическое пространство, $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$ – тоже компактно. Поэтому $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$ (расширенную плоскость) часто называют *сферой Римана*.

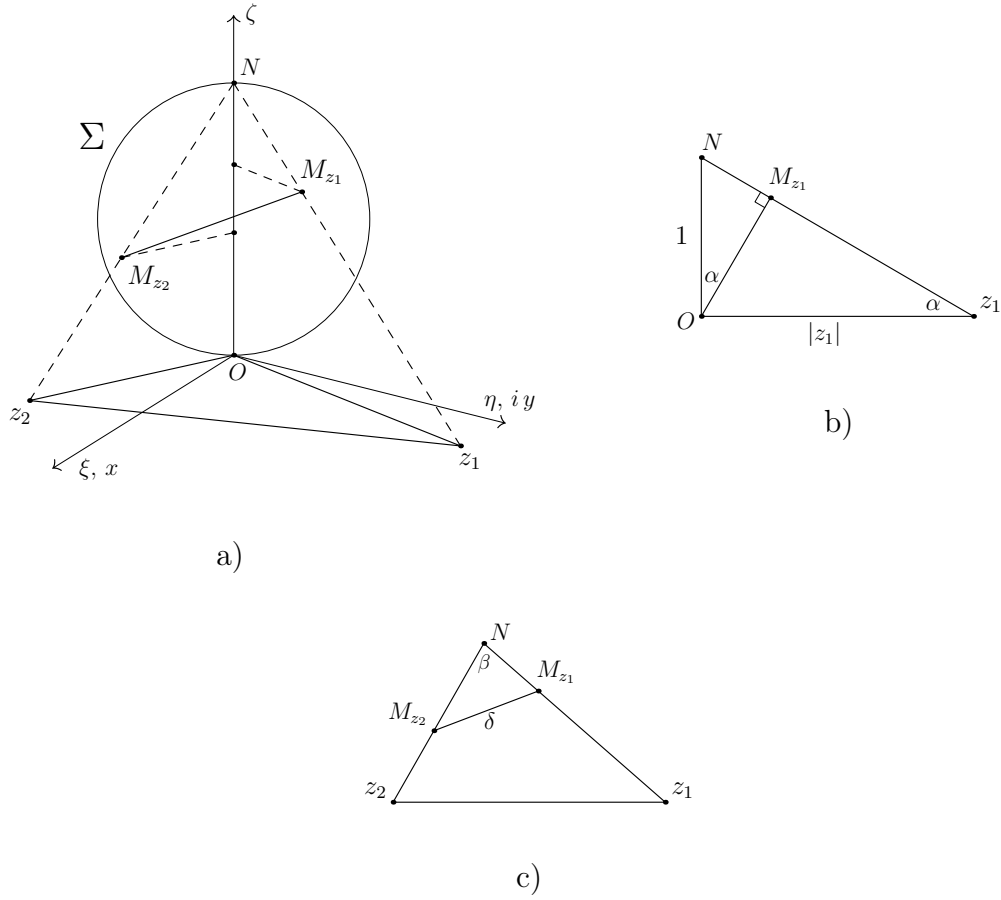


РИС. 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обсудим случай конечных z_1 и z_2 . Рассмотрим плоскость, проходящую через точки O, N, z_1 . Она пересекает σ по окружности с диаметром $ON = 1$, причем M_{z_1} лежит на этой окружности, откуда $\angle NM_{z_1}O = \pi/2$ (см. рис. 2.1 б)). Следовательно, $\Delta M_{z_1}NO \sim \Delta ONz_1$, откуда

$$\frac{NM_{z_1}}{NO} = \frac{NO}{Nz_1} \Rightarrow NM_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}. \quad (2.1)$$

Аналогично,

$$NM_{z_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^2}}. \quad (2.2)$$

Обозначим $\delta = \rho(M_{z_1}, M_{z_2})$ и воспользуемся теоремой косинусов в $\Delta M_{z_1}M_{z_2}N$ и в Δz_1z_2N (см. рис. 2.1 с)):

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (NM_{z_1})^2 + (NM_{z_2})^2 - 2NM_{z_1} \cdot NM_{z_2} \cos \beta, \\ \cos \beta &= \frac{|z_1 - z_2|^2 - (Nz_1)^2 - (Nz_2)^2}{-2Nz_1 \cdot Nz_2}. \end{aligned}$$

Подставив второе равенство в первое, с учетом (2.1) и (2.2) получаем $\delta^2 =$

$$= \frac{1}{1 + |z_1|^2} + \frac{1}{1 + |z_2|^2} + \frac{|z_1 - z_2|^2 - (1 + |z_1|^2) - (1 + |z_2|^2)}{(1 + |z_1|^2) \cdot (1 + |z_2|^2)} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 + |z_1|^2) \cdot (1 + |z_2|^2)}.$$

Что и требовалось. Случаи бесконечных z_1 или z_2 устанавливаются предельным переходом. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Метрики d и d^\sharp мажорируют друг друга на любом круге конечного радиуса в \mathbb{C} . Отсюда следует, что все понятия, определяемые в терминах окрестностей (например, открытые множества, пределы последовательностей и функций), совпадают в (\mathbb{C}, d) и в (\mathbb{C}, d^\sharp) .

Действительно, для z_1 и z_2 из некоторого круга $B(0, R)$, $R \in (0, +\infty)$, имеем $\sqrt{1 + |z_1|^2}, \sqrt{1 + |z_2|^2} \in [1, \sqrt{1 + R^2})$, откуда $(\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2})^{-1} \in [1/(1 + R^2), 1]$. Следовательно,

$$\frac{d(z_1, z_2)}{1 + R^2} \leq d^\sharp(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Доказать, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана переходят в обобщенные окружности в \mathbb{C}^\sharp (круговое свойство стереографической проекции).

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Доказать свойство сохранения (абсолютных величин) углов между (обобщенными) окружностями при стереографической проекции.

Односвязные области в \mathbb{C} .

Для $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $E_c = \mathbb{C} \setminus E$ – дополнение (complement) множества E в \mathbb{C} , а через ∂E – границу E в (\mathbb{C}, d) .

Аналогично, для $E \subset \mathbb{C}^\sharp$ пусть $E_c^\sharp = \mathbb{C}^\sharp \setminus E$ – дополнение множества E в \mathbb{C}^\sharp и $\partial^\sharp E$ – граница E в $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$.

Так, при $E \subset \mathbb{C}$, если E ограничено, то $\partial^\sharp E = \partial E$; если E не ограничено, то $\partial^\sharp E = \partial E \sqcup \{\infty\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *односвязной*, если D_c^\sharp связно в $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$.

Рассмотрим несколько примеров.

- (1) Пусть D – произвольная звездная область в \mathbb{C} (т.е. найдется точка $z_0 \in D$ такая, что для любой точки $z \in D$ отрезок $[z_0, z]$ целиком лежит в D). Тогда D_c^\sharp является линейно связным множеством (а, значит, и связным) в \mathbb{C}^\sharp . Следовательно, D – односвязная область.
- (2) В частности, пусть $D = \Pi_{(\alpha, \beta)} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \text{Im } z < \beta\}$ – полоса (звездна относительно любой своей точки, как и любая выпуклая область в \mathbb{C}). По предыдущему примеру, она односвязна. В то же время D_c не связно в (\mathbb{C}, d) .
- (3) Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $D_c^\sharp = \{0\} \sqcup \{\infty\}$ – не связное множество в $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$, значит D не односвязна. (Заметим, однако, что $D_c = \{0\}$ связно в (\mathbb{C}, d) .)

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Если D область в \mathbb{C} и $\partial^\sharp D$ связно в $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$, то и D_c^\sharp связно в $(\mathbb{C}^\sharp, d^\sharp)$, т.е. D – односвязная область.

Обратное тоже верно, но доказывается гораздо сложнее. Мы установим этот факт в следующем семестре, пока он нам не потребуется. Мы также установим, что область D в \mathbb{C} односвязна, если и только если она гомеоморфна кругу.

Оболочка компакта.

Пусть K – компакт в \mathbb{C} (т.е. замкнутое ограниченное множество).

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Множество $\mathbb{C} \setminus K$ распадается на не более чем счетное множество непересекающихся областей (связных компонент), причем среди них есть ровно одна неограниченная.

Пусть D_1, D_2, \dots – ограниченные компоненты $\mathbb{C} \setminus K$ (если такие есть), Ω – неограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus K$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. $\partial D_j \subset K, \partial \Omega \subset K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Множество $\widehat{K} = K \sqcup \sqcup_{\{j \geq 1\}} D_j = \mathbb{C} \setminus \Omega$ (если ограниченные компоненты D_j отсутствуют, то $\widehat{K} = K$) называется (топологической, полиномиальной) *оболочкой* компакта K в \mathbb{C} .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , K – компакт в \mathbb{C} . Если $K \subset D$, то $\widehat{K} \subset D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ограниченные компоненты $\mathbb{C} \setminus K$ отсутствуют, то $\widehat{K} = K \subset D$ и все доказано. В противном случае положим $U_1 = \bigcup_{\{j \geq 1\}} D_j$ – (ограниченное) непустое открытое множество в \mathbb{C} , и, значит, в $(\mathbb{C}^\#, d^\#)$. Множество $U_2 = \Omega \cup \{\infty\}$ – тоже непустое открытое множество в $(\mathbb{C}^\#, d^\#)$, причем $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Ясно, что $U_1 \sqcup U_2 = \mathbb{C}^\# \setminus K$.

Пусть, от противного, $\widehat{K} = K \cup U_1 \not\subset D$, откуда $U_1 \not\subset D$ и, следовательно, $U_1 \cap D_c^\# \neq \emptyset$. С другой стороны, $\infty \in U_2 \cap D_c^\# \neq \emptyset$ и $D_c^\# \subset U_1 \sqcup U_2$. Получаем, что множество $D_c^\#$ – несвязно. Противоречие. \square

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , $S = [\gamma]$ – носитель замкнутого жорданова пути γ , $S \subset D$. Пусть D_γ – ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus S$ (см. теорему Жордана). Тогда $D_\gamma \sqcup [\gamma] = \widehat{S} \subset D$, т.е. $D_\gamma \subset D$.

3. Лекция 3. Комплексная производная. Производная сложной и обратной функции. \mathbb{C} - и \mathbb{R} -дифференцируемость. Теорема Коши - Римана. Свойства производных. Производная по направлению. Голоморфность в точке и области.

Комплексная производная. \mathbb{C} -дифференцируемость в точке. Производная сложной и обратной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть (комплекснозначная) функция f определена в некоторой окрестности точки z_0 . Если существует конечный $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то он называется *комплексной производной функции f в точке z_0* и обозначается $f'(z_0)$. Функция f в этом случае называется *\mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0* , и для нее справедливо представление

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \Delta z \rightarrow 0.$$

В качестве примера покажем, что $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ имеем $(e^z)'|_{z_0} = e^{z_0}$. Иными словами, $(e^z)' = e^z$. Действительно:

$$(e^z)'|_{z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{z_0 + \Delta z} - e^{z_0}}{\Delta z} = e^{z_0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = e^{z_0}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. (О комплексной производной сложной функции). Пусть функция g имеет комплексную производную в точке z_0 , f имеет комплексную производную в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда

$$f(g(z))'|_{z_0} = f'(w_0)g'(z_0). \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу \mathbb{C} -дифференцируемости функций g и f в точках z_0 и w_0 соответственно, в некоторой окрестности точки 0 переменных $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = w - w_0$ имеем:

$$\Delta g|_{z_0}(\Delta z) := g(z_0 + \Delta z) - g(z_0) = g'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \Delta z \rightarrow 0,$$

$$\Delta f|_{w_0}(\Delta w) := f(w_0 + \Delta w) - f(w_0) = f'(w_0)\Delta w + o(\Delta w), \Delta w \rightarrow 0.$$

Подставляя $\Delta w = \Delta g|_{z_0}(\Delta z)$ в последнее равенство, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta f(g)|_{z_0}(\Delta z) &= f(g(z_0 + \Delta z)) - f(g(z_0)) = f'(w_0)(g'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)) + o(\Delta g|_{z_0}(\Delta z)) = \\ &= f'(w_0)g'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \Delta z \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что и означает справедливость (3.1). □

ТЕОРЕМА 3.2. (О производной обратной функции). Пусть функция f гомеоморфно отображает некоторую окрестность $U(z_0)$ точки z_0 на некоторую окрестность $V(w_0)$ точки w_0 в \mathbb{C} , и пусть $g : V(w_0) \rightarrow U(z_0)$ – обратная к f функция.

Если существует $f'(z_0) \neq 0$, то существует $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\Delta w \neq 0$ такого, что $w_0 + \Delta w \in V(w_0)$, положим $\Delta z = g(w_0 + \Delta w) - g(w_0)$. Тогда $\Delta z \neq 0$, $z_0 + \Delta z \in U(z_0)$, причем Δw и Δz стремятся к 0 одновременно. Следовательно (провести детальное доказательство центрального равенства!),

$$g'(w_0) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{g(w_0 + \Delta w) - g(w_0)}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

□

ПРИМЕР 3.1. (Использование теоремы о производной обратной функции). В указанных выше обозначениях, пусть $z_0 \in \Pi_{(\alpha,\beta)}$, $w_0 = e^{z_0} \in V_{(\alpha,\beta)}$. Тогда

$$\left(\ln w \right)'_{(\alpha,\beta)} \Big|_{w_0} = \frac{1}{(e^z)' \Big|_{z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Иными словами, $\left(\ln z \right)'_{(\alpha,\beta)} = 1/z$, $z \in V_{(\alpha,\beta)}$.

Фиксируем произвольное $n \in \{2, 3, \dots\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Доказать, что для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $(z^n)' \Big|_{z=z_0} = nz_0^{n-1}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Доказать, что

$$\left(\sqrt[n]{w} \right)'_{(n\alpha, n\beta)} = \frac{1}{nw} \sqrt[n]{w}, \quad w \in V_{(n\alpha, n\beta)}.$$

\mathbb{R} -дифференцируемость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Функция f , определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называется \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 , если найдутся комплексные постоянные A и B такие, что

$$\Delta f \Big|_{z_0}(\Delta z) := f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + B\overline{\Delta z} + o(\Delta z), \quad \Delta z \rightarrow 0.$$

В этих условиях A и B определены однозначно (проверить), и их обозначают через $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}$ соответственно. А выражение

$$df \Big|_{z_0}(\Delta z) := \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \overline{\Delta z}$$

называется *дифференциалом функции f в точке z_0 с приращением Δz* .

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим функцию $f(z) = \bar{z}^2$. Тогда

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (\overline{z_0 + \Delta z})^2 - \overline{z_0}^2 = 2\overline{z_0}\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|), \quad \Delta z \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} = 2\overline{z_0}$ для любого $z_0 \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Функция $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется \mathbb{C} -линейной, если для всех z_1, z_2 и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ имеем

$$L(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 L(z_1) + \lambda_2 L(z_2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Функция L является \mathbb{C} -линейной $\Leftrightarrow L(z) = \lambda z$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (\Leftarrow) очевидно. Докажем (\Rightarrow) . Положим $\lambda = L(1)$. Тогда в силу \mathbb{C} -линейности имеем $L(z) = L(z \cdot 1) = z \cdot L(1) = \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Функция $L_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется \mathbb{R} -линейной, если для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$L_1(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 L_1(z_1) + \lambda_2 L_1(z_2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Функция L_1 является \mathbb{R} -линейной \Leftrightarrow найдутся постоянные $a, b \in \mathbb{C}$ с условием $L_1(z) = az + b\bar{z}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение \Leftarrow очевидно.

Докажем \Rightarrow . Положим $p = L_1(1)$, $q = L_1(i)$. Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$ имеем:

$$L_1(z) = L_1(x + iy) = px + qy = p \frac{z + \bar{z}}{2} + q \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{p - qi}{2} z + \frac{p + qi}{2} \bar{z}.$$

□

Фактически установлено следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Справедливы утверждения:*

(1) две \mathbb{R} -линейные формы $L_j(z) = a_j z + b_j \bar{z}$, $j \in \{1, 2\}$, совпадают как функции от $z \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и одновременно $b_1 = b_2$ (т.е. по \mathbb{R} -линейной форме её коэффициенты a и b находятся однозначно);

(2) \mathbb{R} -линейная форма $L_1(z) = az + b\bar{z}$ является \mathbb{C} -линейной $\Leftrightarrow b = 0$;

(3) всякая \mathbb{R} -линейная форма $az + b\bar{z}$ представима в виде $px + qy$ ($z = x + iy$), где постоянные $p, q \in \mathbb{C}$ определены по a и b однозначно.

В частности, если f является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 , то $df|_{z_0}(\Delta z) = P\Delta x + Q\Delta y + o(\Delta z)$, $\Delta z \rightarrow 0$. Естественно обозначить $P = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0}$.

Найдем выражение A и B (т.е. $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Big|_{z_0}$) через P и Q и обратно:

$P\Delta x + Q\Delta y = A\Delta z + B\Delta \bar{z} = A(\Delta x + i\Delta y) + B(\Delta x - i\Delta y) = (A+B)\Delta x + i(A-B)\Delta y$, откуда $P = A + B$, $Q = i(A - B)$, т.е. $A = \frac{P-iQ}{2}$, $B = \frac{P+iQ}{2}$. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad (3.3)$$

в точке z_0 .

Далее, пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$). Ясно, что f является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$ функции u и v являются дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных. При этом (полагая $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$) имеем:

$$df|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0} \Delta y = (u'_x + iv'_x)|_{z_0} \Delta x + (u'_y + iv'_y)|_{z_0} \Delta y,$$

так что $\partial f/(\partial x) = u'_x + iv'_x$, $\partial f/(\partial y) = u'_y + iv'_y$,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u'_x + iv'_x + iu'_y - v'_y) = \frac{1}{2}(u'_x - v'_y) + \frac{i}{2}(v'_x + u'_y) \quad (3.4)$$

в точке z_0 .

ТЕОРЕМА 3.3. (Коши-Римана). Пусть функция f является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 . Тогда f является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0 если и только если выполнены следующие эквивалентные условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Big|_{z_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x|_{z_0} = v'_y|_{z_0} \\ u'_y|_{z_0} = -v'_x|_{z_0} \end{cases} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии \mathbb{R} -дифференцируемости в точке z_0 функция f является \mathbb{C} -дифференцируемой в этой точке если и только если её дифференциал

$$df|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Big|_{z_0} \overline{\Delta z}$$

является \mathbb{C} -линейной формой, что эквивалентно первому из условий в (3.5). Оно, в свою очередь, эквивалентно второму из условий в (3.5), ввиду равенства (3.4). \square

Заметим, что если функция f является \mathbb{R} -линейной в \mathbb{C} , то для каждой точки z_0 полное приращение $\Delta f|_{z_0}(\Delta z)$ функции f в точке z_0 совпадает с ее дифференциалом $df|_{z_0}(\Delta z)$ в этой точке. Так что $\Delta z = dz$, $\Delta \bar{z} = d\bar{z} = \overline{dz}$ и $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ для каждой точки z_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть функции f и g являются \mathbb{R} -дифференцируемыми в точке z_0 . Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) являются \mathbb{R} -дифференцируемыми в точке z_0 и справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \pm g)}{\partial z} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} \pm \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{z_0}; & \frac{\partial(f \pm g)}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \pm \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}; \\ \frac{\partial(fg)}{\partial z} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} g(z_0) + f(z_0) \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{z_0}; & \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} g(z_0) + f(z_0) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}. \\ \frac{\partial(f/g)}{\partial z} \Big|_{z_0} &= \frac{(\partial f/\partial z)|_{z_0} g(z_0) - f(z_0)(\partial g/\partial z)|_{z_0}}{g^2(z_0)}; \\ \frac{\partial(f/g)}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} &= \frac{(\partial f/\partial \bar{z})|_{z_0} g(z_0) - f(z_0)(\partial g/\partial \bar{z})|_{z_0}}{g^2(z_0)}. \end{aligned}$$

В частности, если f и g являются \mathbb{C} -дифференцируемыми в точке z_0 , то $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) являются \mathbb{C} -дифференцируемыми в точке z_0 и верны стандартные формулы для (комплексных) производных суммы, произведения и частного, например $(f \cdot g)'|_{z_0} = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$ и $(f/g)'|_{z_0} = (f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0))/g^2(z_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть функция $g(z)$ является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 , а функция $f(w)$ является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда сложная функция $f \circ g(z) = f(g(z))$ является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 и выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ g}{\partial z} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial f}{\partial w} \Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \Big|_{z_0}, \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial f}{\partial w} \Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}. \end{aligned}$$

В частности, если g является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0 и f является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке w_0 , то функция $f \circ g$ является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0 и $(f \circ g)'|_{z_0} = f'(w_0) \cdot g'(z_0)$, что было установлено в начале лекции.

Доказательства последних двух предложений остается в качестве упражнений на семинары и ДЗ.

Производная по направлению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть функция f является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 , $\theta \in (-\pi, \pi]$. Производной функции f в точке z_0 по направлению θ (точнее, по направлению $e^{i\theta}$) называется величина

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta} \Big|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \arg(\Delta z) = \theta}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Нетрудно найти формулу для указанной производной:

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta} \Big|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \arg(\Delta z) = \theta}} \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \overline{\Delta z} + o(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} e^{-2i\theta}$$

поскольку $\Delta z = |\Delta z|e^{i\theta}$, $\overline{\Delta z} = |\Delta z|e^{-i\theta} = \Delta z e^{-2i\theta}$ при $\arg(\Delta z) = \theta$.

При $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \neq 0$ множество всех производных по направлению $\left\{ \frac{\partial f}{\partial z_\theta} \Big|_{z_0} \right\}_{\theta \in (-\pi, \pi]}$ дважды пробегает окружность с радиусом $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \right|$ и центром в точке $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$. Поэтому очевидно, что \mathbb{R} -дифференцируемая в точке z_0 функция f является \mathbb{C} -дифференцируемой в этой точке, если и только если для всех $\theta \in (-\pi, \pi]$ имеем $\frac{\partial f}{\partial z_\theta} \Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$, т.е. все производные по направлению совпадают.

Ассоциированное отображение.

Пусть $z = x + iy$ и функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + i y_0$. Тогда в окрестности точки $(x_0, y_0)^t \in \mathbb{R}^2$ определено так называемое *ассоциированное отображение* $F: (x, y)^t \mapsto (u(x, y), v(x, y))^t$. Если вдруг f является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0 , то по теореме 3.3 в точке z_0 выполняются равенства $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, поэтому якобиан ассоциированного отображения в этой точке равен

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \Big|_{z_0} = (u_x v_y - v_x u_y) \Big|_{z_0} = (u_x^2 + v_x^2) \Big|_{z_0} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{z_0} \right|^2 = |f'(z_0)|^2.$$

Таким образом, квадрат модуля комплексной производной равен якобиану ассоциированного отображения в соответствующей точке. В частности, если якобиан ассоциированного отображения \mathbb{R} -дифференцируемой функции f в точке z_0 отрицателен, то функция f не может быть \mathbb{C} -дифференцируемой в этой точке.

Голоморфность в точке и области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть функция f определена и \mathbb{C} -дифференцируема в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда f называется *голоморфной в точке* z_0 (это свойство кратко записывается так: $f \in \mathcal{A}(z_0)$).

Если f определена и голоморфна в каждой точке некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ (т.е. функция f является \mathbb{C} -дифференцируемой в каждой точке области D), то f называется *голоморфной в области* D . Пространство всех функций, голоморфных в области D , обозначается через $\mathcal{A}(D)$.

Функции класса $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ называются *целыми*. Примеры целых функций: z^{10} , e^z , $\cos(z^2)$.

ПРИМЕР 3.3. Можно показать, что функция $f(z) = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$ всюду \mathbb{R} -дифференцируема, но \mathbb{C} -дифференцируема только в точке $z_0 = 0$. Следовательно, f не голоморфна ни в одной точке.

4. Лекция 4. Конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства.

Конформные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. \mathbb{R} -дифференцируемая в точке z_0 функция f называется *конформной в точке z_0* , если ее дифференциал в этой точке является композицией гомотетии (с положительным коэффициентом, с центром в нуле) и поворота (с центром в нуле), т.е.

$$df|_{z_0}(\Delta z) = ke^{i\alpha} \Delta z, \quad k > 0, \alpha \in (-\pi, \pi],$$

что эквивалентно условию наличия $f'(z_0) = ke^{i\alpha} \neq 0$.

Коэффициент гомотетии $k = |f'(z_0)|$ и угол поворота $\alpha = \arg(f'(z_0))$ – составляют *геометрический смысл* производной конформного отображения в точке z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть D – область в \mathbb{C} и функция f конформна в каждой точке $z_0 \in D$. В этом случае говорят, что f *локально конформна в области D* .

Функция f называется *конформной в области D* , если f локально конформна в D и взаимно-однозначна в D .

ПРИМЕР 4.1. (1) функция $f(z) = e^z$ локально конформна в \mathbb{C} , поскольку в любой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ существует отличная от 0 производная $f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0$; эта функция конформна, например, в любой полосе $\Pi_{(\alpha, \beta)}$, $-\infty < \alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi < +\infty$; полоса $\Pi_{(-\pi, \pi)}$ называется *стандартной областью конформности* экспоненты;

(2) функция $f(z) = z^n$, $n \in \{2, 3, \dots\}$, локально конформна в области $\mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, конформна в любом угле $V_{(\alpha, \beta)}$, $-\infty < \alpha < \beta \leq \alpha + \frac{2\pi}{n} < +\infty$; угол $V_{(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n})}$ называется *стандартной областью конформности* указанной функции.

Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Дробно-линейное отображение* – это функция вида

$$w = \Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доопределим ДЛО до отображения $\mathbb{C}^\# \rightarrow \mathbb{C}^\#$. При $c = 0$ положим $\Lambda(\infty) = \infty$. При $c \neq 0$ положим $\Lambda(\infty) = \frac{a}{c}$, $\Lambda(-\frac{d}{c}) = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Всякое ДЛО является гомеоморфизмом $\mathbb{C}^\# \rightarrow \mathbb{C}^\#$, причем обратное отображение – тоже ДЛО.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность ДЛО во всех точках, кроме $-d/c$ (при $c \neq 0$) и ∞ , очевидна. Непрерывность в последних точках следует из определения метрики в $\mathbb{C}^\#$. Кроме того, непосредственно проверяется, что ДЛО, заданное формулой $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$ обратно к ДЛО $w = \frac{az + b}{cz + d}$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Совокупность всех ДЛО образует группу относительно композиции $\Lambda_2 \circ \Lambda_1(z) = \Lambda_2(\Lambda_1(z))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку существование обратного элемента установлено в предыдущем предложении, а единичным элементом, очевидно, является ДЛО $\Lambda(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$, нужно лишь установить, что композиция двух ДЛО – снова ДЛО. Этот факт проверяется непосредственно. \square

Рассмотрим отображение Φ из группы $GL(2, \mathbb{C})$ всех невырожденных 2×2 -матриц с коэффициентами из \mathbb{C} в группу всех ДЛО $\{\Lambda\}$ по формуле

$$\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Легко проверяется, что Φ – гомоморфизм, т.е. $\Phi(M_2 M_1)(z) = \Phi(M_2)(\Phi(M_1)(z))$ для всех M_1 и M_2 из $GL(2, \mathbb{C})$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Какой факторгруппе группы $SL(2, \mathbb{C})$ изоморфна группа $\{\Lambda\}$ всех ДЛО? Коммутативна ли группа $\{\Lambda\}$?

Конформность ДЛО на $\mathbb{C}^\#$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Пусть функция f отображает некоторую окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в некоторую окрестность точки ∞ (из $\mathbb{C}^\#$), причем $f(z_0) = \infty$. Говорят, что функция f *конформна в точке z_0* , если отображение $\tilde{w} = g(z) = 1/f(z)$ (доопределенное нулем в точке z_0) конформно в точке z_0 .

Пусть задана функция f , отображающая некоторую окрестность точки ∞ (из $\mathbb{C}^\#$) в некоторую окрестность точки ∞ (в $\mathbb{C}^\#$), причем $f(\infty) = \infty$. Говорят, что f *конформна в точке ∞* , если отображение $\tilde{w} = g(\tilde{z}) = 1/f(1/\tilde{z})$, доопределенное нулем в точке $\tilde{z} = 0$, конформно в точке $\tilde{z} = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Дать определение конформности функции f в точке ∞ при $f(\infty) = w_0 \neq \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Всякое ДЛО есть конформный изоморфизм $\mathbb{C}^\#$ на $\mathbb{C}^\#$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $c = 0$, тогда $\Lambda(z) = az + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Отсюда $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ имеем $\Lambda'(z_0) = a \neq 0$, т.е. Λ – конформный изоморфизм \mathbb{C} на \mathbb{C} (с обратным $\Lambda^{-1}(w) = (w - b)/a$). Остается проверить конформность Λ в точке ∞ , что эквивалентно конформности в точке $\tilde{z} = 0$ отображения

$$\tilde{w} = \frac{1}{\Lambda(1/\tilde{z})} = \frac{\tilde{z}}{b\tilde{z} + a} = \tilde{\Lambda}(\tilde{z}).$$

Проверяем: $\tilde{\Lambda}'(0) = \frac{1}{a} \neq 0$.

Пусть теперь $c \neq 0$. Следует рассмотреть три случая:

- (1) при $z_0 \neq -\frac{d}{c}$ и $z_0 \neq \infty$ имеем: $\Lambda'(z_0) = \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2} \neq 0$, что и требовалось;
- (2) при $z_0 = -\frac{d}{c}$ получаем $\Lambda(z_0) = \infty$; рассмотреть самостоятельно;
- (3) случай $z_0 = \infty$ также оставляем читателю.

□

Сохранение углов между путями.

Прежде чем формулировать следующее свойство ДЛО, докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, дифференцируемый в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t))|_{t_0} = \dot{\gamma}(t_0) = \dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Если $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, то $\dot{\gamma}(t_0)$ называется *касательным вектором к пути γ в точке z_0* (соответствующим параметру t_0).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть $\gamma_j : [\alpha_j, \beta_j] \rightarrow \mathbb{C}$ ($j \in \{1, 2\}$) – пути, $t_j \in (\alpha_j, \beta_j)$, $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Пусть $\exists \dot{\gamma}_j(t_j) \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$. Углом между путями γ_1 и γ_2 в точке z_0 (соответствующим параметрам t_1 и t_2) называется направленный угол между касательными векторами $\dot{\gamma}_1(t_1)$ и $\dot{\gamma}_2(t_2)$ (вращаем $\dot{\gamma}_1(t_1)$ в ближайшую сторону до совпадения с $\dot{\gamma}_2(t_2)$, учитываем направление вращения, значение угла лежит в пределах $(-\pi, \pi]$).

ЛЕММА 4.1. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и существует $\dot{\gamma}(t_0)$. Если функция f непрерывна в окрестности точки $z_0 = \gamma(t_0)$ и \mathbb{C} -дифференцируема в точке z_0 , то в некоторой окрестности точки t_0 определен путь $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, причем

$$\dot{\sigma}(t_0) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t_0} = f'(z_0) \dot{\gamma}(t_0). \quad (4.1)$$

В частности, если $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ и $f'(z_0) \neq 0$, то $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку γ – путь, а функция f непрерывна в окрестности $z_0 = \gamma(t_0)$, композиция $f \circ \gamma$ является путем (непрерывна) в окрестности точки t_0 . Поскольку путь γ дифференцируем в точке t_0 , имеем $\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t) = \dot{\gamma}(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Наконец, в силу \mathbb{C} -дифференцируемости функции f в точке z_0 справедливо представление:

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \gamma)|_{t_0}(\Delta t) &= f \circ \gamma(t_0 + \Delta t) - f \circ \gamma(t_0) = f(\gamma(t_0) + \Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t)) - f(\gamma(t_0)) = \\ &= f'(z_0)\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t) + o(\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t)) = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что и означает справедливость (4.1). \square

СЛЕДСТВИЕ 4.1.1. Пусть γ_1 и γ_2 – пути, дифференцируемые в точках t_1 и t_2 соответственно, причем $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $\dot{\gamma}_1(t_1) \neq 0$, $\dot{\gamma}_2(t_2) \neq 0$. Пусть функция f непрерывна в окрестности точки z_0 и $\exists f'(z_0) \neq 0$. Тогда угол между путями $f \circ \gamma_1$ и $f \circ \gamma_2$ в точке $f(z_0)$ равен углу между путями γ_1 и γ_2 в точке z_0 (соответственно параметрам t_1 и t_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1, $(f \circ \gamma_j)'(t_j) = f'(z_0)\dot{\gamma}_j(t_j)$, $j \in \{1, 2\}$, т.е. оба касательных вектора умножаются на одно и то же ненулевое комплексное число $f'(z_0)$. Поскольку это равносильно композиции растяжения и поворота, угол между касательными векторами сохраняется с учетом направления. \square

Круговое свойство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Обобщенной окружностью в $\mathbb{C}^\#$ называется обычная окружность в \mathbb{C} либо прямая в \mathbb{C} , дополненная точкой ∞ .

ЛЕММА 4.2. Всякая обобщенная окружность в $\mathbb{C}^\#$ (её часть в \mathbb{C}) задается уравнением

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}, |B|^2 > AC. \quad (4.2)$$

Обратно, всякое такое уравнение с указанными условиями на постоянные параметры задает обобщенную окружность в $\mathbb{C}^\#$ (точнее – её часть в \mathbb{C}), т.е. окружность или прямую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякая окружность в \mathbb{C} задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, R > 0.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, выразив x и y через z и \bar{z} ($x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$):

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 &= x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = \\ &= |z|^2 - 2a\frac{z + \bar{z}}{2} - 2b\frac{z - \bar{z}}{2i} + C = z\bar{z} + (-a + bi)z + (-a - bi)\bar{z} + C = \\ &= z\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C, \end{aligned}$$

где $A = 1$, $C = a^2 + b^2 - R^2$, $B = -a - bi$. Таким образом, уравнение окружности имеет нужный вид (очевидно, что $|B|^2 > AC$).

Случай прямой в \mathbb{C} оставляем читателю.

Чтобы доказать, что любое уравнение вида (4.2) задает обобщенную окружность (её часть в \mathbb{C}), достаточно подставить в (4.2) выражения z и \bar{z} через x и y (проверить!). \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Всякое ДЛО отображает обобщенную окружность на обобщенную окружность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая. Пусть сначала $c = 0$; тогда $a \neq 0$ и $d \neq 0$ (без ограничения общности, положим $d = 1$). Пусть $k = |a|$, $\alpha = \arg(a)$, тогда $\Lambda(z) = ke^{i\alpha}(z + b/a)$ есть последовательная композиция сдвига (параллельного переноса на вектор b/a), поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $k > 0$. Каждое из этих отображений, очевидно, окружности переводит в окружности и прямые в прямые. Точка ∞ неподвижна.

Пусть теперь $c \neq 0$, $z_0 = -d/c$. Тогда

$$\Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z - z_0) + \tilde{b}}{c(z - z_0)} = A + \frac{B}{z - z_0},$$

где \tilde{b} , A , B – постоянные в \mathbb{C} , $B = |B|e^{i\alpha} \neq 0$. Поскольку гомотетия, поворот и сдвиги сохраняют обобщенные окружности, остается доказать, что отображение $z \mapsto 1/z$ переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.

Напомним, что всякая обобщенная окружность задается уравнением (4.2). Подставим в него $z = 1/w$; получим

$$Cw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + A = 0,$$

т.е. снова уравнение вида (4.2) при $A' = C$, $B' = \bar{B}$, $C' = A$ с условиями $|B'|^2 > A'C'$. Для завершения доказательства кругового свойства остается еще отдельно рассмотреть случаи, когда точки $z = 0$ и $z = \infty$ лежат на исходной обобщенной окружности. \square

Сохранение симметрии относительно обобщенной окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Пусть S – окружность в \mathbb{C} с центром a , $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$. Точка z^* на луче az называется *симметричной точке z относительно S* , если $|z - a| \cdot |z^* - a| = r^2$. Кроме того, считается, что $a^* = \infty$, $\infty^* = a$.

Точки, симметричные относительно прямой, определяются как обычно.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ – единичная окружность с центром в нуле, $z \neq 0$. Тогда $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$. Действительно, $\arg \frac{1}{\bar{z}} = \arg z$, $|z| \cdot \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = 1$.

ЛЕММА 4.3. *Точки z и $z^* \neq z$ (т.е. не лежащие на S) симметричны относительно обобщенной окружности S если и только если всякая обобщенная окружность Γ , проходящая через z и z^* , перпендикулярна S .*

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Доказать лемму 4.3, используя школьную теорему о секущей и касательной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть z и z^* – точки, симметричные относительно обобщенной окружности S , Λ – произвольное ДЛО. Тогда $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$ симметричны относительно $\Lambda(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z = z^*$, то утверждение справедливо. Далее считаем, что $z \neq z^*$. Пусть Γ – произвольная обобщенная окружность, проходящая через $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$. Согласно предложению 4.4, $\Lambda^{-1}(\Gamma)$ – обобщенная окружность, проходящая через точки z и z^* . Согласно лемме 4.3, $\Lambda^{-1}(\Gamma) \perp S$. По следствию 4.1.1, $\Gamma \perp \Lambda(S)$. Таким образом, мы получили, что всякая обобщенная окружность, проходящая через $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$, ортогональна $\Lambda(S)$. Остается снова применить лемму 4.3. \square

Свойство трех точек. Сохранение сложного отношения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть дана тройка попарно различных точек z_1, z_2, z_3 в \mathbb{C}^\sharp и ещё тройка попарно различных точек w_1, w_2, w_3 в \mathbb{C}^\sharp . Тогда существует единственное ДЛО Λ такое, что $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \infty$, $\zeta_3 = 1$, а точки z_1, z_2, z_3 лежат в \mathbb{C} . Определим

$$\Lambda_{z_1, z_2, z_3}(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

В случае, когда (ровно) одна из точек z_1, z_2, z_3 равна ∞ , определение модифицируется естественным образом; например, если $z_1 = \infty$, то $\Lambda_{\infty, z_2, z_3} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$.

Ясно, что $\Lambda_{z_1, z_2, z_3}(z_j) = \zeta_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Искомое ДЛО $\Lambda = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}^{w_1, w_2, w_3} = (\Lambda_{w_1, w_2, w_3})^{-1} \circ \Lambda_{z_1, z_2, z_3}$ обладает нужными свойствами: $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Доказать, что $\Lambda = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}^{w_1, w_2, w_3}$ – единственное ДЛО со свойствами $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Сложным (ангармоническим) отношением четырех различных точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^\sharp$ называется величина

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}(z_4).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Всякое ДЛО сохраняет сложное отношение любых четырех (различных) точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ – произвольное ДЛО, z_1, z_2, z_3, z_4 – произвольные различные точки в \mathbb{C}^\sharp . Пусть $w_j = \Lambda(z_j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. В обозначениях предыдущего предложения, нужно доказать, что $\Lambda_{w_1, w_2, w_3}(w_4) = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}(z_4)$.

По предыдущему предложению, единственное ДЛО, переводящее тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (w_1, w_2, w_3) имеет вид $(\Lambda_{w_1, w_2, w_3})^{-1} \circ \Lambda_{z_1, z_2, z_3}$. Но ДЛО Λ тоже переводит тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (w_1, w_2, w_3) . Следовательно,

$$\Lambda = (\Lambda_{w_1, w_2, w_3})^{-1} \circ \Lambda_{z_1, z_2, z_3} \Leftrightarrow \Lambda_{w_1, w_2, w_3} \circ \Lambda = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}.$$

В частности, $\Lambda_{w_1, w_2, w_3} \circ \Lambda(z_4) = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}(z_4)$, т.е. $\Lambda_{w_1, w_2, w_3}(w_4) = \Lambda_{z_1, z_2, z_3}(z_4)$, что и требовалось. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Доказать, что четыре различные точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^\sharp$ лежат на одной обобщенной окружности если и только если $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

5. Лекция 5. Группы ДЛО-автоморфизмов B_1, Π_+, \mathbb{C} . Функция Жуковского. Тригонометрические функции. Многозначные функции и их однозначные ветви.

Группы ДЛО-автоморфизмов B_1, Π_+, \mathbb{C} .

Обозначим через B_1 открытый круг с радиусом 1 и центром в нуле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Группа ДЛО-автоморфизмов B_1 – это совокупность всех ДЛО вида*

$$\Lambda(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad \theta \in (-\pi, \pi], a \in B_1. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ДЛО Λ является автоморфизмом B_1 на себя и точка $a \in B_1$ такова, что $\Lambda(a) = 0$. По предложению 4.5 точка a^* , симметричная точке a относительно ∂B_1 , перейдет в точку ∞ , симметричную точке 0 относительно $\Lambda(\partial B_1) = \partial B_1$. Если $a = 0$, то $\Lambda(z) = k_1 z = k \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$ для некоторого $k \in \mathbb{C}$. Если $a \neq 0$, то $\Lambda(z) = k_2 \cdot \frac{z - a}{z - 1/\bar{a}} = k \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$. Поскольку $|\Lambda(1)| = 1$ и $|1 - a| = |1 - \bar{a}|$, имеем $1 = |k| \cdot \left| \frac{1 - a}{\bar{a} - 1} \right| = |k|$, откуда $k = e^{i\theta}$ для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi]$. Таким образом, любой ДЛО-автоморфизм B_1 имеет вид (5.1).

Покажем, что любое ДЛО вида (5.1) является автоморфизмом B_1 на себя. Поскольку точки $0 = \Lambda(a)$ и $\infty = \Lambda\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)$ должны быть симметричны относительно $\Lambda(\partial B_1)$, то $\Lambda(\partial B_1)$ является окружностью с центром в нуле. Так как $|\Lambda(1)| = 1$, то $\Lambda(\partial B_1) = \partial B_1$. Теперь, поскольку $\Lambda(a) = 0$ и всякое ДЛО есть гомеоморфизм $\mathbb{C}^\#$ на $\mathbb{C}^\#$, нетрудно показать, что B_1 отображается на B_1 . \square

Пусть $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Группа ДЛО-автоморфизмов Π_+ – это совокупность всех ДЛО вида*

$$\Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ – ДЛО-автоморфизм Π_+ на Π_+ . Тогда вещественная прямая \mathbb{R} переходит в себя. Очевидно, что найдутся три различные точки $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, такие, что $u_1 = \Lambda(x_1), u_2 = \Lambda(x_2), u_3 = \Lambda(x_3) \in \mathbb{R}$. Согласно предложению 4.6, отображение $w = \Lambda(z)$ определяется равенством

$$\frac{z - x_1}{z - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{w - u_1}{w - u_2} : \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2},$$

откуда легко следует, что

$$\Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Далее, поскольку $\Lambda(i) \in \Pi_+$, имеем:

$$\operatorname{Im} \Lambda(i) = \operatorname{Im} \frac{ai + b}{ci + d} = \operatorname{Im} \frac{(ai + b)(d - ci)}{(d + ci)(d - ci)} = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0,$$

откуда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$.

Обратно: любое ДЛО вида (5.2) переводит \mathbb{R} на себя, а точку i в Π_+ . Остается воспользоваться тем, что всякое ДЛО – гомеоморфизм $\mathbb{C}^\#$ на себя. \square

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Доказать, что группа ДЛО-автоморфизмов \mathbb{C} – это совокупность всех ДЛО вида $\Lambda(z) = az + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$.

Функция Жуковского.

Определим функцию Жуковского:

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \mathcal{J} \left(\frac{1}{z} \right).$$

Так как её производная имеет вид

$$\mathcal{J}'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

то функция \mathcal{J} является локально конформной в $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$. На самом деле функция \mathcal{J} локально конформна и в точках $z = 0$ и $z = \infty$ (проверить по определению).

Определим функции $\Lambda_1(z) = \frac{z-1}{z+1}$ и $S(z) = z^2$. Непосредственно проверяется, что $\Lambda_1^{-1}(z) = \frac{z+1}{-z+1}$ и $\mathcal{J} = \Lambda_1^{-1} \circ S \circ \Lambda_1$ (композиция всегда действует справа налево).

Найдем некоторые *максимальные области конформности* функции \mathcal{J} , т.е. такие области конформности, которые не содержатся ни в каких бóльших областях конформности (для функции \mathcal{J}).

Пусть $D_1 = \mathbb{C}^\# \setminus \bar{B}_1$. На рисунке 5.1 показано: как преобразуется эта область при последовательном применении отображений Λ , S , Λ^{-1} . Ясно, что D_1 является областью конформности. Ее нельзя увеличить, поскольку $\mathcal{J}(z) = \mathcal{J} \left(\frac{1}{z} \right)$. Положим $\Omega_1 = \mathcal{J}(D_1)$. Обратное к \mathcal{J} отображение, переводящее Ω_1 в D_1 , обозначается \mathcal{J}_o^{-1} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Открытый круг B_1 тоже является максимальной областью конформности \mathcal{J} . Аналогично можно определить обратное к функции \mathcal{J} отображение \mathcal{J}_i^{-1} , переводящее область Ω_1 в B_1 .

Две другие *основные* максимальные области конформности функции Жуковского – верхняя и нижняя полуплоскости. На рисунке 5.2 представлено преобразование области $D_2 = \Pi_+$ под последовательным действием функций Λ_1 , S , Λ_1^{-1} . В частности, $\Omega_2 = \mathcal{J}(D_2) = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$.

Обратное отображение из Ω_2 в D_2 обозначается \mathcal{J}_+^{-1} . Аналогично определяется функция \mathcal{J}_-^{-1} , конформно отображающая Ω_2 на полуплоскость Π_- .

Тригонометрические функции.

Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного определяются через экспоненту:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{tanh} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Найти точки $z \in \mathbb{C}$, для которых $\sin z = 0$ или $\cos z = 0$.

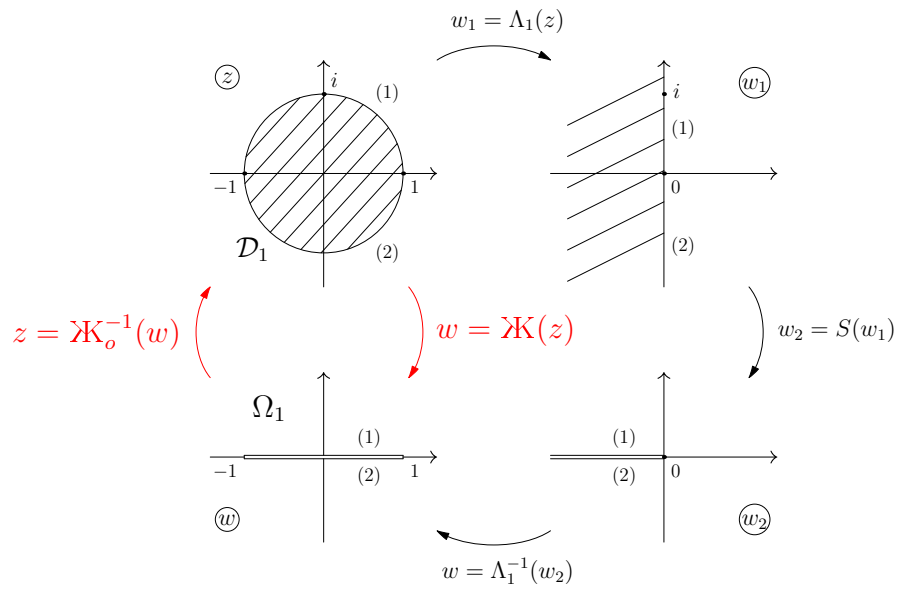


Рис. 5.1.

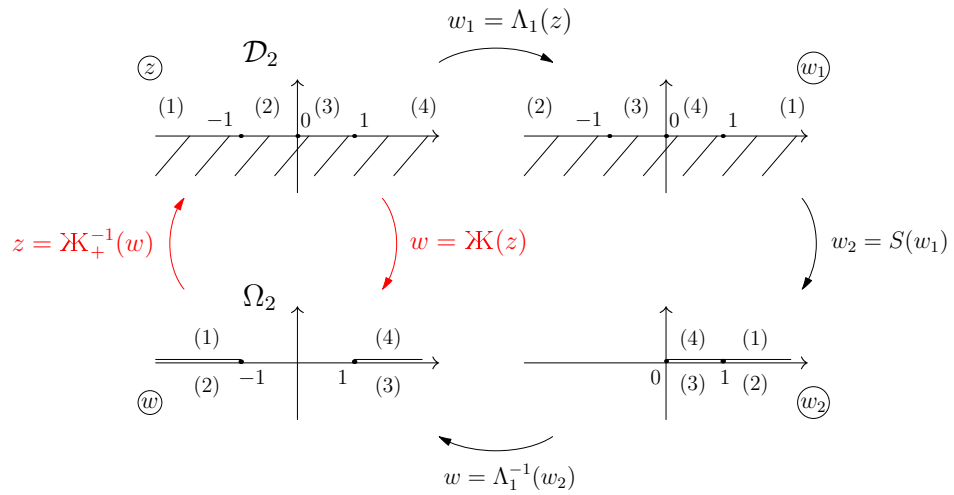


Рис. 5.2.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$ верны тождества $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$ и $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

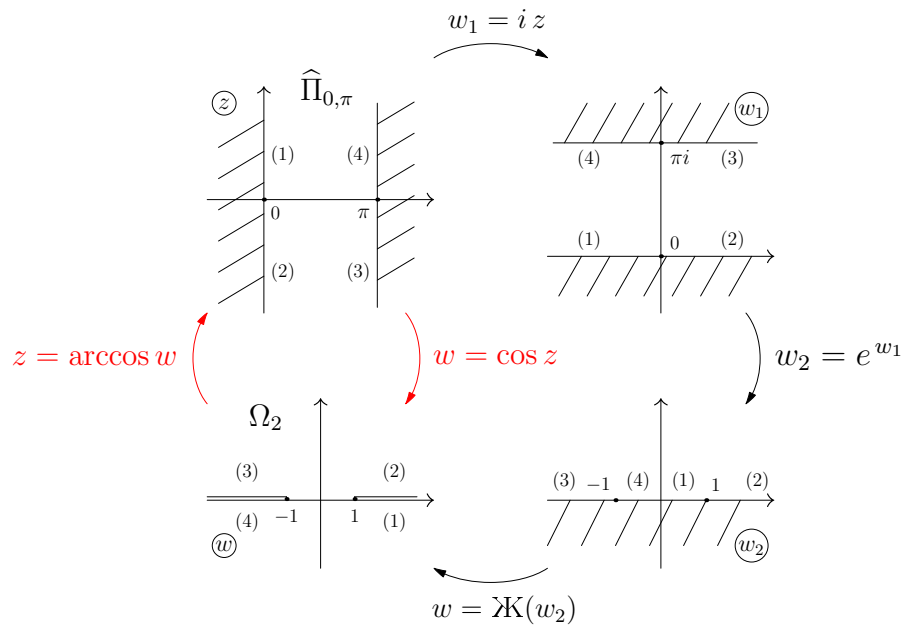


Рис. 5.3.

Найдем одну из *максимальных областей конформности* отображения $w = \cos z$. В силу равенства $\cos z = \text{Ж}(e^{iz})$ и четности функции $\cos z$, одна из возможных таких областей – вертикальная полоса $\Pi'_{(0,\pi)} = \{0 < \text{Re } z < \pi\}$. В этой полосе конформность функции $\cos z$ действительно имеет место, поскольку функция $w_1 = e^{z_1}$ конформна в полосе $\{0 < \text{Im } z_1 < \pi\}$, а функция $w = \text{Ж}(w_1)$ конформна в Π_+ . Образ области $\Pi'_{(0,\pi)}$ при отображении $w = \cos z$ и определение функции $z = \arccos w$ приведены на рисунке 5.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначение $\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}$ на рисунках 5.3 и 5.4 следует заменить на $\Pi'_{(\alpha,\beta)}$ (вертикальная полоса $\{\alpha < \text{Re}(z) < \beta\}$).

УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Пользуясь формулой $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$, найти образ вертикальной полосы $\Pi'_{(-\pi/2, \pi/2)}$ при отображении $w = \sin z$. Проследить за соответствием границ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Определим многозначные функции, обратные к функциям $\cos z$ и $\sin z$ соответственно:

$$z \in \text{Arccos } w \Leftrightarrow w = \cos z; \quad z \in \text{Arcsin } w \Leftrightarrow w = \sin z.$$

Чтобы найти максимальную область конформности функции $w = \text{tg } z$, преобразуем эту функцию:

$$\text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -i \Lambda_1(e^{2iz}),$$

где $\Lambda_1(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

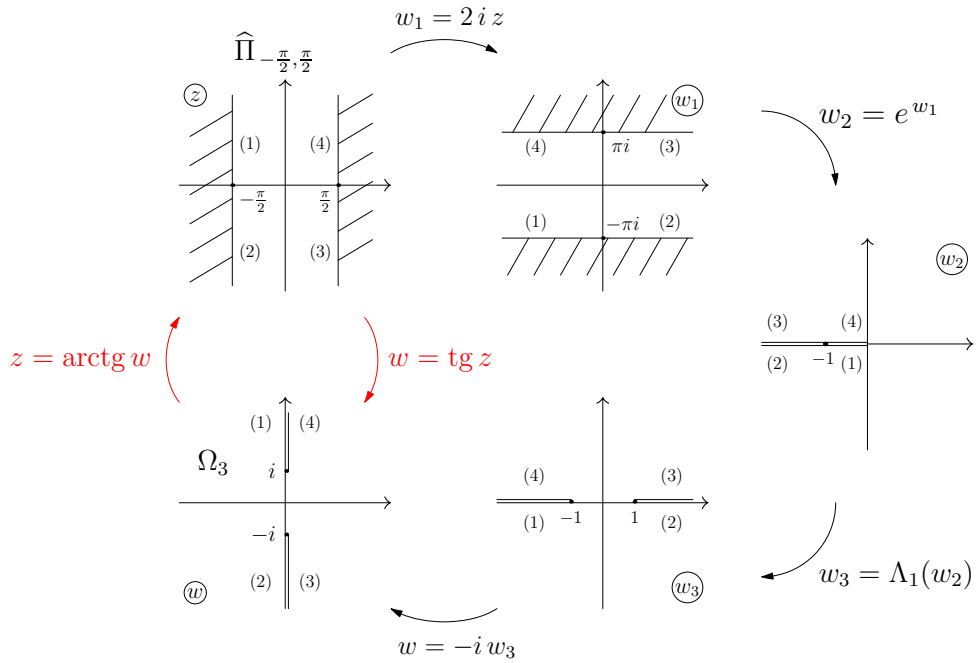


Рис. 5.4.

Одна из максимальных областей конформности функции $\text{tg}(z)$ – вертикальная полоса $\widehat{\Pi}'_{(-\pi/2, \pi/2)}$. Ее образ Ω_3 при отображении $w = \text{tg } z$ и определение функции $w = \text{arctg } z$ приведены на рисунке 5.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Определим многозначные функции, обратные к функциям $\text{tg } z$ и $\text{ctg } z$ соответственно:

$$z \in \text{Arctg } w \Leftrightarrow w = \text{tg } z; \quad z \in \text{Arcctg } w \Leftrightarrow w = \text{ctg } z.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Доказать, что вертикальная полоса $\widehat{\Pi}'_{(0, \pi)}$ является максимальной областью конформности функции $\text{ctg } z$. Определить функцию $\text{arccctg } w$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Найти образ вертикальной полосы $\widehat{\Pi}'_{(-\pi/4, \pi/4)}$ при отображении $w = \text{tg } z$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Доказать, что $(\text{arctg } z)' = \frac{1}{1+z^2}$ на Ω_3 .

Многозначные функции и их однозначные ветви.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Пусть $E \subseteq \mathbb{C}^\sharp$, $E \neq \emptyset$. Пусть F сопоставляет каждой точке $z \in E$ непустое множество $F(z) \subseteq \mathbb{C}^\sharp$. Тогда говорят, что на E задана *многозначная функция (м-функция) F* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Пусть F – м-функция на E , $E_1 \subset E$, $E_1 \neq \emptyset$. Пусть $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{C}^\sharp$ – функция, такая, что $f_1(z) \in F(z)$ для всех $z \in E_1$. Тогда f_1 называется *однозначной ветвью* м-функции F на E_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция f_1 из определения 5.4 непрерывна на E_1 (или голоморфна, или конформна в области E_1), то f_1 называется *непрерывной (или голоморфной, или конформной) ветвью* м-функции F на E_1 (без добавления слова "однозначной", что здесь всегда подразумевается).

ПРИМЕР 5.1. (1) $\text{Ln}(z)$ – м-функция на множестве $E = \mathbb{C}_b$; для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\text{Ln}_{(\alpha, \alpha+2\pi)}(z)$ является её конформной (и голоморфной) ветвью на $V_{(\alpha, \alpha+2\pi)}$.

(2) $F(z) = \sqrt[n]{z}$ – м-функция на множестве $E = \mathbb{C}^\#$ (полагаем $\sqrt[n]{\infty} := \infty$). При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\sqrt[n]{z}_{(\alpha, \alpha+2\pi)}$ на $V_{(\alpha, \alpha+2\pi)}$ – её конформная (и голоморфная) ветвь (см. конец Лекции 1, примеры 3.1 и 4.1, упражнение 3.2).

УПРАЖНЕНИЕ 5.8. М-функция $F(z) = \text{Arctg}(z)$ определена на множестве $\mathbb{C}^\# \setminus \{\pm i\}$. Напомним, что функция $\text{tg}(z)$ принимает все значения из $\mathbb{C}^\# \setminus \{\pm i\}$ (в точках $z_k = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, доопределяем её по непрерывности: $\text{tg } z_k = \infty$). Функция $f_1(z) = \text{arctg } z$ – голоморфная ветвь м-функции $\text{Arctg}(z)$ на множестве $E_1 = \Omega_3$ (см. рис. 5.4).

ПРИМЕР 5.2. М-функция $\text{Arg}(z)$ определена на множестве $\mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Функция $f_1(z) = \text{arg } z$ – непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(z)$ на множестве $E_1 = \mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Однако очевидно, что f_1 не является голоморфной ветвью м-функции $\text{Arg}(z)$.

5.1. Функции z^p и a^z .

Зафиксируем $p \in \mathbb{C}$ и определим м-функцию

$$z^p = e^{p \text{Ln } z} = \{ e^{p w_k} \mid w_k \in \text{Ln } z \}, \quad z \in \mathbb{C}_b.$$

При этом функция $f_1(z) = z^p_{(o)} = e^{p \text{Ln } z}$ – голоморфная ветвь z^p в \mathbb{C}_- .

УПРАЖНЕНИЕ 5.9. Найти i^i .

УПРАЖНЕНИЕ 5.10. Найти какую-либо максимальную область конформности функции $z^i_{(o)}$.

Пусть теперь фиксировано $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. По определению положим

$$a^z = e^{z \text{Ln } a} = \{ e^{z w_k} \mid w_k \in \text{Ln } a \}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $a^z_{(o)} = e^{z \text{Ln } a} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – *целая* ветвь м-функции a^z . При этом

$$a^z = e^{z \text{Ln } a} = e^{z(\ln |a| + i(\arg a + 2\pi k))} = e^{z \ln |a|} e^{2\pi k i z} = a^z_{(o)} e^{2\pi k i z}.$$

Таким образом, м-функция a^z "распадается" на счетное число целых ветвей.

6. Лекция 6. Непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(z)$ вдоль пути. Индекс пути относительно точки. Эквивалентные пути. Действия с кривыми. Спрямоаемые пути и кривые. Интеграл вдоль кривой по комплексной переменной

Непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(z)$ вдоль пути.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_\setminus \{0\}$ – путь. Тогда м-функция $F(t) = \text{Arg}(\gamma(t))$ имеет непрерывную ветвь $\varphi_0(t)$ на всем $[\alpha, \beta]$.

Все непрерывные на $[\alpha, \beta]$ ветви м-функции F имеют вид $\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Докажем существование хотя бы одной непрерывной ветви м-функции F на всем $[\alpha, \beta]$.

Пусть сначала $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta]) \subset \mathbb{C}_-$. Тогда можно положить $\varphi_0(t) = \arg \gamma(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Аналогично, если $[\gamma] \subset \mathbb{C}_+$, то можно положить $\varphi_0(t) = \arg_{(0, 2\pi)} \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

В общем случае разобьем отрезок $I = [\alpha, \beta]$ на N ($N \in \mathbb{N}$) равных последовательных отрезков $I_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ (где $\alpha = \alpha_0 < \dots < \alpha_N = \beta$) так, чтобы $[\gamma|_{I_n}]$ целиком содержался в \mathbb{C}_+ или в \mathbb{C}_- для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$. Поясним, почему такое разбиение существует. Поскольку $[\gamma]$ – компакт в \mathbb{C} , не содержащий точку 0, имеем $d(0, [\gamma]) = \rho > 0$. В силу равномерной непрерывности γ на I , существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \rho$ для любых t_1, t_2 из I с условием $|t_1 - t_2| < \varepsilon$. Остается для этого ε найти натуральное N с условием $(\beta - \alpha)/N < \varepsilon$.

Пусть $\psi_n(t) = \arg \gamma(t)|_{I_n}$ при $[\gamma(t)|_{I_n}] \subset \mathbb{C}_-$, и $\psi_n(t) = \arg_{(0, 2\pi)} \gamma(t)|_{I_n}$ в противном случае (при этом $[\gamma(t)|_{I_n}] \subset \mathbb{C}_+$), $n \in \{1, \dots, N\}$.

Положим $\varphi_0(t) = \psi_1(t)$ на I_1 . Тогда $\psi_2(\alpha_1) = \varphi_0(\alpha_1) + 2\pi k_1$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{Z}$. Положим $\varphi_0(t) = \psi_2(t) - 2\pi k_1$ на I_2 . Тогда $\psi_3(\alpha_2) = \varphi_0(\alpha_2) + 2\pi k_2$ для некоторого $k_2 \in \mathbb{Z}$. Положим $\varphi_0(t) = \psi_3(t) - 2\pi k_2$ на I_3 и т.д. По построению, функция $\varphi_0(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $\forall t \in [\alpha, \beta]$ имеем $\varphi_0(t) \in \text{Arg}(\gamma(t))$, т.е. φ_0 – непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha, \beta]$.

Пусть теперь φ – еще одна непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда $\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi_0(t)}{2\pi}$ – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, принимающая во всех точках целочисленные значения, и, следовательно, $\psi(t) \equiv k$ на $[\alpha, \beta]$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем $\varphi(t) \equiv \varphi_0(t) + 2\pi k$. С другой стороны, очевидно, что все функции вида $\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются непрерывными ветвями м-функции $\text{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha, \beta]$. \square

Индекс пути относительно точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_\setminus \{0\}$ – путь и φ – какая-либо непрерывная на $[\alpha, \beta]$ ветвь м-функции $\text{Arg}(\gamma(t))$. Величина

$$\Delta_\gamma \text{Arg}(z) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

называется *приращением (полярного) аргумента* вдоль пути γ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 6.1 следует, что $\Delta_\gamma \text{Arg}(z)$ определено корректно, т.е. не зависит от выбора непрерывной ветви φ м-функции $\text{Arg}(\gamma(t))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, и пусть $a \notin [\gamma]$. Тогда путь $\gamma_{-a}(t) = \gamma(t) - a$, $t \in [\alpha, \beta]$, не проходит через точку 0 и определен *индексом пути γ относительно точки a* :

$$\text{ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_{-a}} \text{Arg}(z).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $f(z) = \text{ind}_\gamma(z)$ непрерывна в $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. Для доказательства этого факта достаточно разбить путь γ на "маленькие" пути (как это сделано в доказательстве теоремы 6.1) и установить нужный факт для каждого из этих путей.

В случае замкнутого пути γ функция $f(z)$ постоянна (и целочисленна) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Следующая теорема будет доказана в разделе "Спецкурс" после доказательства теоремы Жордана.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть γ – замкнутый жорданов путь в \mathbb{C} . По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D – ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω – неограниченная. Тогда утверждается, что $\text{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ для всех $z \in \Omega$, $\text{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ (или $\text{ind}_\gamma(z) \equiv -1$) для всех $z \in D$.

В случае, когда $\text{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ для всех $z \in D$, путь γ называется *положительно ориентированным относительно области D* . Если же $\text{ind}_\gamma(z) \equiv -1$ для всех $z \in D$, то γ *отрицательно ориентирован относительно D* .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведем подробный план доказательства предыдущей теоремы для случая произвольной замкнутой жордановой ломаной (для него у нас есть простое доказательство теоремы Жордана). Пусть Σ^+ – замкнутая ориентированная жорданова ломаная с первым ребром $[v_1, v_2]^+$, и пусть $a = (v_1 + v_2)/2$. Обозначим через Γ^+ – жорданову ломаную $\Sigma^+ \setminus (v_1, v_2)$. Если точка $z^+ \rightarrow a$ (соответственно, $z^- \rightarrow a$) по нормали к ребру $[v_1, v_2]^+$ из *неограниченной* (соответственно, *из ограниченной*) компоненты дополнения к $[\Sigma]$, то $\text{ind}_{\Gamma^+}(z^+) - \text{ind}_{\Gamma^+}(z^-) \rightarrow 0$ согласно предыдущему замечанию. Нетрудно установить также, что $\text{ind}_{\Sigma^+}(z^+) = 0$. Остается заметить, что

$$|\text{ind}_{[v_1, v_2]^+}(z^+) - \text{ind}_{[v_1, v_2]^+}(z^-)| \rightarrow 1.$$

Эквивалентные пути. Действия с кривыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Пусть $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \rightarrow \mathbb{C}$ – два пути. Они называются *эквивалентными* (обозначение: $\gamma_1 \simeq \gamma_2$), если существует возрастающий гомеоморфизм $h : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha_2, \beta_2]$ с условием $\gamma_2(h(t)) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Доказать, что \simeq – отношение эквивалентности.

Класс эквивалентных путей (с представителем γ) называется *кривой*, которая обозначается Γ (или $\{\gamma\}$). Корректно определен *носитель* $[\Gamma] = [\gamma]$ кривой Γ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $\text{ind}_{\gamma_1}(a) = \text{ind}_{\gamma_2}(a)$ для всех $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma_1] = \mathbb{C} \setminus [\gamma_2]$. Следовательно, корректно определен $\text{ind}_\Gamma(a)$ – *индекс* кривой Γ относительно точки $a \notin [\Gamma]$.

Пусть $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \rightarrow \mathbb{C}$ – два пути, причем $\beta_1 = \alpha_2$ и $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$. Тогда определен путь $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 : [\alpha_1, \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t), & t \in [\alpha_2, \beta_2]. \end{cases}$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 – кривые, причем конец Γ_1 совпадает с началом Γ_2 . Тогда можно определить кривую $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Для этого нужно взять какие-либо представители γ_1 и γ_2 кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно (т.е. $\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$ и $\Gamma_2 = \{\gamma_2\}$), определенных (запараметризованных) на отрезках $[0, 1]$ и $[1, 2]$ соответственно, а затем рассмотреть кривую $\Gamma = \{\gamma_1 \cup \gamma_2\}$. Нетрудно доказать корректность этого

определения. Порядок путей и кривых в указанной операции *объединения путей и кривых*, очевидно, важен. Вопрос о коммутативности смысла не имеет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь. Тогда путь $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *противоположным* к γ . Очевидным образом корректно определяется кривая Γ^- , противоположная кривой Γ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Если $a \notin [\Gamma_1] \cup [\Gamma_2]$ и определена кривая $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то $\text{ind}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}(a) = \text{ind}_{\Gamma_1}(a) + \text{ind}_{\Gamma_2}(a)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Если $a \notin [\Gamma]$, то $\text{ind}_{\Gamma^-}(a) = -\text{ind}_{\Gamma}(a)$.

Спряжляемые пути и кривые.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ – разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N ($N \in \mathbb{N}$); $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} > 0$ ($n \in \{1, \dots, N\}$). Число $\lambda(T) = \max_{1 \leq n \leq N} \Delta t_n$ называется *диаметром разбиения* T .

Сопоставим каждому разбиению T величину $l_T(\gamma) = \sum_{n=1}^N |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|$ – длину вписанной в γ ломаной, соответствующей T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. *Длиной пути* γ называется (конечная или бесконечная) величина

$$l(\gamma) = \sup_T l_T(\gamma).$$

Если $l(\gamma) < +\infty$, то путь γ называется *спряжляемым*.

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Доказать, что путь γ спряжляем, если и только если существует и конечен $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} l_T(\gamma)$, причем он равен $l(\gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$; в частности, γ_1 и γ_2 одновременно спряжляемые или нет. Поэтому корректно определены понятия *спряжляемой кривой* и ее *длины* $l(\Gamma) := l(\gamma)$, где $\Gamma = \{\gamma\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Пусть $K(t)$ – канторова лестница на $[0, 1]$. Определим путь $\gamma(t) = t + iK(t)$ на $[0, 1]$ («график» K на плоскости Oxy , $z = x + iy$). Доказать, что $l(\gamma) = 2$.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – спряжляемый путь, не постоянный ни на каком интервале $(\alpha_1, \beta_1) \subset [\alpha, \beta]$. Тогда функция $s(t) = l(\gamma|_{[\alpha, t]})$ непрерывна и строго возрастает, и, следовательно, является гомеоморфизмом $[\alpha, \beta]$ на $[0, l(\gamma)]$. Поэтому определены обратное отображение $t = t(s)$ и путь $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) : [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma} \simeq \gamma$. Параметр s называется *натуральным параметром* для кривой $\Gamma = \{\gamma\}$, а путь $\tilde{\gamma}$ её *натуральной параметризацией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Путь $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ на $[\alpha, \beta]$ называется *гладким*, если $x(t)$ и $y(t)$ являются функциями класса $C^1([\alpha, \beta])$, причем $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. Два гладких пути $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \rightarrow \mathbb{C}$ называются *эквивалентными как гладкие пути*, если существует возрастающий диффеоморфизм (класса C^1 в обе стороны) $h : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha_2, \beta_2]$ такой, что $\gamma_2(h(t)) = \gamma_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Эквивалентность гладких путей – отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности гладких путей называется *гладкой кривой*.

УПРАЖНЕНИЕ 6.8. Если γ_1 и γ_2 – гладкие пути, эквивалентные как обычные пути, то они эквивалентны и как гладкие пути.

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Если γ – непрерывно дифференцируемый путь на $[\alpha, \beta]$, то он спрямляем и $l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| dt$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.10. Дать определения кусочно-гладкого пути, эквивалентности кусочно-гладких путей, кусочно-гладкой кривой.

Интеграл вдоль пути и кривой по комплексной переменной.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая функция, $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ – разбиение $[\alpha, \beta]$. Пусть $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ – выборка, подчиненная разбиению T , т.е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n]$ для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$. Определим интегральную сумму:

$$\Sigma_{\gamma}(T, \tau, f) = \sum_{n=1}^N f(\gamma(\tau_n))(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \Sigma_{\gamma}(T, \tau, f)$$

(т.е. $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\lambda(T) < \delta$ и для всякой выборки τ , подчиненной T , имеем $|I - \Sigma_{\gamma}(T, \tau, f)| < \varepsilon$), то он называется *интегралом от функции f вдоль пути γ* и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Функция f в этом случае называется *интегрируемой вдоль пути γ по комплексной переменной z* .

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Пусть γ_1, γ_2 – два произвольные пути. Если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ и функция f определена на $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, то $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ и $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ существуют либо не существуют одновременно, и в первом случае они равны между собой. Следовательно, корректно определен *интеграл вдоль кривой Γ от функции f* .

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Пусть для кривой Γ существуют интегралы $\int_{\Gamma} f_1(z) dz$ и $\int_{\Gamma} f_2(z) dz$. Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ существует интеграл

$$\int_{\Gamma} (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)) dz = \lambda_1 \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \lambda_2 \int_{\Gamma} f_2(z) dz.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Пусть для кривых Γ_1 и Γ_2 определена кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, и $f : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$. Если существуют интегралы $\int_{\Gamma_1} f(z) dz$ и $\int_{\Gamma_2} f(z) dz$, то существует интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \emptyset$. Через $C(E)$ обозначается пространство функций, непрерывных (по E) в каждой точке $a \in E$ и ограниченных на E . В $C(E)$ определяется равномерная норма:

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – спрямляемый путь, функция f непрерывна на $[\gamma]$. Тогда $\int_{\gamma} f(z) dz$ существует и выполняется неравенство

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \|f\|_{[\gamma]} \cdot l(\gamma). \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, по определению интегралов через соответствующие интегральные суммы получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) d\gamma(t) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t)) dx(t) - \int_{\alpha}^{\beta} v(x(t), y(t)) dy(t) + \\ &+ i \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t)) dy(t) + \int_{\alpha}^{\beta} v(x(t), y(t)) dx(t) \right), \end{aligned}$$

где $\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) d\gamma(t)$ и другие интегралы в последней серии равенств являются интегралами Римана-Стилтьеса.

Докажем, например, существование интеграла $\int_{\gamma} u dx = \int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t)) dx(t)$.

Функция $u(x(t), y(t))$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ как композиция непрерывных. Функция $x(t)$ имеет на $[\alpha, \beta]$ ограниченную вариацию, поскольку справедлива оценка $\text{Var}_{[\alpha, \beta]}(x(t)) \leq l(\gamma)$ (проверить!). Из курса действительного анализа известно, что этих двух условий достаточно для существования интеграла Римана-Стилтьеса $\int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t)) dx(t)$.

Существование интегралов $\int_{\gamma} v dy$, $\int_{\gamma} u dy$, $\int_{\gamma} v dx$ доказывается аналогично.

Наконец, для каждой интегральной суммы $\Sigma_{\gamma}(T, \tau, f)$ справедлива оценка

$$|\Sigma_{\gamma}(T, \tau, f)| \leq \|f\|_{[\gamma]} \cdot l_T(\gamma) \leq \|f\|_{[\gamma]} \cdot l(\gamma).$$

Переходя к пределу при $\lambda(T) \rightarrow 0$, получаем требуемое неравенство (6.1). \square

**7. Лекция 7. Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.
Лемма Гурса. Лемма о приближении. Теорема Коши для
односвязной области.**

Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывно дифференцируемый путь, а функция f непрерывна на $[\gamma]$. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Мы несколько отложим доказательство этой теоремы. Сначала приведем один важный пример её использования, затем нам понадобится одно новое полезное понятие и некоторые предварительные результаты.

ПРИМЕР 7.1. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}$; по определению положим $z^0 = 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Найдем значение $\int_{\gamma_R} z^n dz$, где $\gamma_R(t) = Re^{it}|_{[0, 2\pi]}$ – окружность радиуса R с центром в нуле:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} z^n dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n Rie^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt - R^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt = \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Этот простой результат именуется как "свойство ортогональности степеней" (пока без комментариев):

$$\int_{\gamma_R} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad (7.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \emptyset$, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ – ограниченная функция. Модуль непрерывности функции f на множестве E определяется по формуле:

$$\omega_E(f, \delta) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in E \\ |z_1 - z_2| \leq \delta}} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что функция f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \omega_E(f, \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ – путь на $[\alpha, \beta]$ класса C^1 . Положим $\mu(\delta) = \omega_{[\alpha, \beta]}(\dot{x}, \delta) + \omega_{[\alpha, \beta]}(\dot{y}, \delta)$. Тогда $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $\forall \Delta t > 0$ с условием $[t, t + \Delta t] \subset [\alpha, \beta]$ и $\forall \theta \in [t, t + \Delta t]$ выполняется оценка:

$$|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t) - \dot{\gamma}(\theta)\Delta t| \leq \mu(\Delta t)\Delta t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t, \Delta t, \theta$ удовлетворяют условиям леммы. По теореме Лагранжа (для функций $x(t)$ и $y(t)$) при некоторых $\theta_x, \theta_y \in [t, t + \Delta t]$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) - x(t) &= \dot{x}(\theta_x)\Delta t, \\y(t + \Delta t) - y(t) &= \dot{y}(\theta_y)\Delta t.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t) - \dot{\gamma}(\theta)\Delta t| &= |(x(t + \Delta t) - x(t) - \dot{x}(\theta)\Delta t) + \\&+ i \cdot (y(t + \Delta t) - y(t) - \dot{y}(\theta)\Delta t)| \leq (|\dot{x}(\theta_x) - \dot{x}(\theta)| + |\dot{y}(\theta_y) - \dot{y}(\theta)|)\Delta t \leq \\&\leq (\omega_{[\alpha, \beta]}(\dot{x}, \Delta t) + \omega_{[\alpha, \beta]}(\dot{y}, \Delta t))\Delta t = \mu(\Delta t)\Delta t,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Эта лемма является как бы заменой цитируемой в её доказательстве теоремы Лагранжа, которая не верна для путей на плоскости. Приведем пример: $\gamma(t) = e^{it}|_{[0, 2\pi]}$. Здесь $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0$, однако $\dot{\gamma}(t) = ie^{it} \neq 0$ при всех $t \in [0, 2\pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Воспользуемся обозначениями последней леммы. В силу равномерной непрерывности функций \dot{x} и \dot{y} на $[\alpha, \beta]$, имеем: $\mu(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Заметим, что интегралы, равенство которых требуется установить, существуют: левый – в силу спрямляемости C^1 -пути и непрерывности f на его носителе (по теореме 6.3); правый – в силу непрерывности подынтегральной функции.

Пусть $T = \{t_0, \dots, t_N\}$ – разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ – выборка, подчиненная T . Оценим разность интегральных сумм для $\int_{\gamma} f(z) dz$ и

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$, соответствующих паре (T, τ) :

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{n=1}^N f(\gamma(\tau_n))(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})) - \sum_{n=1}^N f(\gamma(\tau_n))\dot{\gamma}(\tau_n)\Delta t_n \right| \leq \\&\leq \sum_{n=1}^N |f(\gamma(\tau_n))| \cdot |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1}) - \dot{\gamma}(\tau_n)\Delta t_n| \leq \sum_{n=1}^N |f(\gamma(\tau_n))| \cdot \mu(\Delta t_n)\Delta t_n \leq \\&\leq \|f\|_{[\gamma]}(\beta - \alpha) \cdot \mu(\lambda(T)) \rightarrow 0\end{aligned}$$

при $\lambda(T) \rightarrow 0$. Далее ясно. \square

Лемма Гурса (теорема Коши для треугольников).

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Для произвольного отрезка $[a, b]$ в \mathbb{C} доказать равенства:

$$\int_{[a, b]} z^n dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \{0, 1, \dots\}.$$

Из этих равенств следует, что для всякого многочлена $p(z)$ и всякого треугольника Δ с положительно ориентированной границей $\partial^+ \Delta$ справедливо равенство

$$\int_{\partial^+ \Delta} p(z) dz = 0.$$

Здесь и далее в этой лекции через Δ обозначается замкнутый (вместе с внутренней областью) треугольник.

ЛЕММА 7.2. (Гурса). Пусть Δ – треугольник с (положительно) ориентированной границей $\partial^+ \Delta$. Пусть функция f определена в некоторой окрестности Δ и является \mathbb{C} -дифференцируемой в каждой точке $z \in \Delta$. Тогда

$$\int_{\partial^+ \Delta} f(z) dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное:

$$\int_{\partial^+ \Delta} f(z) dz = I \neq 0.$$

Средними линиями разобьем треугольник $\Delta = \Delta_0$ на 4 треугольника $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)}$, $\Delta_4^{(1)}$ (как показано на рис. 7.1). Нетрудно видеть, что

$$\int_{\partial^+ \Delta_0} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial^+ \Delta_j^{(1)}} f(z) dz.$$

Следовательно, можно выбрать $j_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ с условием $\left| \int_{\partial^+ \Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4}$, где $\Delta_1 = \Delta_{j_1}^{(1)}$.

Аналогично, разбивая средними линиями треугольник Δ_1 на четыре треугольника $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\Delta_3^{(2)}$, $\Delta_4^{(2)}$, выберем $j_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ с условием

$$\left| \int_{\partial^+ \Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^2},$$

где $\Delta_2 = \Delta_{j_2}^{(2)}$.

Продолжая построение по индукции, получаем систему вложенных замкнутых треугольников Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, со следующими свойствами (через $P(\Delta_k)$ обозначается периметр треугольника Δ_k):

$$P(\Delta_k) = \frac{P(\Delta)}{2^k}, \quad \left| \int_{\partial^+ \Delta_k} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^k}. \quad (7.2)$$

По теореме о вложенных компактах, существует точка $z_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Delta_k \subset \Delta$.

Поскольку функция $f(z)$ по условию является \mathbb{C} -дифференцируемой всюду в Δ (в частности, в точке z_0), для нее справедливо представление:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0), \quad \mu(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

Выражая отсюда $\mu(z)$, имеем:

$$\mu(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad z \neq z_0.$$

Функция $\mu(z)$, доопределенная нулем в точке z_0 , определена и непрерывна на Δ . Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что $|\mu(z)| < \varepsilon$ при $z \in B(z_0, \delta) \cap \Delta$.

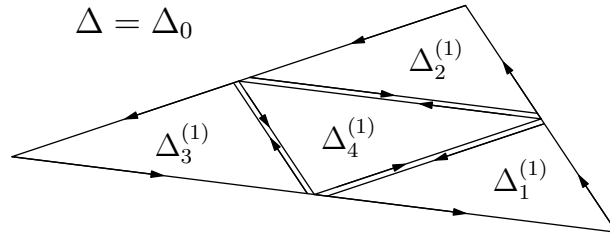


Рис. 7.1.

Определим $n \in \mathbb{N}$ из условия: $P_n = P(\Delta_n) < \delta$. Ясно, что тогда $\Delta_n \subset B(z_0, \delta) \cap \Delta$. Теперь, пользуясь свойствами (7.2) и упражнением 7.1, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{|I|}{4^n} &\leq \left| \int_{\partial^+ \Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial^+ \Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0)) dz \right| = \\ &= \left| \int_{\partial^+ \Delta_n} \mu(z)(z - z_0) dz \right| \leq \varepsilon P_n \cdot P_n = \varepsilon \frac{P(\Delta)^2}{4^n}, \end{aligned}$$

откуда $|I| \leq \varepsilon P(\Delta)^2$. При $\varepsilon < \frac{|I|}{P(\Delta)^2}$ получаем противоречие. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть D – область в \mathbb{C} , функция f непрерывна в D . Говорят, что f удовлетворяет в D условию треугольника, если для всякого замкнутого треугольника $\Delta \subset D$ выполняется равенство

$$\int_{\partial^+ \Delta} f(z) dz = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если f голоморфна в D , то по лемме Гурса f удовлетворяет в D условию треугольника.

Лемма о приближении.

ЛЕММА 7.3. (О приближении). Пусть D – область в \mathbb{C} , функция f непрерывна в D , $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ – спрямляемый путь. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого разбиения T отрезка $[\alpha, \beta]$ с условием $\lambda(T) < \delta$ выполнены следующие утверждения:

- (1) $\|\gamma - \Lambda_\gamma^T\|_{[\alpha, \beta]} < \varepsilon$, $[\Lambda_\gamma^T] \subset D$,
- (2) $\left| \int_\gamma f(z) dz - \int_{\Lambda_\gamma^T} f(z) dz \right| < \varepsilon$,

где Λ_γ^T – ломаная, вписанная в γ , соответствующая разбиению T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что путь γ нетривиален (неодноточечный), иначе всё просто. Положим $d = \text{dist}([\gamma], \partial D)$ при $\partial D \neq \emptyset$ ($D \neq \mathbb{C}$), $d = 1$ при $D = \mathbb{C}$. Определим множество $K = \{z \in D \mid \text{dist}(z, [\gamma]) \leq \frac{d}{2}\}$ – компакт в D , содержащий $[\gamma]$.

Напомним определение модуля непрерывности функции g на множестве E :

$$\omega_E(g, r) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in E \\ |z_1 - z_2| \leq r}} |g(z_1) - g(z_2)|.$$

По условию, функция f непрерывна в D , а значит f равномерно непрерывна на K . Следовательно,

$$\mu(r) := \omega_K(f, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (7.3)$$

В силу равномерной непрерывности γ на $[\alpha, \beta]$, имеем:

$$\omega(r) := \omega_{[\alpha, \beta]}(\gamma, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (7.4)$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2})$. Из (7.3) и (7.4), а также ввиду интегрируемости функции f вдоль γ (γ спрямляема и f непрерывна на $[\gamma]$), найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\omega(\delta) < \varepsilon, \quad \mu(\omega(\delta)) < \frac{\varepsilon}{2l(\gamma)}, \quad (7.5)$$

и для любого разбиения T отрезка $[\alpha, \beta]$ с условием $\lambda(T) < \delta$, а также любой выборки τ , подчиненной разбиению T , имеем:

$$\left| \Sigma_\gamma(T, \tau, f) - \int_\gamma f(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.6)$$

Покажем, что указанное δ удовлетворяет условиям доказываемой леммы.

Пусть теперь $T = \{t_0, \dots, t_N\}$ – произвольное разбиение $[\alpha, \beta]$ (порядка N) с условием $\lambda(T) < \delta$ и Λ_γ^T – соответствующая вписанная в γ ломаная. При $n \in \{1, \dots, N\}$ положим $\gamma_n = \gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}$. Тогда $\forall t \in [t_{n-1}, t_n]$ справедлива оценка:

$$|\Lambda_\gamma^T(t) - \gamma_n(t)| \leq \max(|\gamma_n(t) - \gamma_n(t_{n-1})|, |\gamma_n(t) - \gamma_n(t_n)|) \leq \omega(\lambda(T)) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\|\Lambda_\gamma^T - \gamma\|_{[\alpha, \beta]} < \varepsilon$, и (1) доказано. Заметим также, что $[\Lambda_\gamma^T] \subset K$, поскольку $\forall t \in [\alpha, \beta]$ имеем $\Lambda_\gamma^T(t) \in U_{d/2}(\gamma(t))$.

Докажем теперь, что

$$\left| \int_{\Lambda_\gamma^T} f(z) dz - \Sigma_\gamma(T, \tau, f) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для любой выборки $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$, подчиненной T . Тогда в силу (7.6) и неравенства треугольника будет доказано (2).

Пользуясь аддитивностью интеграла и определениями $\Sigma_\gamma(T, \tau, f)$ и $l(\gamma)$, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Lambda_\gamma^T} f(z) dz - \Sigma_\gamma(T, \tau, f) \right| &\leq \sum_{n=1}^N \left| \int_{[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]} f(z) dz - f(\gamma(\tau_n))(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})) \right| = \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \int_{[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]} (f(z) - f(\gamma(\tau_n))) dz \right| \leq \\ &\leq \mu(\omega(\lambda(T))) \sum_{n=1}^N |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| \leq \mu(\omega(\delta)) \cdot l(\Lambda_\gamma^T) < \frac{\varepsilon}{2l(\gamma)} \cdot l(\gamma) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

**8. Лекция 8. Существование первообразной в односвязной области.
Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная теорема Коши для
допустимых областей.**

Теорема Коши для односвязной области.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} и пусть функция f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ с условием $[\Gamma] \subset D$ выполняется равенство:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По условию, утверждение теоремы верно, если Γ – ориентированная граница некоторого треугольника $\Delta \subset D$ (из односвязности D и теоремы 2.2 следует, что и внутренность треугольника Δ лежит в D).

2. Если Γ – граница выпуклого многоугольника $G \subset D$, то этот многоугольник можно разбить его диагоналями на треугольники, и свести нужное утверждение к случаю треугольника.

3. Теперь проверим нужное утверждение для произвольной (ориентированной) замкнутой жордановой ломаной Γ в D . Поскольку область D односвязна, жорданов (открытый) многоугольник G , ограниченный ломаной $[\Gamma]$, целиком лежит в D (см. теорему 2.2 и доказательство теоремы Жордана для многоугольников в разделе "Спецкурс"). Поэтому, по аналогии со случаем 2., достаточно установить следующее утверждение и затем воспользоваться методом индукции.

ЛЕММА 8.1. В указанных обозначениях, существует диагональ многоугольника G (открытый интервал, соединяющий несоседние вершины в Γ), целиком лежащая в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции. Пусть лемма доказана для всех жордановых ломаных с числом вершин меньшим, чем N . Пусть A_1, \dots, A_N – последовательные вершины ломаной Γ ($N \geq 4$), причем никакие соседние ребра этой ломаной не являются продолжениями друг друга (т.е. все внутренние углы многоугольника G отличны от π рад.), иначе мы можем считать, что число вершин ломаной на самом деле равно $N - 1$, и всё доказано. Делая при необходимости параллельный перенос и перенумерацию вершин, мы можем предположить, что $A_2 = 0$ – это вершина ломаной Γ с минимальной ординатой (т.е. $\text{Im}(z) \geq 0$ для всех $z \in [\Gamma]$). Следовательно, внутренний угол $\angle A_1 A_2 A_3$ (с вершиной A_2) имеет величину, меньшую π . Если интервал (A_1, A_3) целиком лежит в G , то всё доказано. Пусть это не так.

Утверждается, что тогда на (A_1, A_3) или внутри треугольника $\Delta A_1 A_2 A_3$ должна находиться хотя бы одна из вершин A_3, \dots, A_N . Действительно, на объединении последних двух множеств, очевидно, должна находиться хотя бы одна точка a из множества $[\Gamma]' = [\Gamma] \setminus ([A_1, A_2] \cup [A_2, A_3])$. Если a – это вершина Γ , то утверждение доказано. Пусть – нет. Если a лежит внутри $\Delta A_1 A_2 A_3$, то одна из вершин ребра из Γ , на котором лежит точка a , является искомой вершиной (проверить!). Пусть, наконец, a лежит на (A_1, A_3) , а внутри открытого $\Delta A_1 A_2 A_3$ уже нет таких точек. Тогда искомая вершина найдется на (A_1, A_3) (проверить!). Утверждение доказано.

Из указанных соображений и соображений непрерывности найдутся точки a_1 и a_3 на полуинтервалах $(A_2, A_1]$ и $(A_2, A_3]$ соответственно такие, что интервалы (a_1, a_3) и (A_1, A_3) параллельны, внутри треугольника $\Delta a_1 A_2 a_3$ нет точек из $[\Gamma]'$

(откуда внутренность $\Delta a_1 A_2 a_3$ лежит в G), а на (a_1, a_3) есть точки из $[\Gamma]'$ (хотя бы одна из вершин A_n , $n > 3$). Тогда (A_2, A_n) – искомая диагональ. \square

4. Пусть, наконец, Γ – произвольная замкнутая нежорданова ломаная в D . У неё есть представитель – замкнутый кусочно-линейный путь $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, для которого найдется натуральное $N > 1$ и разбиение $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N такое, что при каждом $n \in \{1, \dots, N\}$ имеем $\gamma(t) = c_n t + d_n$ на $[t_{n-1}, t_n]$ (c_n и d_n – комплексные постоянные).

ЛЕММА 8.2. *Справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:*

(1) для любой функции $f \in C([\Gamma])$ выполняется равенство $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ (случай, когда Γ не имеет замкнутых жордановых "частей");

(2) существуют замкнутые жордановы ломаные $\Gamma_1, \dots, \Gamma_J$ ($J \geq 1$) такие, что $[\Gamma_j] \subset [\Gamma]$ для всех $j \in \{1, \dots, J\}$ и для любой функции $f \in C([\Gamma])$ имеем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^J \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой леммы легко свести к случаю, когда все указанные выше коэффициенты $c_n \neq 0$, и N – минимально возможное в таком представлении ломаной Γ . Тогда будем говорить, что Γ имеет порядок N .

Применим индукцию по N . Пусть лемма доказана для всех указанных ломаных порядка не выше $N - 1$, и Γ – ломаная порядка N с представителем γ (и введенными выше обозначениями). Можем считать $N > 3$. Пусть $A_n = \gamma(t_n)$ ($n \in \{1, \dots, N\}$) – последовательные вершины ломаной Γ . Если какие-нибудь соседние ребра этой ломаной лежат на одной прямой, то шаг индукции сделать совсем легко. Далее полагаем, что таких соседних ребер нет. Пусть E – совокупность тех $t' \in (\alpha, \beta)$, для которых путь $\gamma|_{[\alpha, t']}$ является жордановым (незамкнутым). Тогда $E = (\alpha, \beta_1)$ – открытый интервал, $\beta_1 \in (\alpha, \beta)$. При этом найдется единственная точка $\alpha_1 \in [\alpha, \beta_1]$ условием $\gamma(\alpha_1) = \gamma(\beta_1)$. Ломаная Γ_1 с представителем $\gamma|_{[\alpha_1, \beta_1]}$ – замкнутая жорданова. При этом замкнутая ломаная $\Gamma' = \{\gamma|_{[\alpha, \alpha_1]}\} \cup \{\gamma|_{[\beta_1, \beta]}\}$ имеет порядок меньший, чем N , $[\Gamma_1] \subset [\Gamma]$, $[\Gamma'] \subset [\Gamma]$, и $\forall f \in C([\Gamma])$ выполнено

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma'} f(z) dz.$$

Далее ясно. \square

Таким образом, для произвольной замкнутой ломаной утверждение теоремы 8.1 также справедливо.

5. В общем случае остается воспользоваться леммой 7.3 о приближении. \square

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} и пусть функция f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда для любых спрямляемых кривых Γ_1 и Γ_2 в D с одинаковыми началами и концами выполняется равенство:*

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 8.1,

$$0 = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

□

Существование первообразной в односвязной области. Формула Ньютона-Лейбница (Н-Л).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Пусть D – произвольная область в \mathbb{C} , $F \in \mathcal{A}(D)$ и $F'(z) = f(z)$ в D . Тогда F называется *комплексной первообразной* (п/о) для функции f в D .

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Если F_1 и F_2 – две п/о для функции f в D , то $F_1 - F_2 \equiv \text{const}$ в D .

ТЕОРЕМА 8.2. (О существовании п/о в односвязной области). Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , и пусть f удовлетворяет в D условию треугольника. Для любого фиксированного $a \in D$ определим функцию

$$F_a(z) = \int_{\Gamma_{az}} f(\zeta) d\zeta,$$

где Γ_{az} – любая спрямляемая кривая в D с началом в точке a и концом в точке z (по следствию 8.1 значения $F_a(z)$ не зависят от выбора кривой Γ_{az}).

Тогда функция $F_a(z)$ является п/о для функции f в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $z_0 \in D$ и $\delta_0 > 0$ с условием $B(z_0, \delta_0) \subset D$. Докажем, что $F'_a(z_0) = f(z_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу непрерывности f в D найдется $\delta = \delta(\varepsilon) \leq \delta_0$ такое, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$. Для $z \in B(z_0, \delta)$ проведем оценку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{\Gamma_{az}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\Gamma_{az_0}} f(\zeta) d\zeta \right) - f(z_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(z_0) d\zeta \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta \right| \leq \\ &\leq \|f - f(z_0)\|_{[z_0, z]} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} = f(z_0),$$

т.е. $F'_a(z_0) = f(z_0)$. □

ТЕОРЕМА 8.3. (Формула Н-Л). Пусть D – произвольная область в \mathbb{C} , функция f непрерывна в D и для нее существует п/о F в D . Тогда для любой спрямляемой кривой Γ_{ab} в D с началом a и концом b справедлива формула (Ньютона-Лейбница):

$$\int_{\Gamma_{ab}} f(z) dz = F(b) - F(a). \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7.3 о приближении следует, что достаточно установить равенство (8.1) для ломаных в D . Кроме того, очевидно, что равенство (8.1) для ломаной следует из аналогичного равенства для каждого из её последовательных отрезков. Т.е. остается установить (8.1) для случая, когда

$\Gamma_{ab} = [a, b]$ – отрезок в D с параметризацией $\gamma_{ab}(t) = \gamma(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$. По теореме 7.1 получаем:

$$\int_{[a,b]} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 (F(\gamma(t)))'_t dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(b) - F(a).$$

В этой серии равенств применена теорема о производной сложной функции (см. лемму 4.1) и формула Н-Л на отрезке (проверить!). \square

УПРАЖНЕНИЕ 8.2. Пусть D – произвольная область в \mathbb{C} и функция f непрерывна в D . Тогда f имеет п/о в D если и только если для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ в D справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

ПРИМЕР 8.1. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ не имеет п/о в \mathbb{C}_b , поскольку

$$\int_{\partial B(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \neq 0.$$

Интегральная теорема Коши (ИТК) для допустимых областей.

Пусть замкнутый жорданов путь γ_c (с началом в точке c), ограничивающий жорданову область G , является положительно ориентированным относительно G . Если γ – произвольный путь с такими же условиями, то пути γ и γ_c эквивалентны. Пусть $\partial_c^+ G = \{\gamma_c\}$ – кривая, определяемая путем γ_c .

Если теперь b – произвольная точка на ∂G и $\gamma_b \in \partial_b^+ G$, то для любой (ограниченной) функции f на ∂D имеем $\int_{\gamma_b} f(z) dz = \int_{\gamma_c} f(z) dz$ (интегралы существуют или нет одновременно).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. *Положительно ориентированной границей* $\partial^+ G$ жордановой области G в \mathbb{C} называется совокупность всех кривых $\{\partial_c^+ G : c \in \partial G\}$. Таким образом, корректно определен $\int_{\partial^+ D} f(z) dz$.

Смысл обозначения $\partial^- G$ очевиден без дополнительного пояснения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Пусть D_1, \dots, D_S – жордановы области в \mathbb{C} ($S \in \mathbb{N}$) со *спрямляемыми* положительно ориентированными границами $\partial^+ D_1, \dots, \partial^+ D_S$ соответственно. При $S = 1$ положим $D = D_1$, а при $S \geq 2$ предположим, что *замыкания* областей D_2, \dots, D_S попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1 . При $S \geq 2$ кроме того потребуем, чтобы множество $D = D_1 \setminus (\bigcup_{s=2}^S \bar{D}_s)$ было связно, т.е. являлось *областью* (то, что это верно всегда, мы докажем позже, как следствие из теоремы Римана о конформном отображении).

Такие множества D будем называть *допустимыми областями (ДО) ранга S* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. *Положительно ориентированной границей* допустимой области D ранга $S \geq 2$ называется совокупность (цепь) границ:

$$\partial^+ D = \{\partial^+ D_1, \partial^- D_2, \dots, \partial^- D_S\}.$$

Для $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ интеграл от f по $\partial^+ D$ определяется по формуле:

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = \int_{\partial^+ D_1} f(z) dz - \sum_{s=2}^S \int_{\partial^+ D_s} f(z) dz,$$

если указанные справа интегралы существуют.

Справедлива следующая *интегральная теорема Коши*.

ТЕОРЕМА 8.4. (ИТК для ДО). Пусть D – допустимая область в \mathbb{C} и $f \in C(\bar{D})$ удовлетворяет в D условию Δ . Тогда

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0. \quad (8.2)$$

Мы докажем ослабленный вариант этой теоремы для случая т.н. *простых областей*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5. Жорданова область G называется *простейшей*, если её положительно ориентированная граница задается следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = a + r(t)e^{it}, \quad t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$$

(т.е. $\{\gamma\} \in \partial^+ G$). Здесь $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [-\pi, \pi)$ и $r : [\alpha, \alpha + 2\pi] \rightarrow (0, +\infty)$ – непрерывная функция с ограниченной вариацией и условием $r(\alpha) = r(\alpha + 2\pi)$.

Важно, что в указанном случае понятие $\partial^+ G$ определяется напрямую (без использования теоремы Жордана в общем виде). Кроме того, обычно берется $\alpha = -\pi$ или $\alpha = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. В условиях предыдущего определения:

- (1) для γ выполняется теорема Жордана;
- (2) путь γ спрямляем;

$$(3) \quad \text{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ G} \frac{dz}{z - z_0} = 1, \quad \forall z_0 \in G;$$

$$(4) \quad \text{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ G} \frac{dz}{z - z_0} = 0, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \bar{G};$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (1) и (2) достаточно просты (проверить!). Свойства индекса в (3) и (4) уже обсуждены (пользуемся его локальной постоянностью и целочисленностью, и вычисляем указанный индекс по определению в точке a). Как мы независимо покажем чуть ниже (в более общем контексте), для функции $h(z) = \int_{\partial^+ G} (z - z_0)^{-1} dz$ имеем: $h'(z_0) = \int_{\partial^+ G} (z - z_0)^{-2} dz = 0$ вне $[\gamma]$. Последнее равенство нулю вытекает из формулы Ньютона-Лейбница (при переменной z) для функции $(z - z_0)^{-2}$ с п/о $-(z - z_0)^{-1}$. Остается доказать, что $(2\pi i)^{-1} \int_{\partial^+ G} (z - a)^{-1} dz = 1$. Последнее доказывается с применением формулы Н-Л в области \mathbb{C} с разрезом $\{a + t \mid t \in (-\infty, 0]\}$ для функции $(z - a)^{-1}$ с п/о $\ln(z - a)$, пути $\gamma|_{[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]}$ (случай $\alpha = -\pi$), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, и последующим устремлением ε к нулю. \square

**9. Лекция 9. Доказательство ИТК для простых областей.
Интегральная формула Коши. Теорема о среднем и принцип
максимума модуля. Формула Коши для производных. Теорема
Морера. Теорема Вейерштрасса.**

Доказательство ИТК для простых областей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Утверждение ИТК верно для простейших областей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в условиях теоремы 8.4 и определения 8.5 $D = G$ – простейшая область. При $n \in \mathbb{N}$ пусть G_n – область, гомотетичная области G относительно точки a с коэффициентом $(n+1)/n$, и пусть

$$f_n(z) = f\left(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\right).$$

Очевидно, что G_n односвязна и f_n удовлетворяет в G_n условию треугольника (по определению, сравнить соответствующие интегральные суммы). Так как $\bar{G} \subset G_n$, по теореме Коши для односвязной области G_n , функции f_n и замкнутой кривой $\partial^+ G$ имеем:

$$\int_{\partial^+ G} f_n(z) dz = 0.$$

Теперь, поскольку

$$\left| \int_{\partial^+ G} f_n(z) dz - \int_{\partial^+ G} f(z) dz \right| \leq \|f_n - f\|_{\partial G} l(\partial G),$$

остается установить, что $f_n \Rightarrow f$ на ∂G при $n \rightarrow +\infty$. В самом деле, при любом $z \in \partial G$ имеем:

$$\left| z - \left(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\right) \right| \leq \frac{|z-a|}{n+1} \leq \frac{\text{diam}(G)}{n+1},$$

откуда

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| f(z) - f\left(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\right) \right| \leq \omega_{\bar{G}}\left(f, \frac{\text{diam}(G)}{n+1}\right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Область D в \mathbb{C} называется *простой*, если

(1) она является допустимой и все D_s из определения 8.3 для D являются простейшими областями;

(2) существует конечное число простейших областей G'_1, \dots, G'_N со следующими свойствами:

(а) все $G'_n \subset D$ и различные G'_n попарно не пересекаются;

(б) для всякой функции $f \in C(\bar{D})$ имеем:

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = \sum_{n=1}^N \int_{\partial^+ G'_n} f(z) dz.$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.1. Всякое открытое (концентрическое) кольцо $V(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ ($0 < r < R < +\infty$) является простой областью.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *ИТК справедлива для любой простой области.*

УПРАЖНЕНИЕ 9.2. В условиях определения 9.1 всегда $\bar{D} = \bigcup_{n=1}^N \bar{G}'_n$. Кроме того, D всегда связно (без дополнительного требования в определении 8.3).

УПРАЖНЕНИЕ 9.3. Найти простейшую области G с "центром" $a = 0$ такую, что при всех достаточно малых $r > 0$ область $G \setminus \bar{B}(a, r)$ не является простой.

Интегральная формула Коши (ИФК).

ТЕОРЕМА 9.1. (ИФК). Пусть D – допустимая область, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$. Тогда для любого $z_0 \in D$ справедлива формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Для простых областей). Фиксируем $z_0 \in D$ и пусть

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \in \bar{D} \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Тогда $g \in C(\bar{D})$ и g удовлетворяет в D условию треугольника (при $z_0 \in \Delta$ рассматриваемый треугольник Δ разбивается на два треугольника, к каждому из которых применяется предложение 9.1). По ИТК в D имеем:

$$\int_{\partial^+ D} g(z) dz = 0,$$

откуда

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_{\partial^+ D} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Остается доказать, что

$$h(z_0) = \int_{\partial^+ D} \frac{dz}{z - z_0} \equiv 2\pi i, \quad z_0 \in D.$$

Пусть D – простая область с обозначениями определения 9.1. Поскольку функция $h(z)$ непрерывна в D , достаточно (пользуясь определением 9.1 и упражнением 9.2) установить последнее равенство для $z_0 \in G'_n$ при любом фиксированном n , а это вытекает из предложения 8.1 (свойств (3) и (4)). \square

Нам потребуются определение и свойства интеграла (1 рода) $\int_{\gamma} f(z) |dz|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – путь, $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая функция, $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ – разбиение $[\alpha, \beta]$. Пусть $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ – выборка, подчиненная разбиению T , т.е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n]$ для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$. Определим интегральную сумму:

$$\Sigma_{\gamma}^+(T, \tau, f) = \sum_{n=1}^N f(\gamma(\tau_n)) |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|.$$

Если существует конечный предел

$$I^+ = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \Sigma_{\gamma}^+(T, \tau, f)$$

(т.е. $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\lambda(T) < \delta$ и для всякой выборки τ , подчиненной T , имеем $|I^+ - \Sigma_{\gamma}^+(T, \tau, f)| < \varepsilon$), то он называется интегралом 1 рода от функции f по (длине пути) γ и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z) |dz|.$$

Следующие свойства этого интеграла доказываются почти также, как аналогичные (доказанные выше) свойства интеграла $\int_{\gamma} f(z) dz$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. В условиях предыдущего определения:

(1) если путь γ спрямляем и $f \in C([\gamma])$, то $\int_{\gamma} f(z)|dz|$ существует и

$$\left| \int_{\gamma} f(z)|dz| \right| \leq \|f\|_{[\gamma]} l(\gamma);$$

(2) если путь γ — непрерывно дифференцируемый и $f \in C([\gamma])$, то

$$\int_{\gamma} f(z)|dz| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Важно еще отметить, что в указанных обозначениях всегда $\int_{\gamma^-} f(z)|dz| = \int_{\gamma} f(z)|dz|$ (оба интеграла существуют или нет одновременно) и, следовательно, корректно определен $\int_{\partial D} f(z)|dz|$ для любой допустимой области D .

ТЕОРЕМА 9.2. (О среднем). Пусть $R \in (0, +\infty)$ и $f \in \mathcal{A}(B(z_0, R)) \cap C(\overline{B(z_0, R)})$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(z_0, R)} f(z) |dz|. \quad (9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По ИФК:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, R)} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

Остается вычислить последний интеграл (и последний интеграл в формуле 9.1) с помощью стандартной параметризации $\{z = z_0 + Re^{it} \mid t \in [-\pi, \pi]\}$. \square

ТЕОРЕМА 9.3. (Основная теорема алгебры). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ — произвольный многочлен степени n комплексного переменного z ($a_n \neq 0$). Тогда p имеет в \mathbb{C} хотя бы один корень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, $p(z) \neq 0$ при всех z . Тогда $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ — целая функция. Поскольку $|p(z)| \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow +\infty$, мы получаем, что $|f(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Применяя теорему о среднем для f в кругах $B(0, R)$ и стандартную оценку интеграла, получаем, что

$$|f(0)| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(0, R)} f(z) |dz| \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \|f\|_{\partial B(0, R)} = 0.$$

Противоречие. \square

ТЕОРЕМА 9.4. (Принцип максимума модуля). Пусть D — произвольная ограниченная область в \mathbb{C} . Если $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, то для любого $z_0 \in D$ имеем

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)| = \|f\|_{\partial D}. \quad (9.2)$$

При этом, если для некоторого $z_0 \in D$ неравенство (9.2) обращается в равенство, то f постоянна в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что максимум всякой непрерывной на компакте функции достигается. Нам достаточно доказать, что если найдется $z_0 \in D$ с условием $|f(z_0)| \geq \|f\|_{\partial D}$, то f — постоянна. Пусть такое z_0 существует. Без ограничения общности мы можем предположить, что $M = |f(z_0)| = \|f\|_{\overline{D}}$. Положим $E = \{z \in D \mid |f(z)| = M\}$. Ясно, что $E \neq \emptyset$ и E замкнуто в D (последнее вытекает из непрерывности f). Открытость E следует из теоремы о среднем (провести доказательство!). Из связности D получаем, что $E = D$. Итак, $|f(z)| \equiv M$ на \overline{D} . Остается доказать, что $f'(z) = 0$ всюду в D . Если, от противного, существует $z_1 \in D$ с условием $f'(z_1) \neq 0$, то из определения \mathbb{C} -дифференцируемости получаем, что $f(z) = f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + o(z - z_1)$,

$z - z_1 \rightarrow 0$, так что $|f(z)|$ не может быть постоянным ни в какой окрестности точки z_1 . Противоречие. \square

ИФК для производных. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

ТЕОРЕМА 9.5. (ИФК для производных). Пусть D – допустимая область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$. Тогда при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $f^{(k)} \in \mathcal{A}(D)$, причем для любого $z_0 \in D$ справедлива формула:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Эта теорема сразу вытекает из ИФК и следующего утверждения, имеющего и другие важные следствия (например, в частном случае $k = 1$ и $f(z) \equiv 1$ оно уже использовалось в доказательстве предложения 8.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. Пусть Γ – спрямляемая кривая в \mathbb{C} , $f \in C([\Gamma])$. При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$F_k(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^k}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Тогда F_k голоморфна вне $[\Gamma]$ и верна формула: $F'_k(z) = kF_{k+1}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $F_k(z)$ в этом предложении называется *интегралом типа Коши* порядка k от функции f по кривой Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ и положим $d = d(z_0, [\Gamma])$. Пусть всюду далее $\Delta z \in B(0, d/2)$, $\Delta z \neq 0$. Имеем:

$$\frac{F_k(z_0 + \Delta z) - F_k(z_0)}{\Delta z} = \int_{\Gamma} f(z) g_{\Delta z}(z) dz,$$

где

$$g_{\Delta z}(z) = \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^k} - \frac{1}{(z - z_0)^k} \right).$$

Докажем, что $g_{\Delta z} \Rightarrow k(z - z_0)^{-k-1}$ на $[\Gamma]$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Для этого сначала напомним, что (по элементарной формуле $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$)

$$g_{\Delta z}(z) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(z - z_0)^j (z - z_0 - \Delta z)^{k+1-j}},$$

причем при $z \in [\Gamma]$ и $|\Delta z| < d/2$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - z_0)^j (z - z_0 - \Delta z)^{k+1-j}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \right| &\leq \frac{1}{d^j} \left| \frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^{k+1-j}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1-j}} \right| \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{d^j} \left| \sum_{l=1}^{k+1-j} \frac{1}{(z - z_0)^l (z - z_0 - \Delta z)^{k+2-j-l}} \right| \leq \frac{2^{k+1-j} (k+1-j) |\Delta z|}{d^{k+2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\Delta z \rightarrow 0$. Остается воспользоваться оценкой (6.1) для функции $f(z)g_{\Delta z}(z) - kf(z)/(z - z_0)^{k+1}$ вместо $f(z)$. \square

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Если f имеет в D (комплексную) n -о, то $f \in \mathcal{A}(D)$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.4. Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , функция f голоморфна в D (в частности, f удовлетворяет условию треугольника в D), и пусть f не обращается в ноль всюду в D . Тогда существует голоморфная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\text{Ln } f(z)$ в D (т.е. существует $g \in \mathcal{A}(D)$ с условиями $g(z) \in \text{Ln } f(z)$ для всех $z \in D$, или же $f(z) = \exp(g(z))$).

СЛЕДСТВИЕ 9.0.1. Пусть $n \in \{2, 3, \dots\}$. В условиях предыдущего упражнения функция $h_n(z) = \exp(g(z)/n)$ является голоморфной ветвью многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в D (т.е. $h_n \in \mathcal{A}(D)$), причем $h_n(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$ для всех $z \in D$, т.е. $f(z) = (h_n(z))^n$.

ТЕОРЕМА 9.6. (Морера). Пусть D – произвольная область в \mathbb{C} и f удовлетворяет в D условию Δ . Тогда $f \in \mathcal{A}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться теоремой 8.2 о первообразной в односвязной области (для кругов из D) и следствием 9.2. \square

Теорема Вейерштрасса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Пусть D – область в \mathbb{C} . Последовательность $\{f_n\} = \{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ сходится равномерно внутри D к функции f при $n \rightarrow +\infty$ (коротко: $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$), если эта последовательность сходится к f равномерно на всяком компакте K из D (т.е. $\|f - f_n\|_K \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$).

ПРИМЕР 9.1. Последовательность функций $z^n \rightrightarrows 0$ внутри B_1 , но не сходится равномерно на B_1 при $n \rightarrow +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Пусть D – область в \mathbb{C} . Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функций $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ сходится равномерно внутри D к своей сумме S , если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм этого ряда сходится к S равномерно внутри D при $n \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 9.7. (Вейерштрасса). Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций из $\mathcal{A}(D)$ равномерно внутри D сходится к функции f при $n \rightarrow +\infty$. Тогда $f \in \mathcal{A}(D)$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D при $n \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство $f \in \mathcal{A}(D)$ следует из леммы Гурса, свойства сохранения условия Δ при равномерной сходимости внутри D и теоремы 9.6 (Морера). Из соображений индукции и компактности нам достаточно установить, что $\|f'_n - f'\|_K \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, где K – произвольный замкнутый круг в D . Пусть $K = \overline{B(a, r)}$ и $d > 0$ таково, что $\overline{B(a, r + d)} \subset D$. Положим $\Gamma^+ = \partial^+ B(a, r + d)$ ($\Gamma = \partial B(a, r + d)$ – компакт в D) и воспользуемся теоремой 9.5 для f_n и f в области $B(a, r + d)$ при $k = 1$. Если $z_0 \in K$, то

$$|f'_n(z_0) - f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma^+} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|f_n - f\|_{\Gamma} \cdot d^{-2} \cdot 2\pi(r + d) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$, поскольку $f_n \rightrightarrows f$ на Γ . \square

**10. Лекция 10. Степенные ряды. Теорема Коши-Тейлора и её следствия.
Теорема о нулях и теорема единственности для голоморфной функции.**

Степенные ряды. Лемма Абеля. Формула Коши-Адамара.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (10.1)$$

Постоянные $c_n \in \mathbb{C}$ называются *коэффициентами*, а точка $z_0 \in \mathbb{C}$ – *центром* степенного ряда (10.1). Для всякого $N \in \mathbb{N}$ полином

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n(z - z_0)^n$$

называется *частичной суммой порядка N* ряда (10.1).

Множество точек сходимости ряда (10.1) обозначим через E ; $z_0 \in E \neq \emptyset$.

ЛЕММА 10.1. (Абеля). *Если ряд (10.1) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится равномерно внутри круга $B(z_0, |z_1 - z_0|)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что имеет место равномерная сходимость на любом замкнутом круге $\overline{B}(z_0, r)$, где $r < |z_1 - z_0|$.

Положим $q = r/|z_1 - z_0|$. Поскольку $q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ сходится. Напомним, что необходимым условием сходимости (числового) ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$$

является условие $c_n(z_1 - z_0)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, из которого для всех n следует оценка $|c_n(z_1 - z_0)^n| < M$ при некотором $M > 0$.

Покажем, что сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} Mq^n$ является равномерной мажорантой для ряда (10.1) при $z \in \overline{B}(z_0, r)$:

$$|c_n(z - z_0)^n| = |c_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq Mq^n.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд (10.1) сходится равномерно на $B(z_0, r)$, что и требовалось. \square

СЛЕДСТВИЕ 10.1.1. *Если ряд (10.1) расходится в некоторой точке $z_2 \neq z_0$, то он расходится всюду вне замкнутого круга $B(z_0, |z_2 - z_0|)$.*

СЛЕДСТВИЕ 10.1.2. *Для любого ряда вида (10.1) определено число $R \in [0, +\infty]$ и (при $R > 0$) круг $B = B(z_0, R)$ со следующим свойством: ряд (10.1) сходится равномерно внутри B и расходится вне \overline{B} .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Число R называется *радиусом сходимости*, а круг $B = B(z_0, R) = E^\circ$ – *областью (кругом) сходимости* ряда (10.1).

СЛЕДСТВИЕ 10.1.3. *Пусть $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ – сумма ряда (10.1) и $R > 0$. Тогда функция $S(z)$ голоморфна в круге сходимости $B(z_0, R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой Абеля, применяем теорему Вейерштрасса к последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм ряда (10.1). \square

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Доказать формулу Коши Адамара для радиуса сходимости ряда (10.1):

$$R = \frac{1}{l}, \text{ где } l = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty].$$

По ряду (10.1) определим еще один степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} (n+1) (z - z_0)^n.$$

Он называется *почленно продифференцированным рядом* для ряда (10.1).

Обозначим его радиус сходимости через R' .

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда (10.1), $S(z)$ – его сумма. Тогда $R' = R$ и $\forall z \in B = B(z_0, R)$ выполнено равенство

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} (n+1) (z - z_0)^n. \quad (10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (10.1) для $z \in B$ следует из теоремы Вейерштрасса, примененной к последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм. Отсюда же следует оценка $R' \geq R$. Равенство $R = R'$ можно получить из формулы Коши-Адамара. \square

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Ряд (10.1) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

Рассмотрим теперь *почленно проинтегрированный ряд* для ряда (10.1):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (z - z_0)^n. \quad (10.3)$$

Обозначим через R_f его радиус сходимости. Следующее утверждение легко вытекает из теоремы 10.2 и доказанной ранее теоремы Ньютона-Лейбница.

СЛЕДСТВИЕ 10.2. Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда (10.1). Тогда $R_f = R$ и $\forall z \in B = B(z_0, R)$ выполняется равенство

$$\int_{\Gamma_{z_0 z}} S(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (z - z_0)^n,$$

где последний интеграл (первообразная функции $S(z)$) берется по любой спрямляемой кривой $\Gamma_{z_0 z}$ в B с началом z_0 и концом z .

Теорема Коши-Тейлора (ТКТ) и ее следствия.

ТЕОРЕМА 10.2. (ТКТ, о разложении в ряд Тейлора). Пусть $r \in (0, +\infty]$, $B = B(z_0, r)$, и пусть $f \in \mathcal{A}(B)$. Тогда $\forall z \in B$ выполняется равенство $f(z) = T_{z_0}^f(z)$, где

$$T_{z_0}^f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (10.4)$$

– ряд Тейлора функции f с центром в точке z_0 . В частности, для радиуса сходимости R_T ряда Тейлора $T_{z_0}^f$ справедлива оценка $R_T \geq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим равенство (10.4) в произвольной точке $z \in B$. Положим $\delta = |z - z_0| < r$ и зафиксируем $\rho \in (\delta, r)$.

Воспользуемся интегральной формулой Коши в круге $B_\rho = B(z_0, \rho)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что $\forall \zeta \in \partial B_\rho$ верно $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q$, где $q = \frac{\delta}{\rho} < 1$, поэтому

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{\zeta \in \partial B_\rho\}$, поскольку он мажорируется числовым рядом $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^k$.

Нам понадобится следующее простое утверждение.

УПРАЖНЕНИЕ 10.2. Пусть Γ – спрямляемая кривая, $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – последовательность функций, непрерывных на $[\Gamma]$, с условием $F_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F$ на $[\Gamma]$, и пусть $g \in C([\Gamma])$. Тогда

$$\int_{\Gamma} g(\zeta) F_n(\zeta) d\zeta \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\Gamma} g(\zeta) F(\zeta) d\zeta. \quad (10.5)$$

Воспользуемся этим утверждением при $\Gamma = \partial^+ B_\rho$, $F_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ и $g(\zeta) = f(\zeta)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} f(\zeta) \sum_{k=0}^n \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \stackrel{(10.5)}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались ИФК для производных.

Теорема 10.2 доказана. \square

СЛЕДСТВИЕ 10.3. (Единственность разложения в степенной ряд). Пусть $r > 0$, $B = B(z_0, r)$ и для всех $z \in B$ справедливо равенство $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что указанный здесь ряд автоматически имеет радиус сходимости не менее r . Остается воспользоваться теоремой 10.1 о почленном дифференцировании степенного ряда. \square

СЛЕДСТВИЕ 10.4. (Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора). В условиях теоремы 10.2, при $\rho \in (0, r)$ положим $M_\rho = \max_{\zeta \in \partial B_\rho} |f(\zeta)|$. Тогда для коэффициентов

Тейлора $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ справедлива оценка:

$$|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}. \quad (10.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужная оценка следует из ИФК для производных:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_\rho}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

\square

СЛЕДСТВИЕ 10.5. (Теорема Лиувилля). Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – целая функция, и пусть найдется $p \in [0, +\infty)$ с условием $f(z) = O(|z|^p)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда f является многочленом степени не выше $[p]$.

В частности, если целая функция f ограничена, то $f \equiv \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, по теореме 10.2 всюду в \mathbb{C} функция f представляется своим рядом Тейлора с центром в нуле, т.е. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Положим $M_\rho = \max_{|\zeta|=\rho} |f(\zeta)|$. По условию, найдется константа $C > 0$ такая, что $M_\rho \leq C(\rho^p + 1)$.

По предыдущему следствию имеем оценку: $|c_n| \leq \frac{C(\rho^p + 1)}{\rho^n}$, справедливую для всех $\rho > 0$. Если в этой оценке фиксировать любое $n > p$ и устремить ρ к бесконечности, то получим $c_n = 0$, что и требовалось доказать. \square

Табличные разложения в ряд Тейлора ($z_0 = 0$).

Из теоремы 10.2, формулы Коши-Адамара и следствия 10.2 (для доказательства (7)) вытекают следующие (табличные) разложения в ряд Тейлора:

$$(1) \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < +\infty;$$

$$(2) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad |z| < +\infty;$$

$$(3) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \quad |z| < +\infty;$$

$$(4) \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$(5) \quad \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$(6) \quad (1+z)_{(o)}^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2} z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} z^n + \dots, \quad |z| < 1;$$

$$(7) \quad \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{2m+1}, \quad |z| < 1.$$

Теорема о нулях и теорема единственности для ГФ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Пусть даны точка $a \in \mathbb{C}$ и функция $f \in \mathcal{A}(a)$. Если $f(a) = 0$, то точка a называется *нулем голоморфной функции* f .

Если $\exists p \in \mathbb{N}$ с условием $0 = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) \neq f^{(p)}(a)$, то говорят, что a – *ноль порядка p для функции* f .

При $p = 1$ точка a называется *простым нулем функции* f .

Если $f(a) \neq 0$, то (для общности) точка a называется *нулем функции f порядка 0*.

Если не оговорено противного, порядок нуля далее считается натуральным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – ноль функции f . Говорят, что он *изолированный*, если $\exists \delta > 0$ такое, что $f(z) \neq 0$ в $V'(a, \delta) = B(a, \delta) \setminus \{a\}$.

ТЕОРЕМА 10.3. (О нулях ГФ). Пусть a – ноль голоморфной функции f . Следующие условия эквивалентны:

- (1) a – *изолированный ноль функции* f ;
- (2) a *имеет некоторый конечный порядок* $p \in \mathbb{N}$;
- (3) $\exists g \in \mathcal{A}(a)$ с условиями $g(a) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки a имеет место равенство $f(z) = (z-a)^p g(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, $f \in \mathcal{A}(a)$, т.е. существуют $\delta > 0$ и круг $B = B(a, \delta)$ такой, что $f \in \mathcal{A}(B)$.

Докажем (1) \Rightarrow (2) от противного. Если a – ноль бесконечного порядка, то $f^{(n)}(a) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому $T_a^f \equiv 0$. Но $f(z) = T_a^f(z)$ в B , следовательно, $f \equiv 0$ в B и точка a не является изолированным нулем. Противоречие.

Установим (2) \Rightarrow (3). Пусть $p \in \mathbb{N}$ – порядок нуля a для ГФ f . Тогда $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$, но $f^{(p)}(a) \neq 0$. Следовательно, для коэффициентов $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ряда T_a^f верно $c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1} = 0$, но $c_p \neq 0$. В круге B справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(z) = T_a^f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_p(z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots = \\ &= (z-a)^p(c_p + c_{p+1}(z-a) + \dots) = (z-a)^p g(z), \end{aligned}$$

где функция $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{p+n}(z-a)^n$ голоморфна в круге B и $g(a) = c_p \neq 0$.

Осталось доказать (3) \Rightarrow (1). Поскольку $g \in \mathcal{A}(B)$ и $g(a) \neq 0$, функция $g(z) \neq 0$ в некотором (возможно, меньшем, чем B) круге $B_1 = B(a, \delta_1)$, $\delta_1 > 0$. Функция $(z-a)^p$ не обращается в ноль в проколотой окрестности точки a . Следовательно, $f(z) = (z-a)^p g(z) \neq 0$ в B'_1 , т.е. a – изолированный ноль функции f . \square

ТЕОРЕМА 10.4. (Единственности). Пусть D – область в \mathbb{C} и функция $f \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $Z_f = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ – множество нулей f в D . Если Z_f имеет в D хотя бы одну предельную точку, то $Z_f = D$, т.е. $f \equiv 0$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in D$ – предельная точка Z_f . В силу непрерывности функции f , $a \in Z_f$. Следовательно, a – неизолированный ноль ГФ f . Обозначим через \tilde{Z}_f множество всех неизолированных нулей функции f в D , $\tilde{Z}_f \subseteq Z_f \subseteq D$. Мы установили, что $\tilde{Z}_f \neq \emptyset$. Докажем, что \tilde{Z}_f одновременно открыто и замкнуто в D . Тогда в силу связности D будем иметь $\tilde{Z}_f = D$, откуда следует утверждение теоремы.

Пусть $z_0 \in \tilde{Z}_f$. Тогда по теореме 10.3 точка z_0 – ноль бесконечного порядка для f . Следовательно, $f(z) = T_{z_0}^f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $U(z_0) \subseteq D$ точки z_0 . Ясно, что $U(z_0) \subseteq \tilde{Z}_f$, т.е. любая точка входит в \tilde{Z}_f вместе с некоторой окрестностью. Замкнутость множества \tilde{Z}_f в D следует из непрерывности f . \square

ПРИМЕР 10.1. Отметим, что прямого аналога теоремы 10.4 для функций действительного переменного нет даже в классе $C^\infty(\mathbb{R})$. В качестве примера можно взять функцию

$$f(x) = e^{-1/x^2} \sin(1/x), \quad x \neq 0,$$

$f(0) = 0$. Здесь точка $x = 0$ – не изолированный ноль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.3. При $R_1 < R_2$ множество $V_* = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ называется *кольцом сходимости ряда* (11.2). По доказанному, ряд (11.2) сходится абсолютно и равномерно внутри V_* .

(При $R_1 \geq R_2$ имеем $V_* = \emptyset$.)

ТЕОРЕМА 11.2. (Лорана). Пусть $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ – кольцо с центром $z_0 \in \mathbb{C}$ ($0 \leq r < R \leq +\infty$) и функция $f \in \mathcal{A}(V)$.

Тогда всюду в V функция f разлагается в обобщенный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (11.3)$$

с коэффициентами c_n , $n \in \mathbb{Z}$, однозначно определяющимися по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (11.4)$$

где $\rho \in (r, R)$ – произвольно фиксированное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $z \in V$ и выберем r_0 и R_0 с условиями $r < r_0 < |z - z_0| < R_0 < R$. Обозначим $\Gamma_0^+ = \partial^+ B(z_0, R_0)$ и $\gamma_0^+ = \partial^+ B(z_0, r_0)$. В кольце $V_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid r_0 < |z - z_0| < R_0\}$ воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = F_0(z) + f_0(z),$$

где

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad f_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Представление для F_0 получается как в доказательстве теоремы Коши-Тейлора:

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \{0, 1, \dots\}. \quad (11.5)$$

Рассмотрим подробнее $f_0(z)$. В силу выбора r_0 , для точек $\zeta \in [\gamma_0]$ выполнено неравенство $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, поэтому

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причем последний ряд сходится абсолютно и равномерно (по ζ) на $[\gamma_0]$. Сделав замену $m = -n - 1$, можно записать предыдущую цепочку равенств в виде

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}}.$$

Повторяя обоснование смены порядка суммирования и интегрирования в доказательстве теоремы Коши-Тейлора, получаем равенство:

$$f_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z - z_0)^m, \quad c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{m+1}}, \quad m \in \{-1, -2, \dots\}. \quad (11.6)$$

Теперь важно отметить, что при каждом фиксированном n интегралы в (11.4) для всех $\rho \in (r, R)$ совпадают: достаточно при любых $\rho_1 < \rho_2$ из (r, R) применить интегральную теорему Коши для кольца $\{\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ и функции f .

Объединяя (11.5) и (11.6), получаем представление для $f(z)$, имеющее нужный вид (11.3) с коэффициентами (11.4). По доказанному выше ряд (11.3) сходится равномерно внутри V .

Докажем единственность. Пусть для f в V справедливо какое-то представление вида (11.3). Тогда ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ сходится равномерно внутри V . Поэтому при фиксированных $p \in \mathbb{Z}$ и $\rho \in (r, R)$ получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{p+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, \rho)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (\zeta - z_0)^{n-p-1} \right) d\zeta = c_p$$

по свойству ортогональности степеней. Теорема доказана. \square

СЛЕДСТВИЕ 11.1. (Неравенства Коши для коэффициентов Лорана). В условиях и обозначениях теоремы Лорана, при $\rho \in (r, R)$ определим $M_\rho = \|f\|_{\partial B(z_0, \rho)}$. Тогда справедливы оценки

$$|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (11.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству неравенств Коши для коэффициентов Тейлора. \square

Классификация изолированных особых точек (ИОТ) ГФ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.4. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ и функция $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$, но $f \notin \mathcal{A}(a)$ или $f(a)$ не определена. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой (ИОТ) функции* f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.5. ИОТ a для функции f называется

- *устранимой*, если существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- *полюсом*, если существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;
- *существенно особой точкой*, если не существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

ТЕОРЕМА 11.3. (Об устраняемой особой точке). Для ИОТ a функции f следующие условия эквивалентны:

- (1) точка a *устранима*;
- (2) функция f *ограничена* в некоторой проколотой окрестности $B'(a, \delta_1)$, $\delta_1 < \delta$;
- (3) ряд Лорана функции f в кольце $B'(a, \delta)$ *не содержит отрицательных степеней* (т.е. $c_n = 0$ при $n < 0$). В этом случае говорят, что *главная часть ряда Лорана отсутствует*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \Rightarrow (2). Из существования $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ следует ограниченность f в некоторой проколотой окрестности $B'(a, \delta_1)$ точки a ($\delta_1 < \delta$), т.е.

$$\sup\{|f(z)| : z \in B'(a, \delta_1)\} = M < +\infty.$$

(2) \Rightarrow (3). Воспользуемся неравенствами Коши (11.7). Поскольку

$$M_\rho = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)| \leq M \text{ при } \rho \in (0, \delta_1), \text{ при } n < 0 \text{ имеем:}$$

$$|c_n| \leq M_\rho \rho^{-n} \leq M \rho^{-n} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0,$$

откуда $c_n = 0$ при $n < 0$.

(3) \Rightarrow (1). Очевидно, что $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$. \square

СЛЕДСТВИЕ 11.2. Если a — *устраняемая особая точка*, то, определяя $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$, получаем $f \in \mathcal{A}(B(a, \delta))$.

ПРИМЕР 11.1. Положим $f(z) = (\sin z)/z$ при $z \neq 0$ и $f(0) = 1$. Тогда f — *целая функция*.

ТЕОРЕМА 11.4. (О полюсах). Пусть $a \in \mathbb{C}$ – ИОТ для функции $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) a – полюс;
- (2) ряд Лорана функции f в $B'(a, \delta)$ содержит конечное (ненулевое) число отрицательных степеней (его главная часть конечна), т.е. $\exists p \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_{-p} \neq 0.$$

В этом случае говорят, что a – полюс функции f порядка p . При $p = 1$ полюс называют простым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \Rightarrow (2). По условию, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, поэтому $\exists \delta_1 \in (0, \delta)$ такое, что $f(z) \neq 0$ при $z \in B'(a, \delta_1)$. Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, голоморфную в $B'(a, \delta_1)$. Ясно, что существует $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$, поэтому, положив $g(a) = 0$, получим функцию $g \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1))$ (по следствию 11.2). Точка a – изолированный ноль функции g некоторого (конечного) порядка $p \in \mathbb{N}$. По теореме о нулях ГФ, существует $h \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1))$ такая, что $g(z) = (z-a)^p h(z)$, причем $h(a) \neq 0$, откуда $h(z) \neq 0$ при $z \in B(a, \delta_1)$. Следовательно, определена функция $\tilde{h}(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1))$.

Разложим функцию \tilde{h} в $B(a, \delta_1)$ в ряд Тейлора: $\tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$, где $a_0 \neq 0$. Тогда для функции f в $B'(a, \delta_1)$ имеем:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^p \tilde{h}(z)} = \frac{a_0}{(z-a)^p} + \frac{a_1}{(z-a)^{p-1}} + \dots$$

В силу единственности ряда Лорана, это же разложение верно и в $B'(a, \delta)$.

(2) \Rightarrow (1). Очевидно. □

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Для $f(z) = \sin(z)/z^2$ точка $z = 0$ – простой полюс.

ЗАМЕЧАНИЕ. В обозначениях доказательства теоремы 11.4 справедливо следующее утверждение: ИОТ a – полюс порядка $p \geq 1$ для функции f , если и только если a – ноль порядка p для функции $g(z) = 1/f(z)$ при $z \in B'(a, \delta_1)$, $g(a) = 0$.

Напомним, что при $f \in \mathcal{A}(a)$ и $f(a) \neq 0$ точка a называется нулем функции f порядка 0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Пусть даны функции $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(B(a, \delta))$ и пусть точка a – ноль порядка $p_j \in \mathbb{Z}_+$ для функции f_j , $j \in \{1, 2\}$.

Положим $f = f_1/f_2$. Тогда при $p_1 \geq p_2$ точка a – устранимая особая точка для f (при $p_2 = 0$ в этой точке нет особенности), а при $p_2 > p_1$ точка a – полюс порядка $(p_2 - p_1)$ для f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о нулях ГФ, существует число $\delta' \in (0, \delta)$ такое, что в окрестности $B(a, \delta')$ справедливы представления $f_1(z) = (z-a)^{p_1} h_1(z)$, $f_2(z) = (z-a)^{p_2} h_2(z)$, причем функции h_1 и h_2 голоморфны и не обращаются в ноль в $B(a, \delta')$, т.е. функция $h(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}$ тоже голоморфна в $B(a, \delta')$.

При $p_1 \geq p_2$ функция f имеет вид $f(z) = (z-a)^{p_1-p_2} h(z)$, поэтому существует конечный $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, так что точка a – устранима для f .

При $p_1 < p_2$ функция f имеет вид $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^{p_2-p_1}}$, откуда точка a – полюс порядка $(p_2 - p_1)$ для f по доказанному в теореме 11.4. □

СЛЕДСТВИЕ 11.3. ИОТ a функции $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$ является существенно особой, если и только если ряд Лорана функции f в $B'(a, \delta)$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых в главной части (т.е. существует бесконечно много $n < 0$ таких, что $c_n \neq 0$).

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Для $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ – существенно особая.

ТЕОРЕМА 11.5. (Сохоцкого). Пусть $a \in \mathbb{C}$ – существенно особая точка для функции $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$. Тогда $\forall b \in \mathbb{C}^\#$ найдется последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset B'(a, \delta)$ с условиями $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 11.3, функция f не может быть ограниченной ни в какой проколотой окрестности $B'(a, r)$, $r \in (0, \delta)$ (иначе a была бы устранимой для f). Так что в условиях нашей теоремы случай $b = \infty$ очевиден.

Зафиксируем теперь произвольное $b \in \mathbb{C}$. Если $\forall r \in (0, \delta)$ найдется такое $z_r \in B'(a, r)$, что $f(z_r) = b$, то всё доказано.

Пусть теперь $\exists r_0 \in (0, \delta)$ такое, что $f(z) \neq b$ в $B'(a, r_0)$. Рассмотрим функцию $g(z) = 1/(f(z) - b) \in \mathcal{A}(B'(a, r_0))$, для которой точка a – существенно особая (проверить!). По доказанному, найдется $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset B'(a, r_0) \subset B'(a, \delta)$ с условиями $a_n \rightarrow a$ и $g(a_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Откуда $f(a_n) \rightarrow b$ при $n \rightarrow +\infty$. \square

Связь рядов Лорана с рядами Фурье.

Пусть $V = \{r < |z| < R\}$ – кольцо при $0 \leq r < 1 < R \leq +\infty$. В частности, окружность $\Gamma_1 = \{|z| = 1\} \subset V$. При $f \in \mathcal{A}(V)$ функция $g(t) = f(e^{it})$ является 2π -периодической бесконечно-дифференцируемой функцией на \mathbb{R} . Тогда, если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ – разложение функции f в ряд Лорана в V , то $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ – разложение функции g в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ (в комплексной форме).

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Разложить функцию $g(t) = 1/(2 - \cos(t))$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.

Указание. Пусть $z = e^{it}$, тогда $\cos(t) = (z + 1/z)/2$ и в качестве f следует взять функцию $f(z) = (2 - (z + 1/z)/2)^{-1} = -2z/(z^2 - 4z + 1)$, голоморфную в кольце $\{2 - \sqrt{3} < |z| < 2 + \sqrt{3}\}$.

Ответ: $g(t) = 1/\sqrt{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2/\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n \cos(nt)$.

12. Лекция 12. Лемма Шварца и её следствие. Пространства Бергмана $A^p(D)$ и пространство $A(D)$. ИОТ ∞ . Вычеты в ИОТ. Теорема Коши о вычетах. Примеры вычисления интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах.

Лемма Шварца. Конформные изоморфизмы круговых областей.

ТЕОРЕМА 12.1. (Лемма Шварца). Пусть $B_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ – единичный круг и $f \in \mathcal{A}(B_1)$. Пусть $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$ при всех $z \in B_1$. Тогда $|f(z)| \leq |z|$ для всех $z \in B_1$ и, следовательно, $|f'(0)| \leq 1$.

Если найдется $z_1 \in B_1$ такое, что $z_1 \neq 0$ и $|f(z_1)| = |z_1|$, то найдется $\theta \in (-\pi, \pi]$ с условием $f(z) = e^{i\theta}z$ для всех $z \in B_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $g(z) = f(z)/z$, имеющую устранимую особую точку $z = 0$. Полагая $g(0) = f'(0)$, получаем $g \in \mathcal{A}(B_1)$.

Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$, и в круге $B(0, 1 - \varepsilon)$ к функции g применим принцип максимума модуля:

$$|g(z)| \leq \|g\|_{\partial B(0, 1 - \varepsilon)} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad z \in B(0, 1 - \varepsilon).$$

Фиксируя $z \in B_1$ и устремляя ε к нулю, получаем, что $|g(z)| \leq 1$ для всех $z \in B_1$. Следовательно, $|f(z)| \leq |z|$ при всех $z \in B_1$.

Если же найдется $z_1 \in B_1 \setminus \{0\}$ с условием $|f(z_1)| = |z_1|$, то $|g(z_1)| = 1$. Вновь применяя принцип максимума модуля в кругах $B(0, 1 - \varepsilon)$ и устремляя ε к нулю, получаем, что $g(z) \equiv g(z_1) = e^{i\theta}$ в B_1 (для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi]$). Отсюда $f(z) = e^{i\theta}z$ при всех $z \in B_1$. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.1. Пусть D_1 и D_2 – круговые области в \mathbb{C} (т.е. открытые круги или полуплоскости). Если функция f является конформным изоморфизмом D_1 на D_2 , то f – ДЛО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_j \in D_j$, $j \in \{1, 2\}$, причем $a_2 = f(a_1)$. Существуют ДЛО $\Lambda_j : B_1 \xrightarrow{\text{на}} D_j$ со свойством $\Lambda_j(0) = a_j$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим конформный изоморфизм $g = \Lambda_2^{-1} \circ f \circ \Lambda_1 : B_1 \xrightarrow{\text{на}} B_1$. Он удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|g(z)| \leq |z|$ для всех $z \in B_1$. Но g^{-1} тоже удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ при всех $z \in B_1$, что эквивалентно условиям $|z| \leq |g(z)|$ при всех $z \in B_1$. Следовательно, $|g(z)| = |z|$, и тогда $g(z) = e^{i\theta}z$ для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi)$. В частности, g – ДЛО. Но тогда $f = \Lambda_2 \circ g \circ \Lambda_1^{-1}$ – тоже ДЛО, что и требовалось. \square

Пространства Бергмана $A^p(D)$ и пространство $A(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Для произвольной области D в \mathbb{C} и $p \in [1, +\infty]$ определим следующие p -пространства Бергмана голоморфных функций в D :

(1) при $p = +\infty$ полагаем $\mathcal{A}^\infty(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^\infty(D)$ с нормой

$$\|f\|_{\infty, D} = \sup_{z \in D} |f(z)|;$$

эти пространства являются банаховыми по теореме Вейерштрасса;

(2) при $p \in [1, +\infty)$ определим $\mathcal{A}^p(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^p(D)$ с нормой

$$\|f\|_{p, D} = \left(\int_D |f(z)|^p dx dy \right)^{1/p};$$

эти пространства являются банаховыми по теореме Вейерштрасса с дополнительным применением теоремы о среднем по кругам и неравенства Гельдера (проверить); пространства $\mathcal{A}^2(D)$ являются гильбертовыми с эрмитовым произведением

$$(f, g)_D = \int_D f(z) \overline{g(z)} dx dy.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Для произвольной области D в \mathbb{C} , $D \neq \mathbb{C}$, при $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$K_n = \{z \in D \mid |z| \leq n, d(z, \partial D) \geq 1/n\}$$

и n_K – первый номер n , для которого $K_n \neq \emptyset$. Тогда $\{K_n\}_{n=n_K}^{+\infty}$ называется *стандартным исчерпанием* области D (указанной возрастающей последовательностью компактов). При $D = \mathbb{C}$ полагаем $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$.

В пространстве $\mathcal{A}(D)$ введем следующую (бинарную) величину:

$$\rho_{\mathcal{A}}(f, g) = \sum_{n=n_K}^{+\infty} 2^{-n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. (а) пользуясь возрастанием функции $\varphi(t) = t/(1+t)$ на $[0, +\infty)$ и её свойством $\varphi(t_1 + t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$ при $t_1 \geq 0$ и $t_2 \geq 0$, доказать, что $\rho_{\mathcal{A}}(f, g)$ является метрикой;

(б) установить, что сходимость последовательностей в этой метрике эквивалентна равномерной сходимости внутри D , откуда сразу вытекает *полнота* метрики $\rho_{\mathcal{A}}(f, g)$;

(в)* доказать, что эта метрика ненормируема (теорема П.С. Урысона).

Изолированная особая точка $z = \infty$.

Назовем область $B_{z_0}(\infty, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > 1/\delta\} \cup \{\infty\}$ (соответственно, $B'_{z_0}(\infty, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > 1/\delta\}$) – δ -окрестностью точки ∞ в \mathbb{C}^{\sharp} (соответственно, *проколотой δ -окрестностью* точки ∞) с антицентром z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3. Пусть функция f определена в окрестности $B_{z_0}(\infty, \delta)$ точки ∞ и при этом существует конечный $\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty)) =: f'(\infty)$. Тогда этот предел называется *комплексной производной функции f в точке ∞* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4. Если $f \in \mathcal{A}(B'_{z_0}(\infty, \delta))$, то точка ∞ всегда по определению является ИОТ для f (даже если существует $f'(\infty)$). ИОТ ∞ для функции f называется

- *устранимой*, если $\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$;
- *полосом*, если $\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$;
- *существенно особой точкой*, если $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. Теоремы 11.3, 11.4, 11.5 с естественными изменениями остаются справедливыми и для случая $a = \infty$: надо только называть главной частью ряда Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ для f в $B'_{z_0}(\infty, \delta)$ сумму его натуральных степеней.

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Дать определение *порядка полюса* в точке ∞ и доказать его независимость от антицентра z_0 .

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Доказать утверждение следствия 12.1 для любых круговых областей в \mathbb{C}^{\sharp} .

Вычет в ИОТ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.5. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – ИОТ функции $f \in \mathcal{A}(B'(a, R))$, $R > 0$. При $\rho \in (0, R)$ положим $\Gamma_{\rho}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = \rho\}^+ = \partial^+ B(a, \rho)$. Тогда *вычетом функции f в точке a* называется величина

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho}^+} f(z) dz.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. Пусть $(*) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - a)^n$ – ряд Лорана функции f в $B'(a, R)$. Тогда $\operatorname{res}_a f = c_{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд (*) сходится равномерно внутри $B'(a, R)$, в частности, на $\partial B(a, \rho)$ для всякого $\rho \in (0, R)$. Интегрируя почленно и пользуясь свойством ортогональности степеней, получаем требуемое. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Из этого предложения, в частности, следует корректность определения вычета функции в точке.

СЛЕДСТВИЕ 12.2.1. Если $a \in \mathbb{C}$ – устранимая для f , то $\operatorname{res}_a f = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 12.2.2. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – полюс порядка p для функции $f \in \mathcal{A}(B'(a, R))$. Тогда $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} ((z-a)^p f(z))^{(p-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ – ряд Лорана функции f в $B'(a, R)$, то

$$\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+p} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-p} (z-a)^n$$

– ряд Тейлора для функции $g(z) = (z-a)^p f(z) \in \mathcal{A}(B(a, R))$ (доопределенной $g(a) = c_{-p}$). Дифференцируя почленно последний ряд, получаем:

$$((z-a)^p f(z))^{(p-1)} = (p-1)! c_{-1} + (z-a) \cdot h(z), \quad h(z) \in \mathcal{A}(B(a, R)).$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow a$, деля на $(p-1)!$ и пользуясь предложением 12.2, получаем требуемое. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.2.3. Пусть $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(B(a, R))$. Пусть $f_1(a) \neq 0$, т.е. порядок нуля функции f_1 в точке a равен 0. Пусть $f_2(a) = 0$, но $f_2'(a) \neq 0$, т.е. порядок нуля функции f_2 в точке a равен 1. Тогда

$$\operatorname{res}_a f = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий вытекает, что функция f имеет в точке a полюс порядка $p = 1$. Пользуясь следствием 12.2.2, имеем:

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = f_1(a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{f_2(z) - f_2(a)} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

\square

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $a \in \mathbb{C}$ – существенно особая точка для $f \in \mathcal{A}(B'(a, R))$, то какой-то специальной формулы для вычисления вычета в этой точке нет, однако справедливо следующее утверждение.

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Если функция f – четная относительно ИОТ $a \in \mathbb{C}$, т.е. $f(a+z) = f(a-z)$ при всех $z \in B'(0, R)$, то коэффициенты ряда Лорана f в $B'(a, R)$ с нечетными номерами равны 0. В частности, $\operatorname{res}_a f = c_{-1} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.6. Пусть точка ∞ является ИОТ для функции $f \in \mathcal{A}(V)$, где $V = \{r < |z - z_0| < \infty\}$ – проколота окрестность точки ∞ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$). Пусть $\Gamma_\rho^+ = \{|z - z_0| = \rho\}^+$ при $\rho \in (r, +\infty)$. Тогда вычет функции f в точке ∞ определяется по формуле

$$\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^-} f(z) dz.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.3. Пусть $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ – ряд Лорана функции f в кольце $V = \{r < |z - z_0| < \infty\}$. Тогда $\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству предложения 12.2. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.5. Найти формулы (аналогичные следствию 12.2.2) для вычисления $\operatorname{res}_{\infty} f$ в случае, когда функция f имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ имеет в точке ∞ устранимую особую точку, но $\operatorname{res}_{\infty} f = -1 \neq 0$, поэтому утверждение следствия 12.2.1 неверно при $a = \infty$.

Теорема Коши о вычетах.

ТЕОРЕМА 12.2. (Теорема Коши о вычетах). Пусть D – допустимая область в \mathbb{C} , $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_J\} \subset D$, $J \in \mathbb{N}$. Пусть функция f непрерывна на $\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$ и $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$. Тогда

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^J \operatorname{res}_{a_j} f.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы докажем эту теорему для простых областей, поскольку в доказательстве будет использоваться интегральная теорема Коши, которая была доказана нами только для простых областей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $j \in \{1, \dots, J\}$ пусть $V_j = \{0 < |z - a_j| < R_j\}$ – кольцо, лежащее в $D \setminus \mathfrak{A}$. Пусть $\Sigma_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j (z - a_j)^n$ – ряд Лорана функции f в V_j и пусть

$$f_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^j (z - a_j)^n$$

– сумма главной части Σ_j^- ряда Лорана Σ_j функции f в V_j .

Из определения области сходимости обобщенного степенного ряда Σ_j вытекает, что $f_j \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{a_j\})$.

Положим $f_0(z) = f(z) - \sum_{j=1}^J f_j(z)$. Функция f_0 , очевидно, непрерывна в $\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$ и голоморфна в $D \setminus \mathfrak{A}$. При этом в точках a_j , $j = 1, \dots, J$, функция f_0 имеет устранимые особые точки. Следовательно, f_0 непрерывна в \overline{D} и $f_0 \in \mathcal{A}(D)$ (после "стирания" особенностей). Поэтому $\int_{\partial^+ D} f_0(z) dz = 0$ по интегральной теореме Коши. В силу аддитивности интеграла,

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = \int_{\partial^+ D} f_0(z) dz + \sum_{j=1}^J \int_{\partial^+ D} f_j(z) dz = \sum_{j=1}^J \int_{\partial^+ D} f_j(z) dz,$$

поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\int_{\partial^+ D} f_j(z) dz = 2\pi i c_{-1}^j = 2\pi i \operatorname{res}_{a_j} f.$$

Поскольку ряд Σ_j^- сходится равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$, его можно почленно интегрировать на ∂D . Пользуясь формулой (Н-Л), имеем:

$$\int_{\partial^+ D} f_j(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\partial^+ D} c_{-n}^j (z - a_j)^{-n} dz = \int_{\partial^+ D} \frac{c_{-1}^j}{z - a_j} dz = 2\pi i c_{-1}^j.$$

Последнее равенство для простых областей вытекает из предложения 8.1. Теорема доказана. \square

ТЕОРЕМА 12.3. (Теорема Коши о полной сумме вычетов). Пусть $J \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_J\} \subset \mathbb{C}$, и функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathfrak{A})$. Тогда

$$\sum_{j=1}^J \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить предыдущую теорему в области $B(0, R)$, где $R \in (\max_{1 \leq j \leq J} |a_j|, +\infty)$, и воспользоваться определением $\operatorname{res}_{\infty} f$. \square

Примеры вычисления интегралов.

ПРИМЕР 12.1. Вычислим интеграл $I = \int_{\{|z|=4\}^+} \operatorname{ctg} z \, dz$. Все ИОТ Функции $f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ – полюса первого порядка в точках $a_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пользуясь следствием 12.2.3, находим $\operatorname{res}_{a_k} f = 1$ для всех k . В области $\{|z| < 4\}$ лежат ИОТ a_{-1}, a_0, a_1 , поэтому $I = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$.

ПРИМЕР 12.2. Пусть $I = \int_{\{|z|=1\}^+} \frac{dz}{\sin(1/z)}$. В области $\{|z| < 1\}$ функция $f(z) = 1/\sin(1/z)$ имеет счетное число полюсов $z_k = 1/(\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому в ней теорема Коши о вычетах неприменима. Но так как $f \in \mathcal{A}(\{1/\pi < |z| < +\infty\})$, то I можно вычислить по формуле $I = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f$. Здесь ∞ – простой полюс для f (провести оставшееся вычисление самостоятельно).

Другие примеры вычисления интегралов методом вычетов будут приведены в следующих двух лекциях.

13. Лекция 13. Примеры вычисления интегралов. Лемма Жордана и преобразование Фурье рациональных функций. Специальные области и функция Шварца.

Примеры вычисления интегралов (продолжение).

ПРИМЕР 13.1. Пусть R – рациональная функция двух переменных, такая, что функция $f(t) = R(\cos t, \sin t)$ непрерывна на \mathbb{R} . Требуется найти $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

Пусть $z = e^{it}$. Тогда $\cos(nt) = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$, $\sin(nt) = \frac{1}{2i}(z^n - \frac{1}{z^n})$. Подставляя эти выражения в $R(\cos t, \sin t)$, получаем рациональную функцию переменной z , которую обозначим через \tilde{R} . Легко видеть, что $dt = \frac{dz}{iz}$, поэтому

$$I = \int_{\{|z|=1\}^+} \tilde{R}(z) \frac{dz}{iz}.$$

Подынтегральная функция не имеет особых точек на $\{|z|=1\}$, а в области $\{|z|<1\}$ у неё конечное число полюсов, поэтому этот интеграл можно вычислить, используя теорему Коши о вычетах.

ПРИМЕР 13.2. Пусть P_n и Q_m – многочлены (от комплексной переменной) степени n и m соответственно, причем $m \geq n + 2$ и $Q_m(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Пусть $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ и требуется вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Пусть a_1, \dots, a_J – все различные нули Q_m в

$\Pi_+ = \{\text{Im } z > 0\}$. Тогда $I = 2\pi i \sum_{j=1}^J \text{res } f$.

Действительно, пусть $R > \max_{1 \leq j \leq J} |a_j|$. Пусть $D_R = B(0, R) \cap \Pi_+$ – верхний полукруг, $\Gamma_R = \{|z|=R\} \cap \{\text{Im } z \geq 0\}$ – верхняя полуокружность. Тогда

$$I_0 = \int_{\partial D_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz = I_1 + I_2.$$

По теореме Коши о вычетах, интеграл I_0 равен $2\pi i \sum_{j=1}^J \text{res } f$. При этом интеграл I_1 при $R \rightarrow +\infty$ стремится к I , а интеграл I_2 – к нулю в силу тривиальной оценки

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz \right| = O(1/R^2) \cdot \pi R = O(1/R).$$

Лемма Жордана.

ЛЕММА 13.1. (Жордана). Пусть $R \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна в $\overline{\Pi_+} \setminus B(0, R)$, причем $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Pi_+}} f(z) = 0$. Тогда $\forall \lambda > 0$ имеем:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r^+} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где $C_r^+ = \{z = re^{it} \mid t \in [0, \pi]\}^+$ – верхняя полуокружность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega(r) = \|f\|_{[C_r^+]}$, тогда по условию $\omega(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

Фиксируем $r > R$. Если $z = z(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$, то $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda r \sin t}$. На отрезке $[0, \pi/2]$ функция $h(t) = \sin t$ выпукла вверх, поэтому выполняется неравенство $\sin t \geq 2t/\pi$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi/2]$ справедлива оценка

$$e^{-\lambda r \sin t} \leq e^{-\lambda r 2t/\pi}. \quad (13.1)$$

Оценим теперь интересующий нас интеграл:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r^+} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(z(t)) e^{i\lambda z(t)} i r e^{it} dt \right| \leq \omega(r) \int_0^\pi e^{-\lambda r \sin t} r dt = \\ &= 2r \omega(r) \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda r \sin t} dt \stackrel{(13.1)}{\leq} 2r \omega(r) \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda r \frac{2}{\pi} t} dt = \frac{\pi}{\lambda} \omega(r) (1 - e^{-\lambda r}). \end{aligned}$$

Так как $\lambda > 0$, окончательно имеем:

$$\left| \int_{C_r^+} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq \frac{\pi}{\lambda} \omega(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

что и требовалось доказать. \square

Преобразование Фурье рациональных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда ее преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция f – четная (нечетная), то функция \tilde{f} – тоже четная (соответственно, нечетная).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.1. Пусть P_n и Q_m – многочлены от z степени n и m соответственно, причем $m \geq n + 2$ и $Q_m(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{R}$. Пусть a_1, \dots, a_J – различные нули Q_m в Π_+ . Определим $F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, а ее сужение на \mathbb{R} обозначим через f . Тогда для любого фиксированного $\lambda < 0$ имеем:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^J \operatorname{res}_{a_j} (f(z) e^{-i\lambda z}) =: I.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $R > \max_{1 \leq j \leq J} |a_j|$. Для $r > R$ определим область $D_r = B(0, r) \cap \Pi_+$. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int_{\partial^+ D_r} f(z) e^{-i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^J \operatorname{res}_{a_j} (f(z) e^{-i\lambda z}) = \sqrt{2\pi} I.$$

Положим $C_r = \{z = re^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$. Поскольку $\partial D = [-r, r] \cup C_r$, имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^r f(x)e^{-i\lambda x} dx = \\
&= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial^+ D_r} f(z)e^{-i\lambda z} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{C_r^+} f(z)e^{-i\lambda z} dz \right) = \\
&= I - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r^+} f(z)e^{-i\lambda z} dz = I,
\end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы Жордана. \square

ПРИМЕР 13.3. Пусть $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$. Тогда при $\lambda < 0$ находим:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{res}_{3i} \left(\frac{1}{z^2 + 9} e^{-i\lambda z} \right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{3\lambda}}{6i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{3\lambda}.$$

Чтобы найти $\tilde{f}(\lambda)$ при $\lambda > 0$, достаточно заметить, что f четная. Окончательно, $\tilde{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{-3|\lambda|}$.

"Специальные" области. Функция Шварца.

Вводимое ниже понятие специальной области позволяет значительно расширить возможности теоремы Коши о вычетах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. Жорданова область D в \mathbb{C} называется *специальной*, если найдется конечное множество $\Sigma \subset D$ и функция $S \in \mathcal{A}(D \setminus \Sigma)$, непрерывная на $\bar{D} \setminus \Sigma$, для которой $S(z) = \bar{z}$ при всех $z \in \partial D$. Такая функция S единственна и называется *функцией Шварца* области D .

ЗАМЕЧАНИЕ. Единственность функции Шварца мы докажем в следующем семестре, например, с помощью теоремы Римана.

Простейшим примером специальной области служит любой круг $B(a, r)$, для которого $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$, откуда $S(z) = r^2/(z - a) + \bar{a}$, $\Sigma = \{a\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.1. Доказать, что всякая жорданова область, содержащая отрезок прямой на своей границе, не может быть специальной.

Покажем, как используется функция Шварца при вычислении интегралов.

ПРИМЕР 13.4. Функция $S(z) = \frac{4}{z}$ является функцией Шварца области $B(0, 2)$, поэтому

$$\int_{\{|z|=2\}^+} \bar{z}^2 \operatorname{tg} z dz = \int_{\{|z|=2\}^+} \frac{16}{z^2} \operatorname{tg} z dz,$$

где интеграл справа легко считается с помощью теоремы Коши о вычетах, в то время как слева под интегралом стоит всюду неголоморфная функция.

УПРАЖНЕНИЕ 13.2. Вычислить интегралы:

$$\int_{|z-i|=3} \cos(\bar{z}) dz, \quad \int_{|z+i|=1} |z|^2 \ln(iz) dz.$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.3. Пусть D – произвольная ограниченная область в \mathbb{C} и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$. Если $f(\partial D) \subset \mathbb{R}$, то $f \equiv \operatorname{const}$ в \bar{D} .

Указание: использовать ДЛЮ, принцип максимума модуля и теорему Коши-Римана. Из упражнения 13.3 вытекают два важных факта про специальные области.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.2. Пусть D – специальная область, и пусть функция Шварца S этой области имеет в D одну особую точку a – полюс первого порядка. Тогда D – круг с центром в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(z) = h(z) + \frac{\lambda}{z-a}$, где $h \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда при $z \in \partial D$ имеем:

$$0 < |z-a|^2 = (\bar{z}-\bar{a})(z-a) = (h(z) + \frac{\lambda}{z-a} - \bar{a})(z-a) = (h(z) - \bar{a})(z-a) + \lambda.$$

Поскольку функция $H(z) = (h(z) - \bar{a})(z-a) + \lambda \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$ принимает на ∂D вещественные значения, имеем $H(z) \equiv C > 0$ в \bar{D} , откуда $|z-a| = \sqrt{H(z)} \equiv \sqrt{C}$ на ∂D и, следовательно, D – круг радиуса \sqrt{C} с центром в точке a . \square

Аналогично доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.3. В указанных выше обозначениях для всякой специальной области D множество Σ не пусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Специальная область D называется *неванлинновской*, если её функция Шварца не имеет в D других особых точек, кроме полюсов.

ПРИМЕР 13.5. Пусть $B = B(a, r)$ – круг, где $a \in (0, +\infty)$ и $0 < r \leq a$. Пусть D – образ круга B при отображении $w = z^2$. Отметим, что при $r = a$ область D (кардиоида!) имеет негладкую границу – точку возврата в 0. Докажем, что D – неванлинновская область. Действительно, если $z \in \partial B$ и $w = z^2$, то $z = s(w)$, $\bar{z} = s(\bar{w})$ (через $s(w)$ мы обозначаем главное значение \sqrt{w} , являющееся функцией класса $\mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$). Отсюда при $w \in \partial D$ имеем:

$$(s(\bar{w}) - a)(s(w) - a) = r^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \left(a + \frac{r^2}{s(w) - a}\right)^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \left(a + \frac{r^2(s(w) + a)}{w - a^2}\right)^2,$$

где последняя функция Шварца (для D) имеет в D только одну особую точку $w = a^2$ – полюс второго порядка. Аналогично ($\forall p \in \{3, 4, \dots\}$) строится неванлинновская область D с одним полюсом порядка p у её функции Шварца.

УПРАЖНЕНИЕ 13.4. Привести пример специальной области D , у которой функция Шварца имеет в D только одну особую точку – существенно особую.

УПРАЖНЕНИЕ 13.5. * Привести пример неванлинновской области D , у которой функция Шварца имеет в D два полюса первого порядка.

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. Пусть D – жорданова область в \mathbb{C} с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C^1(\bar{D})$. Доказать, что $2i \int_D f(z) dx dy = \int_{\partial^+ D} f(z) \bar{z} dz$. Для неванлинновских областей D такие интегралы всегда можно вычислять с помощью вычетов.

В следующем семестре с помощью функции Шварца мы будем вычислять интегралы Пуассона, задающие решения задачи Дирихле для гармонических функций в кругах.

14. Лекция 14. Интеграл в смысле главного значения. Вычет функции в точке относительно области. Теорема о вычетах для $(vp) \int$. Примеры вычисления $(vp) \int$.

Определение $(vp) \int$.

Пусть Γ^+ – кусочно гладкая жорданова или замкнутая жорданова (ориентированная) кривая в \mathbb{C} . Такие кривые мы будем для краткости называть *КГ-допустимыми в \mathbb{C}* . "Образ" произвольной КГ-допустимой в \mathbb{C} кривой под действием какого-либо ДЛО будем называть *КГ-допустимой кривой в \mathbb{C}^\sharp* . Наиболее частый пример – положительно ориентированная вещественная ось \mathbb{R}^\sharp (дополненная одной точкой ∞) – КГ-допустимая кривая в \mathbb{C}^\sharp , полученная, например, из стандартно ориентированной окружности $\{|z| = 1\}^+$ под действием ДЛО $\frac{1}{z-i} - \frac{i}{2}$ (проверить!). С другой стороны, ориентированная граница какой-либо полосы, дополненная точкой ∞ , не является КГ-допустимой кривой в \mathbb{C}^\sharp .

Напомним, что через $B(a, \delta)$ (соответственно, $B'(a, \delta)$) обозначается открытый круг (соответственно, проколотый круг) с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $\delta > 0$. При $a = \infty$ полагаем $B(a, \delta) = \{z \in \mathbb{C}^\sharp : |z| > \frac{1}{\delta}\}$ (соответственно, $B'(a, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\delta}\}$).

Пусть $\mathfrak{A}_* = \{a_1, \dots, a_J\}$ – конечное (возможно пустое) подмножество в $[\Gamma]$ (здесь $[\Gamma]$ – носитель Γ^+ , причем, если $\infty \in [\Gamma]$, то $\infty \in \mathfrak{A}_* \neq \emptyset$ по определению). При $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_J\}$ (где все $\delta_j \in (0, +\infty)$) положим $|\Delta| = \max\{\delta_1, \dots, \delta_J\}$. При всех Δ с достаточно малым $|\Delta|$ выражение

$$\Gamma_{\mathfrak{A}_* \Delta}^+ = \Gamma^+ \setminus \left(\bigsqcup_{j=1}^J B(a_j, \delta_j) \right) \quad (14.1)$$

естественно интерпретируется как цепь (формальное конечное объединение) КГ-допустимых кривых в \mathbb{C} .

В рассматриваемых обозначениях пусть $f : [\Gamma] \setminus \mathfrak{A}_* \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывная функция. Величина

$$(vp) \int_{\Gamma^+} f(z) dz = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\mathfrak{A}_* \Delta}^+} f(z) dz$$

(если указанный предел существует и конечен) называется *главным значением (value principal) интеграла* от функции f вдоль кривой Γ^+ .

Это определение естественно распространяется на цепи КГ-допустимых кривых в \mathbb{C}^\sharp (дать определение самостоятельно).

Так, непосредственно по определению проверяется, что $(vp) \int_{\mathbb{R}^\sharp} (1/z) dz = 0$ (здесь $\mathfrak{A}_* = \{0, \infty\}$).

Нашей целью будет доказательство аналога теоремы Коши о вычетах для (vp) -интегралов и, в частности, доказательство соответствующей теоремы существования для (vp) -интегралов. Сначала мы введем аналог понятия вычета и установим ряд его свойств.

Вычет функции в точке относительно области.

Пусть D – область в \mathbb{C} , ограниченная конечным числом попарно непересекающихся замкнутых КГ-допустимых (в \mathbb{C}) кривых. Такие области мы будем называть *КГ-допустимыми в \mathbb{C}* . Образ произвольной КГ-допустимой в \mathbb{C} области под действием какого-либо ДЛО будем называть *КГ-допустимой областью в \mathbb{C}^\sharp* . Как и ранее, через $\partial_+^\sharp D$ (соответственно, $\partial^\sharp D$) обозначается ориентированная (соответственно, топологическая) граница в \mathbb{C}^\sharp КГ-допустимой области в \mathbb{C}^\sharp . Через ${}^\sharp \bar{D}$ обозначается *замыкание в \mathbb{C}^\sharp области D* (отметим, что термин D^\sharp уже занят для одноточечной компактификации области D).

Основным примером КГ-допустимой области в \mathbb{C}^\sharp является открытая верхняя полуплоскость.

Фиксируем произвольную КГ-допустимую область D в \mathbb{C}^\sharp и точку $a \in \sharp\bar{D}$. При всех достаточно малых $\delta > 0$ кривая $\gamma_\delta^+(a) = \partial^+ B(a, \delta) \cap \sharp\bar{D}$ представляет собой связную (ориентированную) дугу окружности. Пусть при некотором $\delta_0 > 0$ задана функция $f: B'(a, \delta_0) \cap \sharp\bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывная на указанной области определения. В этих обозначениях, выражение

$$\operatorname{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta^+(a)} f(z) dz$$

(если последний предел существует и конечен) называется *вычетом функции f в точке a относительно области D* .

Приведем ряд утверждений о вычислении таких вычетов.

ЛЕММА 14.1. Если $a \in D$ и функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a , то $\operatorname{res}_{(a,D)} f = \operatorname{res}_a f$ – обычный вычет функции f в точке a .

ЛЕММА 14.2. Пусть $a \neq \infty$ и $f(z) = o\left(\frac{1}{z-a}\right)$ при $z \rightarrow a$ ($z \in \sharp\bar{D}$), или $a = \infty$ и $f(z) = o\left(\frac{1}{z}\right)$ при $z \rightarrow \infty$ ($z \in \sharp\bar{D}$). Тогда $\operatorname{res}_{(a,D)} f = 0$.

Доказательства этих двух лемм очевидны.

ЛЕММА 14.3. Пусть $a \in \partial^\sharp D \cap \mathbb{C}$ является полюсом первого порядка функции f , и пусть θ_a – абсолютная величина внутреннего угла области D в точке a . Тогда $\operatorname{res}_{(a,D)} f = \frac{\theta_a}{2\pi} \operatorname{res}_a f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В указанных условиях, при малых $\delta > 0$ кривую $\gamma_\delta^+(a)$ можно параметризовать следующим образом: $\{z(t) = a + \delta e^{it} \mid t \in [\alpha(\delta), \beta(\delta)]\}$, где $\alpha(\delta) < \beta(\delta) < \alpha(\delta) + 2\pi$, причем $\beta(\delta) - \alpha(\delta) \rightarrow \theta_a$ при $\delta \rightarrow 0$.

Разложим функцию f в ряд Лорана в $B'(a, \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $c_{-1} = \operatorname{res}_a f$. Тогда

$$\operatorname{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha(\delta)}^{\beta(\delta)} \left(\frac{c_{-1}}{\delta e^{it}} + O(1) \right) \delta e^{it} i dt = \frac{\theta_a c_{-1}}{2\pi}.$$

Лемма доказана. \square

Для полюсов более высокого порядка полезно следующее утверждение, которое доказывается аналогично предыдущей лемме.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Пусть $D = \Pi_+$ и точка $a \in \mathbb{R}$ является полюсом порядка $p > 1$ функции f . Тогда $\operatorname{res}_{(a,D)} f$ существует если и только если главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a содержит только нечетные степени $z-a$. В указанном случае всегда

$$\operatorname{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2} \operatorname{res}_a f.$$

Следующее утверждение является простой переформулировкой леммы 13.1 (Жордана).

ЛЕММА 14.4. Пусть $R \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна на $\overline{\Pi_+} \setminus B(0, R)$, причем $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Pi_+}} f(z) = 0$. Тогда для любого фиксированного $\lambda > 0$ имеем

$$\operatorname{res}_{(\infty, \Pi_+)} (f(z)e^{i\lambda z}) = 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Для области $D = (B(2, 2) \setminus \overline{B(1, 1)}) \cap \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$ и функции $f(z) = \frac{1}{z^2}$ вычислить (по определению) $\operatorname{res}_{(0, D)} f$. Как следствие найти $(vp) \int_{\partial_+ D} f(z) dz$.

Теорема о вычетах для $(vp) \int$.

ТЕОРЕМА 14.1. Пусть D – КГ-допустимая область в \mathbb{C}^\sharp и $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ – конечное (возможно, пустое) подмножество в ${}^\sharp\overline{D}$ (если $\infty \in {}^\sharp\overline{D}$, то $\infty \in \mathfrak{A} \neq \emptyset$ по определению). Пусть $f: {}^\sharp\overline{D} \setminus \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$ и f непрерывна на ${}^\sharp\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$. Тогда справедлива формула:

$$(vp) \int_{\partial_+^\sharp D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{res}_{(a_n, D)} f,$$

где имеется в виду, что $(vp) \int$ слева существует, если и только если каждый вычет справа существует, и в этом случае выполняется равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \cap \partial_+^\sharp D$. Если $\mathfrak{A}_* = \emptyset$ (откуда, в частности, $\infty \notin \partial_+^\sharp D$), то утверждение теоремы непосредственно вытекает из стандартной теоремы Коши о вычетах (возможный здесь случай $\infty \in D$ рассмотреть отдельно, самостоятельно!). Пусть далее $\mathfrak{A}_* \neq \emptyset$ (если $\infty \in \partial_+^\sharp D$, то $\infty \in \mathfrak{A}_*$). Без ограничения общности будем считать, что $\mathfrak{A}_* = \{a_1, \dots, a_J\}$, где $J \leq N$. Пусть, как и ранее, $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_J\}$. Для любого Δ с достаточно малым $|\Delta|$ определим область $D_{\mathfrak{A}_* \Delta} = D \setminus \bigcup_{j=1}^J \overline{B(a_j, \delta_j)}$.

Напомним, что обозначение $(\partial_+^\sharp D)_{\mathfrak{A}_* \Delta}$ определено выше в формуле 14.1.

Для функции f в области $D_{\mathfrak{A}_* \Delta}$ применима стандартная теорема Коши о вычетах:

$$\int_{\partial_+^\sharp (D_{\mathfrak{A}_* \Delta})} f(z) dz = \int_{(\partial_+^\sharp D)_{\mathfrak{A}_* \Delta}} f(z) dz - \sum_{j=1}^J \int_{\gamma_{\delta_j}^+(a_j)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=J+1}^N \operatorname{res}_{a_n} f,$$

где последняя сумма считается равной 0 в случае $J = N$. Остается $|\Delta|$ устремить к 0. Теорема доказана. \square

Примеры вычисления $(vp) \int$.

ПРИМЕР 14.1. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(2x)) dx}{x^2(x^2 + 1)}$.

Положим $D = \Pi_+$, $f(z) = (1 - e^{2iz})/(z^2(z^2 + 1))$. Тогда (абсолютно сходящийся) интеграл I является вещественной частью (vp) -интеграла $I_1 = (vp) \int_{\partial_+^\sharp D} f(z) dz$. В обозначениях теоремы 14.1 имеем $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = i, a_3 = \infty\}$. Применяя леммы 14.2 - 14.4 (a_1 и a_2 – полюса первого порядка функции f), находим:

$$I_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \operatorname{res}_{a_1} f + \operatorname{res}_{a_2} f \right) = \pi(1 + e^{-2}).$$

Откуда $I = \pi(1 + e^{-2})$.

ПРИМЕР 14.2. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \sin(x)) dx}{x^3}$.

Пусть $D = \Pi_+$, $f(z) = (iz - e^{iz})/z^3$. Тогда исходный (абсолютно сходящийся) интеграл является мнимой частью (vp) -интеграла $I_1 = (vp) \int_{\partial_+^\# D} f(z) dz$. По теореме 14.1 (при $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = \infty\}$), с применением леммы 14.2, леммы 14.4 и упражнения 14.1 (a_1 – полюс порядка 3 функции f), находим:

$$I_1 = 2\pi i \frac{1}{2} \operatorname{res}_{a_1} f = \pi i/2.$$

Откуда $I = \pi/2$.

ПРИМЕР 14.3. Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{x^2 - 1}$.

Пусть $f(z) = \frac{\ln_*(z)}{z^2 - 1}$, где ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i \arg_*(z)$ выбрана с условием $\arg_*(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (т.е. с разрезом по отрицательной мнимой полуоси). Пусть D – верхняя полуплоскость. При $\mathfrak{A} = \{-1, 0, 1, \infty\}$, применяя теорему 14.1 и леммы 14.2 и 14.3, находим:

$$(vp) \int_{\partial_+^\# D} f(z) dz = 2\pi i \frac{1}{2} \operatorname{res}_{-1} f = \frac{\pi^2}{2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} [(vp) \int_{-\infty}^0 f(z) dz] = I$, получаем $I = \frac{\pi^2}{4}$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{(x-1)(x^2+4)}$.

Указание. Для функции $f_1(z) = \frac{(\ln_*(z))^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в верхней полуплоскости D_1 (функция $\ln_*(z)$ определяется как в предыдущем примере) и функции $f_2(z) = \frac{(\ln^*(z))^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в нижней полуплоскости D_2 (здесь $\ln^*(z) = \ln|z| + i \arg^*(z)$, где $\arg^*(z) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, т.е. с разрезом по положительной мнимой полуоси) применяем теорему 14.1 и леммы 14.2 и 14.3). Далее складываем полученные ответы для $\int_{\partial_+^\# D_1} f_1(z) dz$ и $\int_{\partial_+^\# D_2} f_2(z) dz$ и учитываем, что $f_1(z) = f_2(z)$ в левой полуплоскости (в частности, на $(-\infty, 0)$). Остается воспользоваться равенством $\operatorname{Im}(f_1(x) - f_2(x)) = -4\pi \frac{\ln(x)}{(x-1)(x^2+4)}$ на $(0, +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Доказать, что преобразование Гильберта

$$f \mapsto H[f](x) = \frac{1}{\pi} (vp) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t-x}$$

удовлетворяет условию $H[H[f]](x) = -f(x)$ для всякой правильной рациональной функции f без вещественных полюсов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формально в последнем интеграле следовало интегрировать по $\mathbb{R}^\#$, а не по \mathbb{R} , поскольку \mathbb{R} не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\#$.

15. Лекция 15. Гармонические функции двух переменных. Базовые свойства. Задача Дирихле. Разложение в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Базовые свойства гармонических функций (ГрФ) двух переменных.

В этой лекции \mathbb{C} метрически отождествляется с $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ ($z = x + iy$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Пусть D – область в \mathbb{R}^2 , $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ – функция класса $C^2(D)$ (т.е. $h = h(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в D до второго порядка включительно); если при этом

$$\Delta h \equiv h_{xx} + h_{yy} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \equiv 0 \text{ в } D,$$

то h называется *гармонической функцией (ГрФ) в D* .

Класс всех таких функций обозначается $\mathcal{H}(D)$.

Замечание. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Говорят, что функция h является *гармонической в точке a* , если $\exists \delta > 0$ такое, что $h \in \mathcal{H}(B(a, \delta))$. Очевидно, что $h \in \mathcal{H}(D)$ если и только если $\forall a \in D$ функция h является гармонической в точке a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.1. Пусть D – область в \mathbb{C} , $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда функции $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ являются гармоническими в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы Коши-Римана и из равенства смешанных частных производных $u_{xy} = u_{yx}$ в D . \square

Следующий пример показывает существенность требования $h \in C^2(D)$ в определении 15.1. Рассмотрим функцию

$$h_*(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{2z^2} \right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_b), \quad \mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

доопределенную $h_*(0, 0) = 0$. Поскольку $h_* \equiv 0$ на осях координат, имеем $\Delta h_*|_{(0,0)} = 0$. Следовательно, $\Delta h_* = 0$ во всем \mathbb{C} . Однако h_* не является гармонической в точке $(0, 0)$, поскольку она разрывна в этой точке.

ТЕОРЕМА 15.1. (Связь гармоничности и голоморфности). Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , $h \in \mathcal{H}(D)$. Тогда $\exists f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\operatorname{Re} f = h$. Функция f определяется единственным образом с точностью до аддитивной чисто мнимой постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g(z) = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} h = h_x - ih_y \in C^1(D)$. Тогда

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right) (h_x - ih_y) = \Delta h \equiv 0 \text{ в } D.$$

По теореме Коши-Римана, $g \in \mathcal{A}(D)$.

Поскольку D – односвязна, существует п/о $f_0(z)$ функции $g(z)$ в D . Пусть $f_0(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда

$$h_x - ih_y = g(z) = f_0'(z) = \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_z = (u_x + iv_x).$$

Следовательно, $h_x = u_x$ и $h_y = -v_x = u_y$, т.е. $\vec{\nabla} u(x, y) \equiv \vec{\nabla} h(x, y)$ (в частности, $h \in C^\infty$, поскольку $u \in C^\infty$). Отсюда следует, что $u(x, y) \equiv h(x, y) + C_0$, где C_0 – вещественная константа. В качестве $f(z)$ можно взять функцию $f_0(z) - C_0$. Утверждение о единственности тривиально.

Замечание 1. Функция $g(z)$ называется *сопряженным градиентом* функции h , поскольку $g(z) = h_x \cdot 1 + (-h_y) \cdot i$, а вектор $(h_x, -h_y)$ на комплексной плоскости сопряжен вектору градиента (h_x, h_y) .

Замечание 2. Попутно доказали, что для произвольной вещественной функции $h \in C^2(D)$ имеем $4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} h \equiv \Delta h$ в D . \square

СЛЕДСТВИЕ 15.0.1. Для любой (не обязательно односвязной) области D в \mathbb{C} выполнено включение $\mathcal{H}(D) \subset C^\infty(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем: $h_x - ih_y = 2 \frac{\partial}{\partial z} h = g \in \mathcal{A}(D) \subset C^\infty(D)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 15.1. Рассмотрим $h(z) = \ln |z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\setminus 0)$ (проверить!). Доказать, что не существует функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_\setminus 0)$ такой, что $Re f = h$.

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Для $h \in \mathcal{H}(D)$ в односвязной области D доказать потенциальность поля $\vec{a}(x, y) = (-h_y, h_x)$ и найти его потенциал v . Тогда функция $f(z) = h(x, y) + i v(x, y)$ подходит в качестве искомой в теореме 15.1.

СЛЕДСТВИЕ 15.0.2. (Внутренняя теорема единственности для ГрФ). Пусть D – область в \mathbb{C} , $h \in \mathcal{H}(D)$. Пусть $K_h = \{a \in D \mid \vec{\nabla} h(a) = \vec{0}\}$ – совокупность критических точек функции h в D . Если K_h имеет в D хоть одну предельную точку, то $h \equiv const$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $g = 2 \frac{\partial}{\partial z} h$ – сопряженный градиент функции h . Тогда

$$g(a) = h_x(a) - ih_y(a) = 0, \forall a \in K_h.$$

По теореме единственности (примененной к голоморфной функции g), если K_h имеет предельную точку в D , то $g(z) \equiv 0$ в D . Но тогда $h_x \equiv 0$, $h_y \equiv 0$ в D , и, значит, $h(z) \equiv const$ в D . \square

ТЕОРЕМА 15.2. (Теорема о среднем для ГрФ). Пусть $D = B(a, R)$ – открытый круг ($a \in \mathbb{C}$, $0 < R < +\infty$), $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$. Тогда при любом $r \in (0, R]$ справедливо равенство:

$$h(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a, r)} h(z) |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + re^{it}) dt. \quad (15.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $r \in (0, R)$. Найдем $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $Re f = h$. По теореме о среднем для голоморфных функций имеем:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a, r)} f(z) |dz|.$$

Остается взять вещественную часть от обеих частей последнего равенства.

Для случая $r = R$ нужно перейти к пределу в равенстве (15.1) при $r \rightarrow R-$, используя равномерную непрерывность h на \bar{D} . \square

ТЕОРЕМА 15.3. (Принцип минимума-максимума для ГрФ). Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$. Тогда $\forall z_0 \in D$ справедливы оценки:

$$\min_{z \in \partial D} h(z) \leq h(z_0) \leq \max_{z \in \partial D} h(z).$$

Если найдется $z_0 \in D$ с условием $h(z_0) = \min_{z \in \partial D} h(z)$ (или $h(z_0) = \max_{z \in \partial D} h(z)$), то $h \equiv const$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\exists z_0 \in D$ такая, что $h(z_0) \geq \max_{z \in \partial D} h(z)$. Пользуясь компактностью \bar{D} и непрерывностью h на \bar{D} , мы можем без ограничения общности дополнительно считать, что $h(z_0) = \max_{z \in \bar{D}} h(z)$. Пусть $R = dist(z_0, \partial D)$, тогда $B = B(z_0, R) \subset D$, $\bar{B} \subset \bar{D}$. Применяя теорему о среднем для h в B , нетрудно показать, что $h(z) \equiv h(z_0)$ в \bar{B} . Поскольку $\vec{\nabla} h = \vec{0}$ в B , по следствию 15.0.2 получаем, что $h(z) \equiv const$ в D (и по

непрерывности, $h(z) \equiv \text{const} = h(z_0)$ в \bar{D}). Поэтому $h(z_0)$ не может быть строго больше, чем $\max_{z \in \partial D} h(z)$, а в случае их равенства имеем $h(z) \equiv \text{const}$ в \bar{D} , что и требовалось доказать.

Ситуация, в которой найдется $z_0 \in D$ с условием $h(z_0) \leq \min_{z \in \partial D} h(z)$, сводится к рассмотренной выше заменой $h(z)$ на $-h(z)$. \square

СЛЕДСТВИЕ 15.0.3. (Граничная теорема единственности для ГрФ). Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , а функции h_1 и h_2 принадлежат $\mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$. Если $h_1 \equiv h_2$ на ∂D , то $h_1 \equiv h_2$ в \bar{D} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем теорему 15.3 к функции $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$. \square

ТЕОРЕМА 15.4. (Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных). Пусть D и Ω – области в \mathbb{C} , $k : D \rightarrow \Omega$, $k \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $H = H(w) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Тогда $h(z) = H(k(z)) \in \mathcal{H}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in D$, $w_0 = k(z_0) \in \Omega$. Выберем $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $B = B(z_0, \delta) \subset D$, $k(B) \subset B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$. По теореме 15.1 найдется функция $F(w) \in \mathcal{A}(B(w_0, \varepsilon))$ с условием $\text{Re } F = H$ в $B(w_0, \varepsilon)$. Тогда $f(z) = F(k(z)) \in \mathcal{A}(B)$ как композиция голоморфных функций. Отсюда $h = \text{Re } f \in \mathcal{H}(B)$. В силу произвольности $z_0 \in D$ получаем, что $h(z) = H(k(z)) \in \mathcal{H}(D)$. \square

Задача Дирихле.

Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , $h_0 \in C(\partial D)$ – вещественнозначная функция. Требуется найти функцию $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$ такую, что $h|_{\partial D} = h_0$.

Замечание. Сформулированная задача называется *задачей Дирихле (ЗД)* для гармонических функций. По следствию 15.0.3, если ЗД разрешима для *граничной функции* $h_0 \in C(\partial D)$, то её решение единственно.

Решение ЗД методом конформных отображений.

Пусть D – жорданова область в \mathbb{C} , $h_0 \in C(\partial D)$. Требуется решить ЗД.

Пусть Ω – другая жорданова область, k – конформный изоморфизм D на Ω , который по теореме Каратеодори (будет доказана в следующем семестре, а в конкретных задачах проверяется непосредственно) можно продолжить до гомеоморфизма \bar{D} на $\bar{\Omega}$. Определим $H_0(w) = h_0(k^{-1}(w)) \in C(\partial\Omega)$. Предположим, что мы умеем решать ЗД в области Ω для граничной функции H_0 . Пусть $H(w)$ – это решение. Тогда из теоремы 15.4 следует, что функция $h(z) = H(k(z))$ является решением исходной ЗД в D . Указанный метод применим, например, если Ω является кругом: для кругов в следующем семестре будет обоснован метод Фурье, а также установлена формула Пуассона решения ЗД при любой граничной функции.

Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Введем обозначение $B_r = B(0, r)$, $r > 0$.

ТЕОРЕМА 15.5. (О разложении ГрФ в круге в ряд по однородным гармоническим полиномам). При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в \bar{B}_R функция h представляется в следующем виде:

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (15.2)$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}; \quad (15.3)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (15.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 15.1 существует единственная функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ с условием $Re f = h$, $f(0) = h(0)$.

Разложим f в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $c_0 = a_0$ (все a_n и b_n вещественны). При любом $r \in (0, R+\varepsilon)$, подставляя в последнее разложение $z = re^{i\varphi}$, находим:

$$f(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Теперь приравняем в последнем разложении вещественные части:

$$h(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)).$$

Все указанные разложения сходятся абсолютно и равномерно на \overline{B}_R . Таким образом, установили (15.2) при $A_0 = 2a_0$, $A_n = a_n$, $B_n = -b_n$.

Возьмем теперь $z = Re^{i\varphi}$:

$$h(Re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)).$$

Слева здесь стоит 2π -периодическая функция (аргумента φ) класса C^∞ , а справа – тригонометрический ряд, который должен совпадать с рядом Фурье этой функции: $a_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) d\theta$,

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad -b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\},$$

откуда получаем (15.3) и (15.4). □

Замечание. Всякая вещественная линейная комбинация гармонических функций $Re((x+iy)^n) = Re(z^n) = r^n \cos(n\varphi)$ и $Im((x+iy)^n) = Im(z^n) = r^n \sin(n\varphi)$ называется *однородным гармоническим полиномом порядка n* (по переменным x, y).

УПРАЖНЕНИЕ 15.3. Найти размерность пространства всех гармонических полиномов (по x, y) степени не выше N , $N \in \mathbb{N}$.