Семинар по комплексному анализу 29 апреля 2020 г.

Указания к задачам домашнего задания

Задача 17.07 1) 2)

Пусть $D := \mathbb{C} \setminus \big((-\infty; -1] \cup [1; \infty)\big)$ и $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}(1 - z^2)$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Найдите: 1) $\varphi(i)$; 2) $\varphi(-i)$.

К задаче 17.07 1) 2)

$D := \mathbb{C} \setminus ((-\infty; -1] \cup [1; \infty))$; $\varphi(z) = \ln(1 - z^2)$ в D, $\varphi(0) = 0$.
1) $\varphi(i)$=?; 2) $\varphi(-i)$=?

Ищем φ в виде $\ln(1 + z) + \ln(1 - z)$ при правильно выбранных ветвях $\ln(1 + z)$ в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty; -1]$ и $\ln(1 - z)$ в области $\mathbb{C} \setminus [1; \infty)$.
Пусть, например, $f_0(z) = \ln(1 + z)$, $-\pi < \arg(z + 1) < \pi$, и $g_0(z) = \ln(1 - z)$, $-\pi < \arg(1 - z) < \pi$.
Тогда $f_0(0) = 0$ и $g_0(0) = 0$, а значит, можно взять $\varphi(z) = f_0(z) + g_0(z)$.

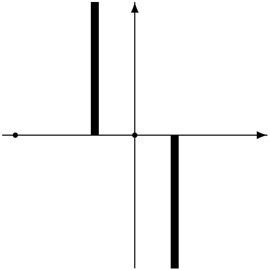
Тогда $\varphi(i) = f_0(i) + g_0(i) = \ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi i}{4} + \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi i}{4} = \ln 2$ и

$\varphi(-i) = f_0(-i) + g_0(-i) = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi i}{4} + \ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi i}{4} = \ln 2$.

Задача 17.08 2.

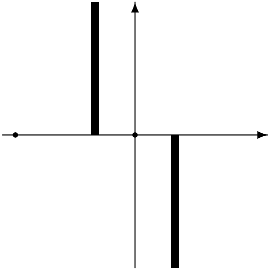
Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$. Найдите $\varphi(-3)$.

2. $D = \mathbb{C} \setminus ([1; 1 - i\infty) \cup [-1; -1 + i\infty))$.



К задаче 17.08 2.

$\varphi(z) = \sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, $\varphi(0) = 1$. $\varphi(-3)$=?.

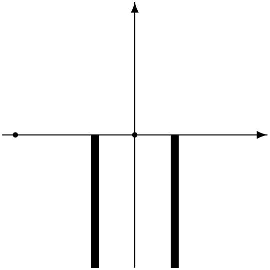


$\varphi(z) = \sqrt[3]{1-z^2} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{z-1}\sqrt[3]{z+1}$ (нужно $\varphi(0) = 1$).
Например, $g(z) = \sqrt[3]{z-1}$, $-\pi/2 < \arg(z-1) < 3\pi/2$, а
$h(z) = \sqrt[3]{z+1}$, $\pi/2 < \arg(z+1) < 5\pi/2$.
Тогда три ветви $\sqrt[3]{1-z^2}$ есть $\varphi_k(z) = e^{\pi i(1+2k)/3}g(z)h(z)$,
$k = 0, 1, 2$.
$\varphi_k(0) = e^{\pi i(1+2k)/3}g(0)h(0) = e^{\pi i(1+2k)/3}e^{\pi i/3}e^{2\pi i/3}$
$= e^{(4+2k)i\pi/3} = 1 \Rightarrow k = 1$.
$\varphi_1(-3) = e^{3\pi i/3}g(-3)h(-3) = (-1)\sqrt[3]{4}e^{\pi i/3}\sqrt[3]{2}e^{\pi i/3} =$
$-2e^{2\pi i/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

Задача 17.08 3.

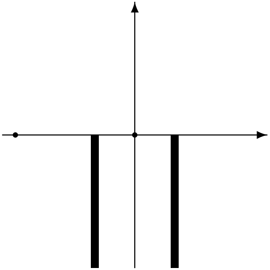
Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$. Найдите $\varphi(-3)$.

3. $D = \mathbb{C} \setminus ([1; 1 - i\infty) \cup [-1; -1 - i\infty))$.



К задаче 17.08 3.

$\varphi(z) = \sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, $\varphi(0) = 1$. $\varphi(-3)$=?.



$\varphi(z) = \sqrt[3]{1-z^2} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{z-1}\sqrt[3]{z+1}$ (нужно $\varphi(0) = 1$).
Например, $g(z) = \sqrt[3]{z-1}$, $-\pi/2 < \arg(z-1) < 3\pi/2$, а
$h(z) = \sqrt[3]{z+1}$, $-\pi/2 < \arg(z+1) < 3\pi/2$.
Тогда три ветви $\sqrt[3]{1-z^2}$ есть $\varphi_k(z) = e^{\pi i(1+2k)/3}g(z)h(z)$,
$k = 0, 1, 2$.

$$\varphi_k(0) = e^{\pi i(1+2k)/3}g(0)h(0) = e^{\pi i(1+2k)/3}e^{\pi i/3} \cdot 1$$
$$= e^{(2+2k)i\pi/3} = 1 \Rightarrow k = 2.$$
$$\varphi_1(-3) = e^{5\pi i/3}g(-3)h(-3) = e^{5\pi i/3}\sqrt[3]{4}e^{\pi i/3}\sqrt[3]{2}e^{\pi i/3} =$$
$$= 2e^{7\pi i/3} = 2e^{\pi i/3} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Задача 17.09 3) 4)

Пусть $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1;1]$. Пусть $\varphi_2(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}$ в области D такая, что $\varphi_2(-i0) = 0$.

Найдите $\varphi_2(+i0)$ и $\varphi_2(i)$.

К задаче 17.09 3) 4)

Сначала покажем, что аналитическая функция $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}$ вообще имеет голоморфные ветви в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1;1]$.
Идея: рассмотрим голоморфную ветвь в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty;1]$ и покажем, что она непрерывна на луче $(-\infty;-1]$ (ср. 16.13).

Пусть $\varphi(z) = g(z) - h(z)$, где:
$g(z) = \ln(z+1)$, $-\pi < \arg(z+1) < \pi$ — голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty;-1]$.
$h(z) = \ln(1-z)$, $0 < \arg(1-z) < 2\pi$ — голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty;1]$.
Тогда при $t > 1$ имеем:
$g(-t+i0) = \ln(t-1) + \pi i$; $h(-t+i0) = \ln(t+1) + 2\pi i$;
$\varphi(-t+i0) = \ln(t-1) - \ln(t+1) - \pi i$;
$g(-t-i0) = \ln(t-1) - \pi i$; $h(-t-i0) = \ln(t+1)$;
$\varphi(-t-i0) = \ln(t-1) - \ln(t+1) - \pi i = \varphi(-t+i0)$.

К задаче 17.09 3) 4) (продолжение)

Хотим: ветвь $\varphi_2(z) = \ln \dfrac{1+z}{1-z}$ такую, что $\varphi_2(-i0) = 0$.

Построили: $\varphi(z) := g(z) - h(z)$, где:
$g(z) = \ln(z+1)$, $-\pi < \arg(z+1) < \pi$,
$h(z) = \ln(1-z)$, $0 < \arg(1-z) < 2\pi$.
Тогда $\varphi(-i0) = g(0) - h(-i0) = 0 - 0 = 0$. Значит, можно взять $\varphi_2(z) := \varphi(z)$.

Теперь: $\varphi_2(+i0) = g(0) - h(+i0) = 0 - 2\pi i = -2\pi i$;
$$\varphi_2(i) = g(i) - h(i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} - \left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4}\right) = -\frac{3\pi i}{2}.$$

Задача 17.13 1) 4)

Пусть $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$.
Пусть $\varphi_1(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}^2\, z$ в области D такая, что $\varphi_1(1) = 0$.
Пусть $\varphi_4(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt{z}\,\mathrm{Ln}\, z$ в области D такая, что $\varphi_4(2) > 0$.

Найдите $\varphi_1(-x + i0) - \varphi_1(-x - i0)$ и $\varphi_4(-x + i0) - \varphi_4(-x - i0)$ для всех $x > 0$.

К задаче 17.13 1) 4)

$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$.
$\varphi_1(z) = \ln^2 z$ в области D, $\varphi_1(1) = 0$.
$\varphi_4(z) = \sqrt{z} \ln z$ в области D, $\varphi_4(2) > 0$.
$\varphi_1(-x + i0) - \varphi_1(-x - i0) = ?$ $\varphi_4(-x + i0) - \varphi_4(-x - i0) = ?$

Пусть $g(z) = \ln z$, $-\pi < \arg z < \pi$,
$h(z) = \sqrt{z}$, $-\pi < \arg z < \pi$.

Тогда $\varphi_1(z) = g^2(z)$ (поскольку $(g(1))^2 = 0^2 = 0$) и
$\varphi_4(z) = g(z)h(z)$ (поскольку $g(2)h(2) = \ln 2 \cdot \sqrt{2} > 0$).

Значит,
$\varphi_1(-x + i0) - \varphi_1(-x - i0) = (g(-x + i0))^2 - (g(-x - i0))^2 =$
$= (\ln x + \pi i)^2 - (\ln x - \pi i)^2 = 4\pi i \ln x$;
$\varphi_4(-x + i0) - \varphi_1(-x - i0) =$
$g(-x + i0)h(x + i0) - g(-x - i0)h(x - i0) =$
$= (\ln x + \pi i) i\sqrt{x} - (\ln x - \pi i)(-i\sqrt{x}) = 2i\sqrt{x} \ln x$.

Задача 17.27

Докажите, что аналитическая функция $\sqrt[3]{1 - z^2}$ не имеет голоморфных ветвей в области $D := \{1 < |z| < \infty\}$.

(*Указание.* Пусть $D_1 := D \setminus [1; \infty)$ — односвязная область. Покажите, что любая голоморфная ветвь функции $\sqrt[3]{1 - z^2}$ в области D_1 имеет различные предельные значения в точках $z = x + i0$ и $z = x - i0$ при $1 < x < \infty$.)

К задаче 17.27

Докажите, что аналитическая функция $\sqrt[3]{1-z^2}$ не имеет голоморфных ветвей в области $D := \{1 < |z| < \infty\}$.

(*Указание.* Пусть $D_1 := D \setminus [1;\infty)$ — односвязная область. Покажите, что любая голоморфная ветвь функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D_1 имеет различные предельные значения в точках $z = x + i0$ и $z = x - i0$ при $1 < x < \infty$.)

Ищем $\varphi(z) = \sqrt[3]{1-z^2} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{z-1}\sqrt[3]{z+1}$.
Например, $g(z) = \sqrt[3]{z-1}$, $0 < \arg(z-1) < 2\pi$, а $h(z) = \sqrt[3]{z+1}$, $0 < \arg(z+1) < 2\pi$.
Тогда все голоморфные ветви $\sqrt[3]{1-z^2}$ в D_1 есть $\varphi_k(z) := e^{\pi i(1+2k)/3} g(z)h(z)$, $k = 0, 1, 2$.
Поскольку $g(x+i0)h(x+i0) = \sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$ и $g(x-i0)h(x-i0) = e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{x-1}e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{x+1} = e^{4\pi i/3}\sqrt[3]{x^2-1}$,
то $\varphi_k(x+i0) \neq \varphi_k(x-i0)$.

Задача 17.30 1) 2)

Выясните, имеют ли следующие аналитические функции голоморфные ветви в области $D := \{1 < |z| < \infty\}$:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}$;

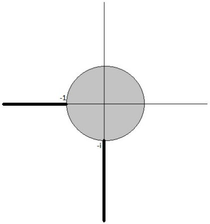
2) $2\operatorname{Ln}(z+1) - \operatorname{Ln}(z-i)$.

Есть как минимум два подхода к этой задаче.

К задаче 17.30 1)

Выясните, имеют ли следующие аналитические функции голоморфные ветви в области $D := \{1 < |z| < \infty\}$:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}$;



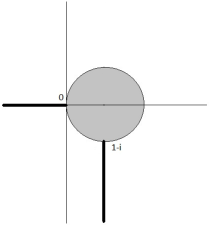
Подход 1: через явное изучение ветвей.

Опишем все голоморфные ветви функции $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}$ в каждой из двух областей, получаемых из D проведением двух разрезов: $D \setminus \big((-\infty; -1] \cup [-i; -i\infty)\big) =: D_1 \cup D_2$.

Есть ли среди них пара ветвей, непрерывно склеивающихся вдоль обоих разрезов?

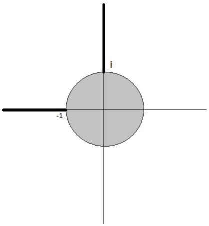
К задаче 17.30 1) (продолжение)

Подход 1: через явное изучение ветвей. Опишем все голоморфные ветви функции $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}$ в каждой из двух областей, получаемых из D проведением двух разрезов: $D \setminus \big((-\infty;-1] \cup [-i;-i\infty)\big) =: D_1 \cup D_2$.
Техническая трудность в подходе 1: нужно выделять непрерывные ветви аргумента в областях нестандартной формы. Например, для переменной $z' = z + 1$ области выглядят так:



К задаче 17.30 2)

Выясните, имеют ли следующие аналитические функции голоморфные ветви в области $D := \{1 < |z| < \infty\}$:
2) $2\,\mathrm{Ln}(z+1) - \mathrm{Ln}(z-i)$.



Опишем все голоморфные ветви функции $2\,\mathrm{Ln}(z+1) - \mathrm{Ln}(z-i)$ в каждой из двух областей, получаемых из D проведением двух других разрезов:
$D \setminus \big((-\infty; -1] \cup [i; i\infty)\big) =: G_1 \cup G_2$.
Есть ли среди них пара ветвей, непрерывно склеивающихся вдоль обоих разрезов?

Подход 2 обсудим несколько позже.

Задача 18.03

Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\operatorname{Ln} z$ в области, изображенной на рисунке 22, такая, что $\varphi(1) = 0$. Найдите значения $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(-3)$.

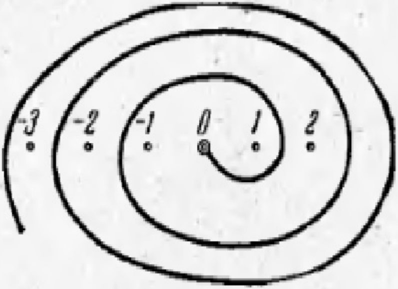


Рис. 22.

К задаче 18.03

Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}\, z$ в области, изображенной на рисунке 22, такая, что $\varphi(1) = 0$. Найдите значения $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(-3)$.

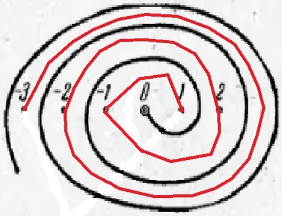


Рис. 22.

Нарисуем какой-нибудь путь γ в указанной области, выходящий из точки 1 и последовательно проходящий точки -1, -2, -3. Тогда значения ветви логарифма определяются величиной $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, z$.

$\varphi(-1) = \pi i$; $\varphi(-2) = \ln 2 + 3\pi i$; $\varphi(-3) = \ln 3 + 5\pi i$.

Задача 17.30 1) 2) Второй подход

Выясните, имеют ли следующие аналитические функции голоморфные ветви в области $D := \{1 < |z| < \infty\}$:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}$;

2) $2\operatorname{Ln}(z+1) - \operatorname{Ln}(z-i)$.

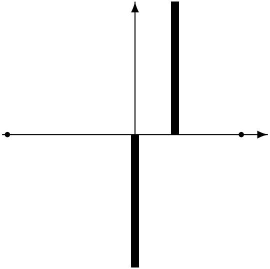
Второй подход состоит в том, чтобы рассмотреть произвольный элемент данной функции в какой-нибудь точке области D (например, в точке $z_0 = 2$) и изучить, что происходит с ним, если мы продолжим его вдоль пути γ, представляющего собой окружность с центром 0, проходящую через точку z_0 (обход против часовой стрелки).

Ответ выражается через величины $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z+1)$ и $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z+i)$ в первом случае и через величины $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z+1)$ и $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z-i)$ во втором. (Все они равны 2π.)

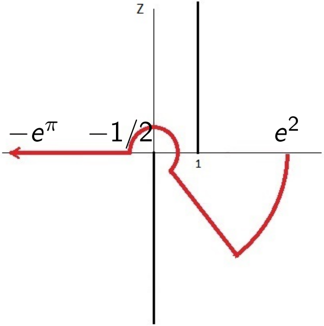
Можно показать, что в пункте 2) элемент продолжается вдоль γ не в себя (и тогда голоморфных ветвей быть не может), а у пункте 1) — в себя (и тогда доказывается, что порожденная им аналитическая функция в D будет голоморфной ветвью).

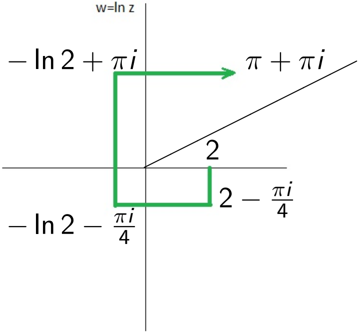
Задача 17.23

Пусть $D := \mathbb{C} \setminus ((-i\infty; 0] \cup [1; 1 + i\infty))$, а $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}\,\mathrm{Ln}\, z$ в области D такая, что $\varphi(e^2) = \ln 2$. Найдите значение $\varphi(-e^{\pi})$.



К задаче 17.23





Если $\psi(w)$ — такая ветвь $\mathrm{Ln}\, w$, что $\psi(2)=\ln 2$, то результат ее продолжения вдоль пути справа есть $\psi(\pi+\pi i)=\ln(\pi\sqrt{2})-\frac{7\pi i}{4}$. Достаточно взять $\ln w$, $-2\pi+\pi/8<\arg w<\pi/8$.

Изолированные особые точки аналитических функций

Напоминание: изолированные особые точки аналитической функции

Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется **изолированной особой точкой** аналитической функции $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}$ является аналитической функцией в проколотой окрестности V точки a вида

$$V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$$

при $a \in \mathbb{C}$ и вида

$$V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon\}$$

при $a = \infty$.

Классификация изолированных особых точек

Изолированная особая точка a называется:

1. *изолированной особой точкой однозначного характера*, если $\mathcal{F}$ однозначна. В этом случае $\mathcal{F}$ есть голоморфная функция в V, и точка a может быть ее устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой.
2. *точкой ветвления порядка* $n \in \mathbb{N}$, если число листов $\mathcal{F}$ равно n.
3. *логарифмической точкой ветвления* или *точкой ветвления бесконечного порядка*, если число листов $\mathcal{F}$ бесконечно.

Как определить тип особой точки?

Пусть V есть проколотая окрестность точки $a \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в V. Пусть $z_0 \in V$. Пусть F_0 — какой-нибудь элемент $\mathcal{F}$ в точке z_0. Пусть γ_0 — это путь, обходящий против часовой стрелки окружность с центром a, на которой лежит точка z_0, и начинающийся и кончающийся в точке z_0:

$$\gamma(t) := a + (z_0 - a)e^{2\pi i t}, \quad t \in [0; 1].$$

Пусть F_1 — результат продолжения элемента F_0 вдоль пути γ_0 и F_n при $n \in \mathbb{N}$ — результат продолжения элемента F_0 вдоль пути $\gamma_0^n = \underbrace{\gamma_0 \cup \gamma_0 \cup \dots \cup \gamma_0}_{n \text{ раз}}$.

Если $F_1 = F_0$, то аналитическая функция $\mathcal{F}$ однозначна и точка a — изолированная особая точка однозначного характера.
Если $F_1 \neq F_0$, но $F_n = F_0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причем $F_k \neq F_0$ при $k = 1, \dots, n-1$, то a — точка ветвления порядка n.
Если же $F_n \neq F_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то a — логарифмическая точка ветвления.
Аналогично можно поступить и в окрестности ∞.

Пример: $\sqrt[n]{z}$, точка $z = 0$

F_0 в точке $x > 0$ (например, $F_0 = (U_0, f_0)$, $f_0(x) > 0$).
$F_0 \mapsto F_1 \mapsto F_2 \mapsto \ldots \mapsto F_{n-1} \mapsto F_0$, где
$F_k = (U_k, f_k)$ и $f_k(x) = e^{2\pi i/n} f_{k-1}(x)$.
Итог: точка ветвления порядка n.

То же рассуждение можно использовать и для описания точки ∞.

Пример: $\mathrm{Ln}\, z$, точка $z = 0$

F_0 в точке $x > 0$ (например, $F_0 = (U_0, f_0)$, $f_0(x) \in \mathbb{R}$).
$\ldots \mapsto F_{-1} \mapsto F_0 \mapsto F_1 \mapsto F_2 \mapsto \ldots$, где
$F_k = (U_k, f_k)$ и $f_k(x) = f_{k-1}(x) + 2\pi i$. Здесь $k \in \mathbb{Z}$.
Итог: логарифмическая точка ветвления.

То же рассуждение можно использовать и для описания точки ∞.

$\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$, $z = 0$.
Начальный элемент $\varphi + \psi$ (например, в точке $\varepsilon > 0$, $\varphi(\varepsilon) > 0$, $\psi(\varepsilon) > 0$).
$\varphi + \psi \mapsto -\varphi + e^{2\pi i/3}\psi \mapsto \varphi + e^{4\pi i/3}\psi \mapsto -\varphi + \psi \mapsto$
$\mapsto \varphi + e^{2\pi i/3}\psi \mapsto -\varphi + e^{4\pi i/3}\psi \mapsto \varphi + \psi$.
Цепочка длины 6, то есть точка ветвления 6-го порядка.

Кроме того, мы видим, что любой элемент в точке ε получается из любого другого продолжением, то есть сумма является единой аналитической функцией.

$\sqrt{z} + \sqrt[4]{z}$, $z = 0$.
Начальный элемент $\varphi + \psi$ (например, в точке $\varepsilon > 0$, $\varphi(\varepsilon) > 0$, $\psi(\varepsilon) > 0$).
$\varphi + \psi \mapsto -\varphi + i\psi \mapsto \varphi - \psi \mapsto -\varphi - i\psi \mapsto \varphi + \psi \Rightarrow$
точка ветвления четвертого порядка.
Но ведь есть и другие элементы! Например, $\varphi + i\psi$.
$\varphi + i\psi \mapsto -\varphi - \psi \mapsto \varphi - i\psi \mapsto -\varphi + \psi \mapsto \varphi + i\psi \Rightarrow$
еще одна точка ветвления четвертого порядка.
Других элементов в точке $\varepsilon > 0$ нет (всего 8=2x4 вариантов для суммы).
Ответ: две точки ветвления четвертого порядка.

Упражнение на дом. Рассмотрите общий случай $\sqrt[k]{z} + \sqrt[l]{z}$, $z = 0$, $k, l \in \mathbb{N}$.

$\sqrt[3]{z^2}$ $(z = 0)$
$\varphi \mapsto e^{4\pi i/3}\varphi \mapsto e^{8\pi i/3}\varphi = e^{2\pi i/3}\varphi \mapsto \varphi.$
Одна точка ветвления 3-го порядка.

$\sqrt[6]{z^4}$ $(z = 0)$
$\varphi \mapsto e^{8\pi i/6}\varphi = e^{4\pi i/3}\varphi \mapsto e^{8\pi i/3}\varphi = e^{2\pi i/3}\varphi \mapsto \varphi \Rightarrow$
одна точка ветвления 3-го порядка.
$e^{\pi i/3}\varphi \mapsto e^{5\pi i/3}\varphi \mapsto e^{9\pi i/3}\varphi = -\varphi \mapsto e^{13\pi i/3}\varphi = e^{\pi i/3}\varphi \Rightarrow$
еще одна точка ветвления 3-го порядка.
Итого две точки ветвления 3-го порядка.

Упражнение на дом. Рассмотрите общий случай $\sqrt[k]{z^l}$, $z = 0$, $k, l \in \mathbb{N}$.

$(\sqrt[6]{z})^4$ сравните с $\sqrt[6]{z^4}$:
У $\sqrt[6]{z}$ 6 элементов в точке $\varepsilon > 0$:
$\varphi_0(\varepsilon) > 0$ и $\varphi_k = e^{\pi i k/3}\varphi_0$, $k = 1, \dots, 5$.
Но $\varphi_k^4 = e^{4\pi i k/3}\varphi_0^4$ и потому $\varphi_3^4 = \varphi_0^4$, $\varphi_4^4 = \varphi_1^4$, $\varphi_5^4 = \varphi_2^4$.
Различных элементов $(\sqrt[6]{z})^4$ ровно 3, одна точка ветвления 3-го порядка.