Семинар по комплексному анализу 25 марта 2020 г.

Принцип симметрии. Формулировка 1

Теорема 1. Пусть ω_1 и ω_2 — две обобщенных окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через S_1 и S_2 симметрии относительно ω_1 и ω_2 соответственно.

Пусть D — область в $\overline{\mathbb{C}}$, лежащая по одну сторону от ω_1 и такая, что ее граница ∂D содержит открытый интервал I_1 обобщенной окружности ω_1, причем $\mathcal{D} := D \cup I \cup S_1(D)$ — область.

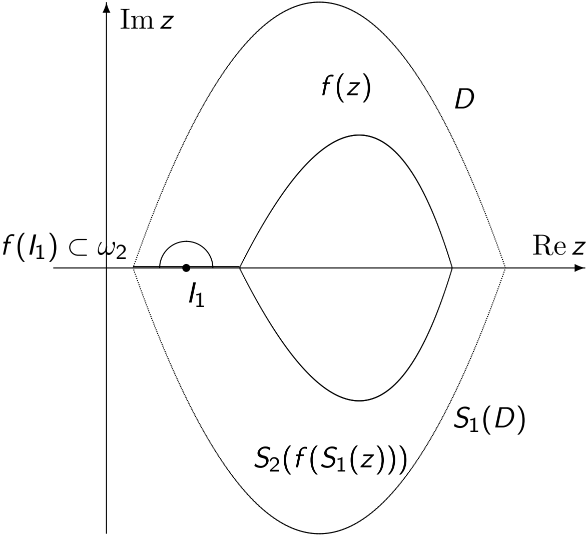
Пусть функция $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(D \cup I_1)$ и $f(I_1) \subset \omega_2$.

Тогда функция

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D \cup I_1; \\ S_2(f(S_1(z))), & \text{если } z \in S_1(D) \end{cases}$$

голоморфна в области $\mathcal{D} = D \cup I_1 \cup S_1(D)$.

Иллюстрация к первой формулировке принципа симметрии



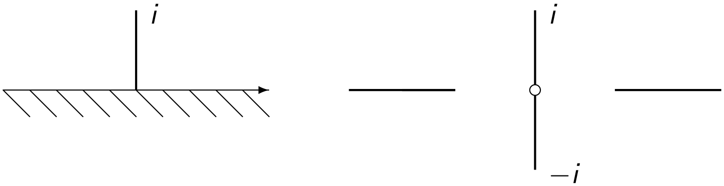
Простейший случай: $\omega_1 = \omega_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Тогда $S_2(f(S_1(z))) = \overline{f(\bar{z})}$. Условия теоремы сводятся к тому, что:

- область D лежит в одной из двух полуплоскостей — верхней или нижней — и ее граница содержит интервал I_1 вещественной прямой;
- значения f на интервале I_1 вещественны.

Замечание к условию теоремы

Условие, что $\mathcal{D} := D \cup I \cup S_1(D)$ — область, приходится накладывать дополнительно. Вот контрпример:

- $D = \{\mathrm{Im}\, z > 0\} \setminus (0; i]$;
- $I_1 = (-1; 1)$.



Точка 0 — не внутренняя.

Принцип симметрии. Формулировка 2

Теорема 2. Пусть ω_1 и ω_2 — две обобщенных окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через S_1 и S_2 симметрии относительно ω_1 и ω_2 соответственно.

Пусть D_1 и D_2 — области в $\overline{\mathbb{C}}$, лежащие по одну сторону от ω_1 и ω_2 соответственно. Пусть границы ∂D_1 и ∂D_2 содержат открытые интервалы $I_1 \subset \omega_1$ и $I_2 \subset \omega_2$ соответственно, причем $\mathcal{D}_1 := D_1 \cup I_1 \cup S_1(D_1)$ и $\mathcal{D}_2 := D_2 \cup I_2 \cup S_2(D_2)$ — области.

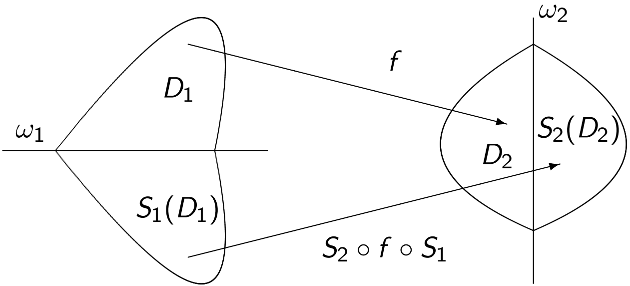
Пусть функция $f \in \mathcal{O}(D_1) \cap C(D_1 \cup I_1)$ *конформно* отображает D_1 на D_2 и *гомеоморфно* отображает I_1 на I_2.

Тогда функция

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D \cup I_1; \\ S_2(f(S_1(z))), & \text{если } z \in S_1(D) \end{cases}$$

конформно отображает $\mathcal{D}_1$ на $\mathcal{D}_2$.

Иллюстрация ко второй формулировке принципа симметрии



Задачи

Задача 34.03

Пусть функция f голоморфна в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывна в $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и принимает на действительной оси действительные значения. Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость.

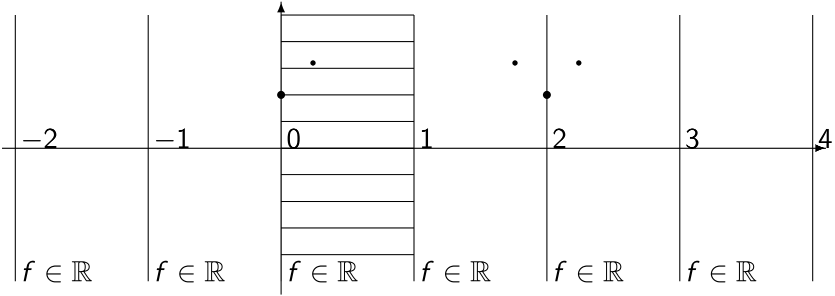
К задаче 34.03

Утверждение задачи получится, если мы впрямую применим утверждение первой формулировки принципа симметрии для $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $\omega_1 = \omega_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $l_1 = \mathbb{R}$.

Задача 34.04

Пусть функция f голоморфна в полосе $\{0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, непрерывна в замкнутой полосе $\{0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1\}$ и принимает действительные значения на прямых $\{\mathrm{Re}\, z = 0\}$ и $\{\mathrm{Re}\, z = 1\}$. Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость и что функция F, осуществляющая это продолжение, периодична с периодом 2: $F(z + 2) = F(z)$.

К задаче 34.04



Единственность: неважно, продолжать на втором шаге из $\{1 < \mathrm{Re}\, z < 2\}$ в $\{2 < \mathrm{Re}\, z < 3\}$ или из $\{0 < \mathrm{Re}\, z < 2\}$ в $\{2 < \mathrm{Re}\, z < 4\}$.

Периодичность: a) $F(2 + it) = F(it)$ при $t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow F(z + 2) \equiv F(z)$ в $\mathbb{C}$;

$$\begin{array}{lllll} & x + iy & \mapsto & u + iv & \\ \text{b)} & 2 - x + iy & \mapsto & u - iv & (0 < x < 1) \\ & 2 + x + iy & \mapsto & u + iv & \end{array}$$

$\Rightarrow F(z + 2) \equiv F(z)$ в $\{0 < \mathrm{Re}\, z < 1\} \Rightarrow F(z + 2) \equiv F(z)$ в $\mathbb{C}$;

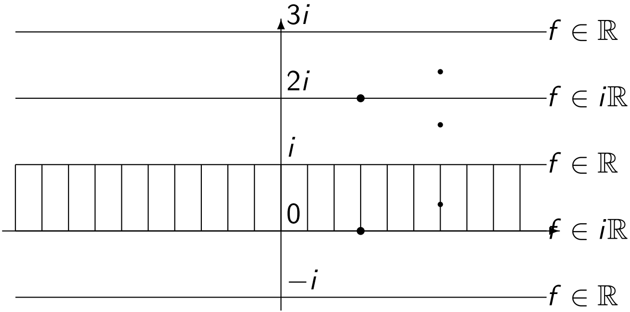
Задача 34.05

Пусть функция f голоморфна в полосе $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$, непрерывна в замкнутой полосе $\{0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$ и удовлетворяет условиям:

- $\operatorname{Re} f(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$;
- $\operatorname{Im} f(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z = 1$.

Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость и что функция F, осуществляющая это продолжение, удовлетворяет условию $F(z + 2i) = -F(z)$.

К задаче 34.05



Условие: а) $F(t+2i) = -F(t)$ при $t \in \mathbb{R}$;

$$
\text{б)}\quad
\begin{array}{lcll}
x + iy & \mapsto & u + iv & \\
x + i(2-y) & \mapsto & u - iv & (0 < y < 1) \\
x + i(2+y) & \mapsto & -u - iv &
\end{array}
$$

Задача 34.06

Пусть функция f голоморфна в прямоугольнике

$$\{0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad |\operatorname{Im} z| < h\},$$

непрерывна в замыкании этого прямоугольника и удовлетворяет условиям:

- $\operatorname{Im} f(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z = 0$, $|\operatorname{Im} z| < h$;
- $\operatorname{Im} f(z) = 1$ при $\operatorname{Re} z = 1$, $|\operatorname{Im} z| < h$.

Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить на полосу $\{|\operatorname{Im} z| < h\}$ и что функция F, осуществляющая это продолжение, имеет вид $iz + F_1(z)$, где функция $F_1(z)$ периодична с периодом 2: $F_1(z+2) = F_1(z)$.

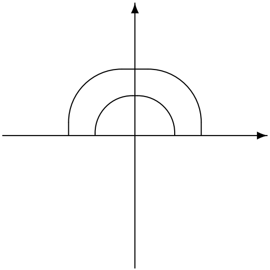
Задача 34.07

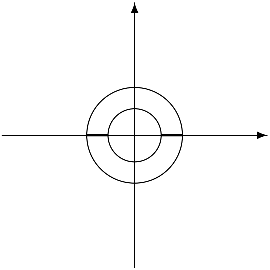
Пусть функция f голоморфна в полукольце

$$\{r < |z| < R, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\},$$

непрерывна в его замыкании и принимает действительные значения на интервалах $(-R; -r)$ и $(r; R)$. Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить до голоморфной функции в кольце {r<|z|<R}.

К задаче 34.07





Задача 34.11

Пусть функция f голоморфна в кольцевом секторе

$$\{r < |z| < R, \quad 0 < \arg z < \pi/n\} \text{ (} n \text{ — натуральное число),}$$

непрерывна в его замыкании и удовлетворяет условиям:

- $\mathrm{Re}\, f(z) = 0$ при $r < |z| < R$, $\arg z = 0$;
- $\mathrm{Re}(e^{-\pi i/n} f(z)) = 0$ при $r < |z| < R$, $\arg z = \pi/n$.

Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить до голоморфной функции в кольце $\{r < |z| < R\}$.

Задача 34.15

Пусть функция f голоморфна в кольцевом секторе

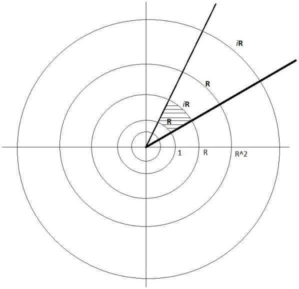
$$\{1 < |z| < R, \quad \alpha < \arg z < \beta\},$$

непрерывна в его замыкании и удовлетворяет условиям:

- $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ при $|z| = 1$, $\alpha < \arg z < \beta$;
- $\mathrm{Re}\, f(z) = 0$ при $|z| = R$, $\alpha < \arg z < \beta$.

Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить до голоморфной функции в угле $\{\alpha < \arg z < \beta\}$ и что функция F, осуществляющая это продолжение, удовлетворяет соотношению $F(R^2 z) = -F(z)$.

К задаче 34.15



Симметрия относительно $\{|z| = \rho\}$: $z \mapsto \frac{\rho^2}{\bar{z}}$ или $re^{i\theta} \mapsto \frac{\rho^2}{r} e^{i\theta}$.
Соотношение: $F(R^2 z) = -F(z)$ при $|z| = 1$.
Или опять можно сделать два шага симметрии.

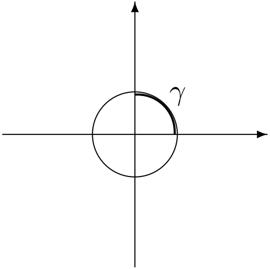
Задача (не из задачника Евграфова, №1)

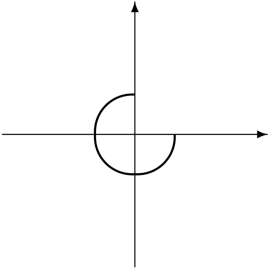
Пусть γ —дуга единичной окружности $\{|z| = 1\}$. Пусть функция f голоморфна в единичном круге и непрерывно продолжается на дугу γ:

$$f \in \mathcal{O}(\{|z| < 1\}) \cap C(\{|z| < 1\} \cup \gamma),$$

причем $f|_\gamma \equiv 0$. Докажите, что $f \equiv 0$.

К задаче №1





По принципу симметрии ($\omega_1 = \{|z| = 1\}$, $l_1 = \gamma$, $\omega_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) функция f аналитически продолжается до голоморфной функции F в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \big(\{|z| = 1\} \setminus \gamma\big)$, причем $F|_\gamma \equiv 0$.

Задача (не из задачника Евграфова, №2)

а) Пусть функция f голоморфна в единичном круге и непрерывно продолжается на его замыкание:

$$f \in \mathcal{O}(\{|z| < 1\}) \cap C(\{|z| \leqslant 1\}),$$

причем значения функции f на единичной окружности вещественны. Докажите, что $f \equiv const$.

б) Приведите пример такой непостоянной функции f, голоморфной в единичном круге, что $f \in C(\{|z| \leqslant 1\} \setminus \{1\})$ и $f(z)$ вещественна при $|z| = 1$, $z \neq 1$.

К задаче №2

а) По принципу симметрии ($\omega_1 = l_1 = \{|z| = 1\}$, $\omega_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) функция f аналитически продолжается до голоморфной функции F в $\overline{\mathbb{C}}$.

б) Пусть $g(z)$ — любая (непостоянная) целая функция такая, что $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (например, $g(z) = \sin z$). ДЛО $L(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ переводит $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в $\{|z| = 1\}$, причем $L(\infty) = 1$. Функция $f = g \circ L^{-1}$ может служить требуемым примером.

Теорема Каратеодори

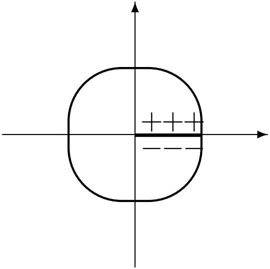
В дальнейших задачах мы будем использовать без доказательства следующую важную теорему:

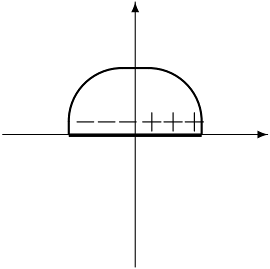
Теорема Каратеодори. Пусть D_1 и D_2 — области с простыми границами. Пусть функция f конформно отображает D_1 на D_2. Тогда f продолжается до гомеоморфизма замыканий: $f : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$.

Замечание. На самом деле теорема Каратеодори верна и в случае, когда границы областей D_1 и D_2 — объединение конечного числа непересекающихся замкнутых жордановых кривых, не обязательно кусочно гладких.

Не всякое конформное отображение областей продолжается непрерывно на границу

Пусть D_1 — единичный круг $\{|z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0;1]$, а D_2 — полукруг $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Функция $\sqrt{z}$ (точнее, $\left(z^2|_{\{\operatorname{Im} z>0\}}\right)^{-1}$) конформно отображает D_1 на D_2, но не продолжается непрерывно на отрезок $[0;1]$: предельные значения этой функции сверху положительны, а предельные значения снизу отрицательны.

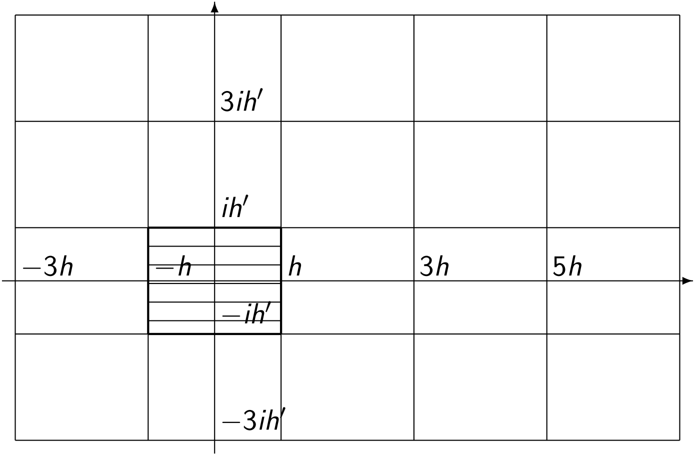




Задача 34.19

Пусть функция f конформно отображает прямоугольник $\{|\operatorname{Re} z| < h, \quad |\operatorname{Im} z| < h'\}$ на какой-нибудь круг (или полуплоскость). Докажите, что функция f аналитически продолжается до мероморфной функции на всей плоскости, которая периодична с периодами $4h$ и $4ih'$.

К задаче 34.19



Каждая из сторон исходного прямоугольника отображается в некоторую дугу граничной окружности (или интервал граничной прямой). Точка, симметричная центру круга — ∞.

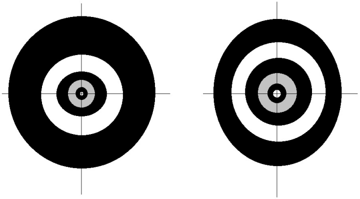
Задача 34.21

Докажите, что любое конформное отображение круга на круг является дробно-линейным.

Задача 34.22

Докажите, что если $R_1 \neq R_2$, то не существует конформного отображения кольца $\{1 < |z| < R_1\}$ на кольцо $\{1 < |z| < R_2\}$.

К задаче 34.22



Пусть $f : \{1 < |z| < R_1\} \to \{1 < |z| < R_2\}$ конформно. По теореме Каратеодори либо $f : \{|z| = 1\} \to \{|z| = 1\}$ и $f : \{|z| = R_1\} \to \{|z| = R_2\}$, либо наоборот.
В первом случае по принципу симметрии $F : \{R_1^k < |z| < R_1^{k+1}\} \to \{R_2^k < |z| < R_2^{k+1}\}$ и тогда $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ конформно, причем F ограничена в окрестности нуля, а тогда $F(0) = 0$ и $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ конформно. Тогда F линейно, а значит, F — поворот и $R_1 = R_2$.

К задаче 34.22 (продолжение)

Во втором случае $f : \{|z| = 1\} \to \{|z| = R_2\}$ и $f : \{|z| = R_1\} \to \{|z| = 1\}$.

Рассмотрим функцию $g(z) := \dfrac{R_2}{f(z)}$. Она тоже конформно отображает кольцо $\{1 < |z| < R_1\}$ в кольцо $\{1 < |z| < R_2\}$, но $g : \{|z| = 1\} \to \{|z| = 1\}$ и $g : \{|z| = R_1\} \to \{|z| = R_2\}$. Из предыдущих рассуждений (случай 1) $g(z) = e^{i\theta} z$ и $R_1 = R_2$.

Задача (не из задачника Евграфова, №3, но обобщающая предыдущую задачу)

а) Какие кольца вида $\{\alpha < |z| < \beta\}$ конформно эквивалентны данному кольцу $\{r < |z| < R\}$?

б) Опишите все конформные автоморфизмы кольца $\left\{\frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$.

Задача (не из задачника Евграфова, №4)

Пусть функция f конформно отображает прямоугольник Π_1 на другой прямоугольник Π_2, причем каждая из вершин прямоугольника Π_1 отображается в одну из вершин Π_2. Докажите, что f — линейная функция. (Следовательно, прямоугольники Π_1 и Π_2 подобны, то есть имеют одинаковое отношение сторон.)