Семинар по комплексному анализу 22 апреля 2020 г.

Голоморфные ветви аналитических функций

Напоминание: если $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D, а $\tilde{D} \subset D$ — односвязная подобласть, то ограничение $\mathcal{F}|_{\tilde{D}}$ — объединение голоморфных функций в области $\tilde{D}$ (голоморфных ветвей $\mathcal{F}$).

Иногда голоморфные ветви аналитической функции можно выделить и в неодносвязной подобласти.

Голоморфные ветви логарифма и корней

Как мы знаем еще с первого семестра, аналитическая в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функция $\mathrm{Ln}\, z$ имеет счетное число голоморфных ветвей в любой области вида «плоскость с разрезом по лучу, выходящему из нуля»:

$$D_\alpha = \mathbb{C}\setminus\{\arg z = \alpha\} \Longrightarrow$$

$$\varphi_k(z) = \ln z = \ln|z| + i\arg z, \alpha + 2\pi k < \arg z < \alpha + 2\pi(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом $\varphi_l(z) - \varphi_k(z) \equiv 2\pi i(l-k)$.
В такой же области D_α аналитическая в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функция $\sqrt[n]{z}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеет ровно n голоморфных ветвей:

$$\psi_j(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(\frac{i\arg z}{n}\right),$$

$$\alpha + 2\pi j < \arg z < \alpha + 2\pi(j+1), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

При этом $\psi_m(z) = \psi_j(z)\exp\left(\dfrac{2\pi i(m-j)}{n}\right)$.

Задача 17.03.

Пусть D — односвязная область, не содержащая точек 0 и ∞, но содержащая точку 1. Сколько существует голоморфных ветвей φ аналитической функции $\mathcal{F}$ в области D, удовлетворяющих данному условию?

1. $\mathcal{F}(z) = (z-1)\operatorname{Ln} z$, $\varphi(1) = 0$.
2. $\mathcal{F}(z) = z^z$, $\varphi(1) = 1$.
3. $\mathcal{F}(z) = z^{iz}$, $\varphi(1) = 1$.
4. $\mathcal{F}(z) = z^{z/2}$, $\varphi(1) = 1$.
5. $\mathcal{F}(z) = z^{z/4}$, $\varphi(1) = 1$.
6. $\mathcal{F}(z) = z^z$, $\varphi'(1) = 1$.

К задаче 17.03

1. $\mathcal{F}(z) = (z-1)\,\mathrm{Ln}\,z$: $\varphi(1) = 0$ — все ветви (счетное множество).

2. $\mathcal{F}(z) = z^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,z}$: $\varphi(1) = 1$ — все ветви (счетное множество).

3. $\mathcal{F}(z) = z^{iz} = e^{iz\,\mathrm{Ln}\,z}$, $\varphi(1) = 1 \Rightarrow i\ln 1 = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\ln 1 = 0$ — одна ветвь.

4. $\mathcal{F}(z) = z^{z/2} = e^{\frac{1}{2}z\,\mathrm{Ln}\,z}$, $\varphi(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln 1 = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\ln 1 = 4\pi ik$ — счетное множество ветвей («половина» от всех).

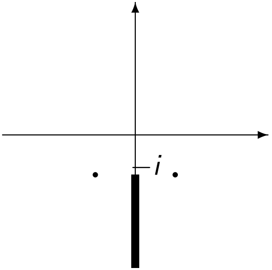
5. $\mathcal{F}(z) = z^{z/4} = e^{\frac{1}{4}z\,\mathrm{Ln}\,z}$, $\varphi(1) = 1$. $\varphi(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}\ln 1 = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ln 1 = 8\pi ik$ — счетное множество ветвей («четверть» от всех).

6. $\mathcal{F}(z) = z^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,z}$, $\varphi'(1) = 1 \Rightarrow$ $e^{z\ln z}(\ln z + 1)|_{z=1} = 1 \Rightarrow \ln 1 = 0$ — одна ветвь.

Задача 17.05 1.

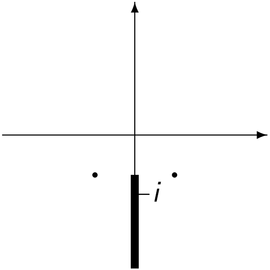
Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}(z+i)$ в области D такая, что $\varphi(1-i)=0$. Чему равно значение $\varphi(-1-i)$?

1. $D=\mathbb{C}\setminus(-i\infty;-i]$.



К задаче 17.05 1.

$\varphi(z)$ — ветвь $\mathrm{Ln}(z+i)$ в области D, $\varphi(1-i)=0$. $\varphi(-1-i)=?$
$D=\mathbb{C}\setminus(-i\infty;-i]$.

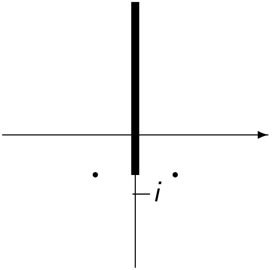


$\ln(z+i)=\ln|z+i|+i\arg(z+i)$,
$-\pi/2+2\pi k<\arg(z+i)<3\pi/2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
$z=1-i\Rightarrow z+i=1\Rightarrow k=0$.
$z=-1-i\Rightarrow z+i=-1\Rightarrow\varphi(-1-i)=\ln(-1)=\pi i$.

Задача 17.05 2.

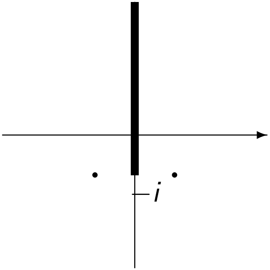
Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}(z+i)$ в области D такая, что $\varphi(1-i)=0$. Чему равно значение $\varphi(-1-i)$?

2. $D=\mathbb{C}\setminus[-i;+i\infty)$.



К задаче 17.05 2.

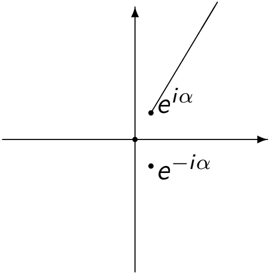
$\varphi(z)$ — ветвь $\mathrm{Ln}(z+i)$ в области D, $\varphi(1-i)=0$. $\varphi(-1-i)=?$
$D=\mathbb{C}\setminus[-i;+i\infty)$.



$\ln(z+i)=\ln|z+i|+i\arg(z+i)$,
$\pi/2+2\pi k<\arg(z+i)<5\pi/2+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
$z=1-i\Rightarrow z+i=1\Rightarrow k=-1$.
$z=-1-i\Rightarrow z+i=-1\Rightarrow\varphi(-1-i)=\ln(-1)=-\pi i$.

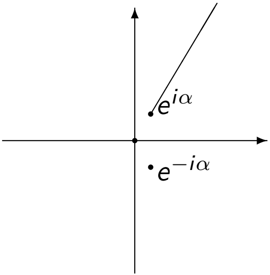
Задача 17.06 1.

Пусть $\alpha \in (0; \pi/2)$. Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt{z - e^{i\alpha}}$ в области D такая, что $\varphi(0) = ie^{i\alpha/2}$. Чему равно значение $\varphi(e^{-i\alpha})$?
1. $D = \mathbb{C} \setminus [e^{i\alpha}; +\infty e^{i\alpha})$.



К задаче 17.06 1.

$\varphi(z)$ — ветвь $\sqrt{z - e^{i\alpha}}$ в области D такая, что $\varphi(0) = ie^{i\alpha/2}$.
$\varphi(e^{-i\alpha}) = ?$
1. $D = \mathbb{C} \setminus [e^{i\alpha}; +\infty e^{i\alpha})$.

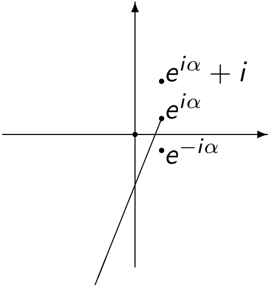


$\varphi(z) = \sqrt{z - e^{i\alpha}}(\text{ветвь}) = \pm\sqrt{|z - e^{i\alpha}|}\exp(\frac{1}{2} i \arg(z - e^{i\alpha}))$,
$\alpha < \arg(z - e^{i\alpha}) < 2\pi + \alpha$.
$z = 0 \Rightarrow z - e^{i\alpha} = -e^{i\alpha} \Rightarrow \arg(z - e^{i\alpha}) = \alpha + \pi \Rightarrow \oplus$.
$z = e^{-i\alpha} \Rightarrow z - e^{i\alpha} = e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} = -2i \sin\alpha \Rightarrow$
$\arg(-2i\sin\alpha) = 3\pi/2 \Rightarrow$
$\varphi(e^{-i\alpha}) = \sqrt{2\sin\alpha}e^{3\pi i/4} = (-1 + i)\sqrt{\sin\alpha}$.

Задача 17.06 2.

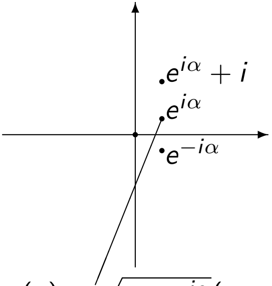
Пусть $\alpha \in (0; \pi/2)$. Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt{z - e^{i\alpha}}$ в области D такая, что $\varphi(0) = ie^{i\alpha/2}$. Чему равно значение $\varphi(e^{-i\alpha})$?

1. $D = \mathbb{C} \setminus [e^{i\alpha}; e^{i\alpha} - \infty(e^{i\alpha} + i))$.



К задаче 17.06 2.

$\varphi(z)$ — ветвь $\sqrt{z - e^{i\alpha}}$ в области D такая, что $\varphi(0) = ie^{i\alpha/2}$.
$\varphi(e^{-i\alpha}) =?$
1. $D = \mathbb{C} \setminus [e^{i\alpha}; e^{i\alpha} - \infty(e^{i\alpha} + i))$.



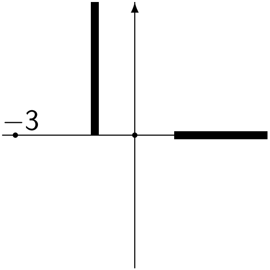
$\varphi(z) = \sqrt{z - e^{i\alpha}}(\text{ветвь}) = \pm\sqrt{|z - e^{i\alpha}|}\exp(\frac{1}{2} i \arg(z - e^{i\alpha}))$,
$-\pi + \alpha_0 < \arg(z - e^{i\alpha}) < \pi + \alpha_0$. Здесь $\alpha_0 = \arg(e^{i\alpha} + i)) > \alpha$.

$z = 0 \Rightarrow z - e^{i\alpha} = -e^{i\alpha} \Rightarrow \arg(z - e^{i\alpha}) = \alpha + \pi \Rightarrow \oplus$.
$z = e^{-i\alpha} \Rightarrow z - e^{i\alpha} = e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} = -2i \sin\alpha \Rightarrow$
$\arg(-2i \sin\alpha) = -\pi/2 \Rightarrow$
$\varphi(e^{-i\alpha}) = \sqrt{2\sin\alpha}e^{-\pi i/4} = (1 - i)\sqrt{\sin\alpha}$.

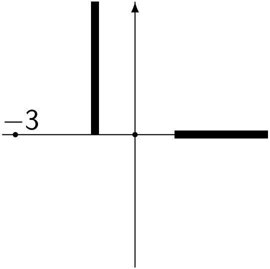
Задача 17.08 1.

Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=1$. Найдите $\varphi(-3)$.

1. $D=\mathbb{C}\setminus([1;+\infty)\cup[-1;-1+i\infty))$.



К задаче 17.08 1.



$\varphi(z) = \sqrt[3]{1-z^2} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{z-1}\sqrt[3]{z+1}$ (нужно $\varphi(0) = 1$).
Например, $g(z) = \sqrt[3]{z-1}$, $0 < \arg(z-1) < 2\pi$, а
$h(z) = \sqrt[3]{z+1}$, $\pi/2 < \arg(z+1) < 5\pi/2$.
Тогда три ветви $\sqrt[3]{1-z^2}$ есть $\varphi_k(z) = e^{\pi i(1+2k)/3} g(z)h(z)$,
$k = 0, 1, 2$.

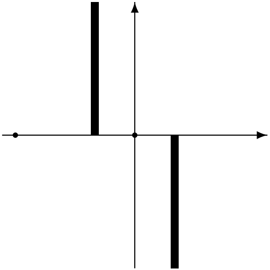
$\varphi_k(0) = e^{\pi i(1+2k)/3} g(0)h(0) = e^{\pi i(1+2k)/3} e^{\pi i/3} e^{2\pi i/3}$
$= e^{(4+2k)i\pi/3} = 1 \Rightarrow k = 1$.

$\varphi_1(-3) = e^{3\pi i/3} g(-3)h(-3) = (-1)\sqrt[3]{4}e^{\pi i/3}\sqrt[3]{2}e^{\pi i/3} =$
$-2e^{2\pi i/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

Задача 17.08 2.

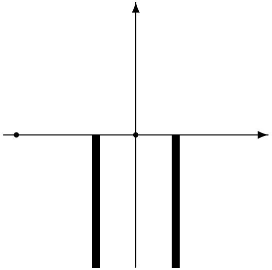
Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=1$. Найдите $\varphi(-3)$.

2. $D = \mathbb{C} \setminus ([1; 1-i\infty) \cup [-1; -1+i\infty))$.



Задача 17.08 3.

Пусть $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$. Найдите $\varphi(-3)$.
3. $D = \mathbb{C} \setminus ([1; 1 - i\infty) \cup [-1; -1 - i\infty))$.



Задача 16.13

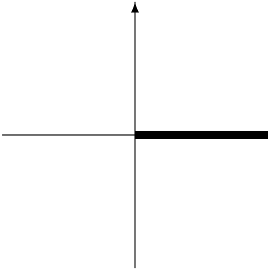
Докажите, что функция $\sqrt{1-z^2}$ имеет голоморфную ветвь в области $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$.

Идея: рассмотрим голоморфную ветвь в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 1]$ и покажем, что она непрерывна на луче $(-\infty; -1]$.

Пусть $\varphi(z) = g(z)h(z)$, где:
$g(z) = \sqrt{1-z}$, $-\pi < \arg(z-1) < \pi$ (пусть $0 < \arg(1-z) < 2\pi$) — голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 1]$;
$h(z) = \sqrt{z+1}$, $-\pi < \arg(z+1) < \pi$ — голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty; -1]$.
Тогда при $t > 1$ имеем:
$g(-t+i0) = -\sqrt{t+1}$; $h(-t+i0) = i\sqrt{t-1}$;
$\varphi(-t+i0) = -i\sqrt{t^2-1}$;
$g(-t-i0) = +\sqrt{t+1}$; $h(-t-i0) = -i\sqrt{t-1}$;
$\varphi(-t-i0) = -i\sqrt{t^2-1} = \varphi(-t+i0)$.

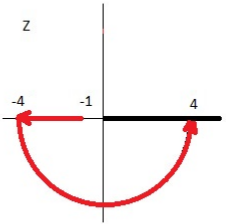
Задача 17.20

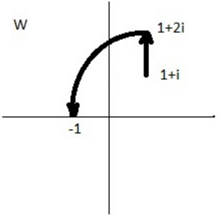
Пусть $D := \mathbb{C} \setminus [0; \infty)$, а $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}(1 + \sqrt{z})$, удовлетворяющая условию $\varphi(-1) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$. Найдите значение $\varphi(4 - i0)$.



К задаче 17.20

$D := \mathbb{C} \setminus [0; \infty)$, $\varphi(z)$ — ветвь $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{z})$ такая, что $\varphi(-1) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$. $\varphi(4 - i0) = ?$





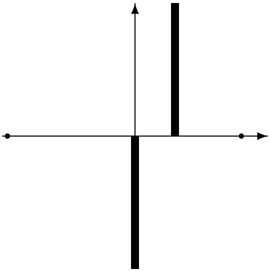
Делаем замену $w = 1 + \sqrt{z}$. Пусть z обходит путь на левом рисунке. Как меняется w?
$e^{\varphi(-1)} = \sqrt{2}e^{\pi i/4} = 1 + i$. Значит, начальный элемент $\sqrt{z}$ в точке $z = -1$ равен i, а начальный элемент $\mathrm{Ln}\, w$ в точке $1 + i$ равен $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$.

К задаче 17.20 (продолжение)

Мы поняли, что если z проходит путь на рисунке слева, то $w = 1 + \sqrt{z}$ проходит путь на рисунке справа. Тогда как меняется значение $\ln w$ (если оно непрерывно вдоль пути справа)?
Достаточно найти подходящую ветвь $\mathrm{Ln}\, w$ в области, целиком содержащей путь на рисунке справа (то есть такую, что $\ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$), и взять ее значение в конце пути.
Подходящая ветвь: $0 < \arg w < 2\pi$. Тогда $\ln w|_{w=-1} = \pi i$.

Задача 17.23

Пусть $D := \mathbb{C} \setminus ((-i\infty; 0] \cup [1; 1 + i\infty))$, а $\varphi(z)$ — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathrm{Ln}\,\mathrm{Ln}\, z$ в области D такая, что $\varphi(e^2) = \ln 2$. Найдите значение $\varphi(-e^\pi)$.



К задаче 17.23