Материалы к семинару 18 марта 2020 года

Это занятие будет посвящено теореме Римана о конформном отображении. Вспомним сначала формулировку этой теоремы:

Теорема Римана. *Пусть D — односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки. Тогда существует функция, конформно отображающая область D на единичный круг $U := \{|z| < 1\}$.*

В частности, если D — односвязная область в $\mathbb{C}$, не совпадающая со всей комплексной плоскостью, то ее граница не может содержать одну точку (иначе D была бы плоскостью без точки: $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, а такая область неодносвязна). Поэтому такую область можно конформно отобразить на единичный круг.

Единственность. Единственно ли отображение, существование которого утверждается в теореме Римана, а если нет, то как задать его однозначно?

Легко понять, что если функция f конформно отображает область D на единичный круг, то и любая функция вида $e^{i\theta} f$, $\theta \in \mathbb{R}$, делает то же самое, поэтому отображение заведомо не единственно. Более того, если L — любой конформный автоморфизм единичного круга (напомним, что все они дробно-линейные и имеют вид $L(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, где $\theta \in \mathbb{R}$ и $a \in U$), то функция $L(f(z))$ также конформно отображает область D на единичный круг.

Покажем, что если функция f конформно отображает область D на единичный круг, то никаких других функций отображений с этим свойством, кроме функций вида $L(f(z))$, где L — автоморфизм единичного круга, нет. Действительно, если две функции f_1 и f_2 конформно отображает область D на единичный круг, то композиция $f_2 \circ f_1^{-1}$ есть конформное отображение единичного круга на себя. Значит, $f_2 \circ f_1^{-1} = L$, где L — некоторый автоморфизм единичного круга, а тогда $f_2 = L \circ f_1$, что и требовалось.

Итак, множество конформных отображений данной области D на единичный круг, говоря нестрого, задается тремя вещественными параметрами. Один из способов задать такое отображение однозначно состоит в следующем. Зафиксируем точку $a \in D$ и потребуем, чтобы она переводилась в нуль: $f(a) = 0$. Такое отображение обязательно существует: для обоснования можно было бы сослаться на приведенное в лекции 5 доказательство теоремы Римана, где условие $f(a) = 0$ для произвольно выбранной точки области возникало само собой, но проще показать это непосредственно. Действительно, пусть f_0 — какое-нибудь конформное отображение данной области D на единичный круг и пусть $f_0(a) = b \in U$. Если $b \neq 0$, то рассмотрим отображение $f(z) := \dfrac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}$, то есть сделаем после f_0 автоморфизм единичного круга, который переводит точку b в нуль. Очевидно, $f(a) = 0$.

Условие $f(a) = 0$ все еще не задает функцию f однозначно, потому что ее можно домножить на константу $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Чтобы исключить этот произвол, наложим еще одно условие: $\arg f'(a) = \varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданный угол. Очевидно, поскольку $(e^{i\theta} f)'(a) = e^{i\theta} \cdot f'(a)$ и $f'(a) \neq 0$ вследствие конформности функции f в D, всегда можно подобрать θ таким образом, чтобы функция $\tilde{f}(z) = e^{i\theta} f(z)$ удовлетворяла условию $\arg \tilde{f}'(a) = \varphi$.

Покажем, что два условия $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = \varphi$ уже определяют конформное отображение $f : D \to U$ однозначно. В самом деле, если f — такое отображение, удовлетворяющее двум приведенным выше условиям, то, как мы уже выяснили, любое другое конформное отображение D на U имеет вид $L \circ f$, где L — автоморфизм единичного круга. Если $L(f(a)) = 0$, то $L(0) = 0$, то есть L — поворот: $L(z) = e^{i\theta} z$. Если еще $\arg(L \circ f)'(a) = \varphi$, то $L(z) = z$: действительно, $(L \circ f)'(a) = L'(f(a)) f'(a) = L'(0) f'(a)$, а тогда $\arg(L \circ f)'(a) = \arg f'(a) + \arg L'(0) = \varphi + \theta$, в то время как мы предположили, что $\arg(L \circ f)'(a) = \varphi$, значит, $\theta = 0$.

Подводя итог, мы можем сказать: если D — любая односвязная область в $\mathbb{C}$, $a \in D$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, то существует единственное конформное отображение D на единичный круг, удовлетворяющее условиям $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = \varphi$.

Задачи

Всюду в формулировках приводимых ниже задач D — односвязная область в $\mathbb{C}$, не совпадающая с $\mathbb{C}$. Через $g_a(z)$ обозначается какое-нибудь конформное отображение области D на единичный круг, переводящее точку $a \in D$ в нуль (все они, как пояснено выше, отличаются друг от друга на постоянный множитель вида $e^{i\theta}$).

Решения задач приведены далее, каждое на отдельной странице. Рекомендуется сначала подумать над задачей самостоятельно, а в решение заглядывать, если задача не получилась. Если не получились все задачи, полезно прочитать решение одной из них, а затем подумать, нельзя ли применить похожие идеи в других задачах.

Напоминание (дополнение к лемме Шварца, см. первый семинар этого семестра). Пусть функция f голоморфна в единичном круге U, причем $f(0) = 0$ и $|f(z)| < M$ всюду в круге U. Тогда $|f'(0)| \leqslant M$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $f(z) = Me^{i\theta}z$.

1. Пусть $a \in D$ — фиксированная точка. Докажите, что величина

$$\sup\{|f'(a)| \colon f \in \mathcal{O}(D), |f(z)| \leqslant 1 \text{ в } D, f(a) = 0\}$$

достигается на функции $g_a(z)$ (а также на функциях вида $e^{i\theta}g_a(z)$ и только на них).

(*Комментарий.* В доказательстве теоремы Римана мы брали максимум модуля производной в точке a на классе всех *однолистных* голоморфных функций в области D, удовлетворяющих условию $|f(z)| \leqslant 1$. Задача утверждает, что если брать максимум на более широком классе просто всех голоморфных функций в области D, удовлетворяющих условию $|f(z)| \leqslant 1$ (без условия однолистности), то он получится тем же самым.)

2. Рассмотрим всевозможные функции $f \in \mathcal{O}(D)$ такие, что $f(a) = 0$ и $|f'(a)| = 1$. Докажите, что существует круг $\{|w| < R\}$ с центром в нуле минимального радиуса, который может вместить образ $f(D)$ области D для какой-нибудь из таких функций f. Иными словами, среди функций f рассматриваемого класса найдется такая, что $f(D) \subset \{|w| < R\}$, однако не найдется ни одной такой, что $f(D) \subset \{|w| < r\}$, где $r < R$. (Такое число R называется конформным радиусом области D с центром в точке a.) Выразите число R в терминах функции $g_a(z)$.

3. Покажите, что если R —конформный радиус области D с центром в точке a (см. предыдущую задачу), то $R \geqslant dist(a, \partial D)$.

4. Пусть функция f голоморфна и однолистна в области D, причем $|f'(a)| = 1$ для некоторой точки $a \in D$. Докажите, что площадь образа области D

$$S(f(D)) \geqslant \frac{\pi}{|g_a'(a)|^2}.$$

(*Указание:* $S(f(D)) = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dxdy$, поскольку якобиан функции $f(z)$, рассматриваемой как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, равен $|f'(z)|^2$.)

Решение задачи 1.

Рассмотрим функцию $h := f \circ g_a^{-1}$. Эта функция голоморфна в единичном круге U и удовлетворяет условиям $|h(z)| \leqslant 1$ всюду в U и $h(0) = f(g_a^{-1}(0)) = 0$. Первое из этих условий можно усилить, заменив нестрогое неравенство на строгое (в силу принципа максимума модуля: если бы в какой-то точке круга U оно обращалось бы в равенство, то в этой точке достигался бы нестрогий локальный максимум модуля, а тогда по принципу максимума модуля функция должна быть константой, а значит, нулем. Подобное рассуждение уже встречалось на лекции.) Теперь функция h удовлетворяет условию леммы Шварца. Такая функция удовлетворяет неравенству $|h'(0)| \leqslant 1$, причем равенство достигается только на поворотах: $h(z) = e^{i\theta}z$ (см. Напоминание). Однако $h'(0) = f'(g_a^{-1}(0)) \cdot (g_a^{-1})'(0) = f'(a)/g_a'(a)$. Значит, $|f'(a)/g_a'(a)| \leqslant 1$, или $|f'(a)| \leqslant |g_a'(a)|$, причем равенство достигается только в случае $f(g_a^{-1}(z)) = e^{i\theta}z$, что равносильно $f(w) = e^{i\theta}g_a(w)$. Это и требовалось доказать.

Решение задачи 2.

Задачу можно переформулировать так. Рассмотрим всевозможные функции $f \in \mathcal{O}(D)$ такие, что $f(a) = 0$ и $|f'(a)| = 1$. При каких M такая функция может удовлетворять неравенству $|f(z)| < M$ всюду в области D?

Опять, как и в решении предыдущей задачи, рассмотрим функцию $h := f \circ g_a^{-1}$. Эта функция голоморфна в единичном круге U и удовлетворяет условию $h(0) = f(g_a^{-1}(0)) = 0$. Если $|f(z)| < M$ всюду в области D, то $|h(z)| < M$ всюду в U. Такая функция удовлетворяет неравенству $|h'(0)| \leqslant M$ (см. Напоминание). Но в нашем случае $h'(0) = f'(g_a^{-1}(0)) \cdot (g_a^{-1})'(0) = f'(a)/g_a'(a)$ и поэтому $|h'(0)| = \dfrac{|f'(a)|}{|g_a'(a)|} = \dfrac{1}{|g_a'(a)|}$. Получаем неравенство $\dfrac{1}{|g_a'(a)|} \leqslant M$. При этом равенство в неравенстве $|h'(0)| \leqslant M$ достигается (только и только тогда, когда $h(z) = Me^{i\theta}z$). Значит, конформный радиус R равен $\dfrac{1}{|g_a'(a)|}$: ни при каком $M < \dfrac{1}{|g_a'(a)|}$ неравенство $|h(z)| < M$ не может выполняться всюду в U, а при $M = \dfrac{1}{|g_a'(a)|}$ может и выполняется при $h(z) = \dfrac{e^{i\theta}z}{|g_a'(a)|}$ (и тогда $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}g_a(z)}{|g_a'(a)|}$).

Решение задачи 3.

Обозначим $r := dist(a, \partial D)$. Тогда круг $U_r(a) := \{|z-a| < r\}$ лежит в области D. Пусть функция f голоморфна в области D (а значит, и в круге $U_r(a)$) и удовлетворяет условию $f(a) = 0$ и неравенству $|f(z)| < R$ в области D (а значит, и в круге $U_r(a)$). Тогда функция $f_1(z) := f(rz + a)$ удовлетворяет условиям $f_1(0) = 0$ и $|f_1(z)| < R$ всюду в U. Тогда (см. Напоминание) $|f_1'(0)| \leqslant R$, то есть $r|f'(a)| \leqslant R$. Поскольку $|f'(a)| = 1$, то $r \leqslant R$.

Решение задачи 4.

Рассмотрим функцию $h := f \circ g_a^{-1}$. Функция h голоморфна и однолистна в единичном круге U, причем $|h'(0)| = |f'(g_a^{-1}(0)) \cdot (g_a^{-1})'(0)| = |f'(a)|/|g_a'(a)| = 1/|g_a'(a)|$. Нам достаточно доказать, что площадь образа единичного круга при конформном отображении h с условием $|h'(0)| = 1/|g_a'(a)|$ не может быть меньше $\dfrac{\pi}{|g_a'(a)|^2}$. Для удобства рассмотрим отображение $h_1(z) := |g_a'(a)| \cdot h(z)$ с условием $|h_1'(0)| = 1$ и покажем, что площадь образа $h_1(U)$ не может быть меньше π.

Разложим производную $h_1'(z)$ в ряд Тейлора с центром в нуле:

$$h_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Тогда

$$S(h(U)) = \iint\limits_U |h_1'(z)|^2 dxdy = \iint\limits_U h_1'(z)\overline{h_1'(z)} dxdy =$$
$$\iint\limits_U \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \bar{c}_l \bar{z}^l\right) dxdy = \iint\limits_U \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} c_k \bar{c}_l z^k \bar{z}^l\right) dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, несложно проверить, что $\iint\limits_U z^k \bar{z}^l dxdy = 0$, если $k \neq l$. Поэтому

$$S(h(U)) = \iint\limits_U \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 |z|^{2k}\right) dxdy \geqslant \iint\limits_U |c_0|^2 dxdy =$$
$$\iint\limits_U |h_1'(0)|^2 dxdy = \iint\limits_U 1 dxdy = \pi,$$

что и требовалось.