Семинар по комплексному анализу 15 апреля 2020 г.

Аналитические функции в области

Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Предположим, что F_0 — канонический элемент с центром в некоторой точке $z_0 \in D$, причем такой, что F_0 *можно продолжить по любому пути в* D*, выходящему из точки* z_0.

Тогда множество всех (канонических) элементов, которые можно получить из F_0 продолжением по всем таким путям, называется аналитической функцией в области D.

Независимость от начального элемента

Замечание. Пусть канонический элемент F_0 порождает аналитическую функцию в области D в смысле данного выше определения. Пусть элемент F_1 — результат продолжения F_0 по какому-нибудь пути γ, лежащему в D и ведущему из точки z_0 в точку z_1.

Тогда элемент F_1 продолжается по всем путям, выходящим из точки z_1 и лежащим в D, а порожденная им аналитическая функция в D совпадает с аналитической функцией в D, порожденной F_0 (как множество элементов). Действительно, продолжение элемента F_1 по пути $\tilde{\gamma}$, выходящему из точки z_1, — это то же самое, что продолжение элемента F_0 по пути $\gamma \cup \tilde{\gamma}$.

Иными словами, не имеет значения, какой элемент из множества, являющегося аналитической функцией в D, выбирать в качестве начального.

Еще одно определение аналитической функции в области D

Можно дать определение аналитической функции в области D, не выделяя какой-либо начальный элемент. А именно, аналитическая функция в области D — это (непустой) набор (множество, семейство) $\mathcal{F}$ канонических элементов с центрами только в точках D со следующими свойствами:

- любой элемент $F \in \mathcal{F}$ можно продолжить по любому пути из его центра, лежащему в D;
- любой элемент $F_1 \in \mathcal{F}$ можно получить из любого другого элемента $F_2 \in \mathcal{F}$ продолжением по какому-нибудь пути, лежащему в $\mathcal{F}$ (и идущему из центра элемента F_2 в центр элемента F_1).

Множества элементов аналитической функции в разных точках области

Из любого из определений видно, что если $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D, то для любой точки $z \in D$ существует хотя бы один элемент $\mathcal{F}$ с центром в точке z_0.
Можно показать, что мощность множества элементов $\mathcal{F}$ в любых двух точках $z_0, z_1 \in D$ одна и та же. Пусть $\mathcal{F}_{z_0}$ и $\mathcal{F}_{z_1}$ — множества элементов аналитической функции $\mathcal{F}$ в точках z_0 и z_1 соответственно. Между этими множествами можно установить биекцию. Зафиксируем какой-нибудь путь γ из z_0 в z_1, лежащий в D, и построим отображение $\Gamma : \mathcal{F}_{z_0} \to \mathcal{F}_{z_1}$, которое переводит любой элемент $F_0 \in \mathcal{F}_{z_0}$ в результат продолжения F_0 по пути γ.
Отображение Γ обратимо (с обеих сторон), потому что Γ^{-1} — это просто продолжение по пути γ^{-1}. Поэтому Γ и сюръективно, и инъективно, то есть взаимно однозначно.

Теорема Пуанкаре–Вольтерра

Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Множество элементов аналитической функции в данной точке не более чем счетно.

Идея доказательства. Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D и $z_0 \in D$. Зафиксируем элемент $F_0 \in \mathcal{F}$ с центром z_0. Пусть $z_1 \in D$ — любая другая точка области D.
Для любого пути γ из z_0 в z_1, лежащего в D, существует путь $\tilde{\gamma}$, который гомотопен γ *в области* D (то есть все пути семейства гомотопии тоже лежат в D) и представляет собой ломаную, все концы звеньев которой, кроме z_0 и z_1, попадают в точки с рациональными вещественной и мнимой частью. По теореме о продолжении по гомотопным путям результаты продолжения элемента F_0 по путям γ и $\tilde{\gamma}$ совпадают. Поэтому различных элементов $\mathcal{F}$ в точке z_1 не больше, чем таких ломаных с «рациональными» концами звеньев, лежащих в D и соединяющих z_0 с z_1. А количество таких ломаных, как несложно понять, счетно.

Число листов аналитической функции в области

Из приведенного выше соображения об равномощности множества элементов аналитической функции с центрами в разных точках области и теоремы Пуанкаре–Вольтерра следует, что число элементов в точке области либо везде бесконечно (и множество элементов счетно), либо конечно и везде одно и то же. Это число называют *числом листов* аналитической функции в области. Говорят об однозначной, двузначной, трехзначной, бесконечнозначной или же двулистной. трехлистной, бесконечнолистной. (Слово «однолистный», как мы помним, используется в другом смысле. Слова «двузначная», «трехзначная» и т.п. функция не совсем точны,как мы увидим дальше на примере.)

Понятие аналитической функции в области и является основным в подходе Вейерштрасса к многозначным функциям (которые до сих пор мы рассматривали только как отображения, которые сопоставляют точке $z \in \mathbb{C}$ не одно, а несколько комплексных значений, как, например, $\sqrt{z}$ и $\mathrm{Ln}\, z$). Дальше мы увидим, как это работает.

Пример: голоморфные функции

Вспомним пример, который мы рассматривали на прошлом занятии.
Пусть f — голоморфная функция в области D, а путь $\gamma : [0; 1] \to D$. Начальный элемент F_0 задается суммой ряда Тейлора функции f в точке $\gamma(0)$. (Радиус его круга не меньше, чем $dist(\gamma(0), \partial D)$.) Продолжение строится так же: круг U_t — круг сходимости ряда Тейлора функции f с центром в точке $\gamma(t)$, а f_t — сумма этого ряда. Радиус круга U_t не меньше $dist(\gamma(t), \partial D)$, и в круге радиуса $dist(\gamma(t), \partial D)$ функция f_t совпадает с f. Мы видим, что результат продолжения зависит только от конечной точки $\gamma(1)$ и не зависит от выбора пути γ.

Тем самым мы получили однозначную аналитическую функцию в D: в каждой точке $z_0 \in D$ имеется ровно один элемент, а именно, сумма ряда Тейлора функции f в точке z_0. Итак, голоморфные функции в области — частный случай аналитических.

Однозначные аналитические функции — это просто голоморфные функции

Верно и обратное. Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D с числом листов 1. Определим обычную функцию f в D: ее значение в точке $z_0 \in D$ есть значение функции единственного элемента F_{z_0} аналитической функции $\mathcal{F}$ с центром в точке z_0.

Несложно увидеть, что функция f будет голоморфна в каждой точке области D. Действительно, пусть $F_{z_0} = (U_0, f_0)$. Если точка z лежит в круге U_0, то элемент F_z функции $\mathcal{F}$ в точке z можно получить через сумму ряда Тейлора функции f_0, а значение его функции в точке z есть просто $f_0(z)$.

Теперь видно, что аналитическая функция, соответствующая функции f в смысле конструкции приведенного выше примера, совпадает с $\mathcal{F}$.

Итак, однозначные аналитические функции в области — это то же самое, что голоморфные функции в этой области.

Теорема о монодромии

Теорема. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$. Пусть задан канонический элемент F_0 в некоторой точке $a \in D$. Предположим, что элемент F_0 *продолжается по всем путям в области D, выходящим из точки a*.
Тогда результат этого продолжения зависит только от конечной точки пути (а не от выбора самого пути).

Очевидное следствие этой теоремы: *любая аналитическая функция в односвязной области есть просто голоморфная функция*.

Основные многозначные функции: $\mathrm{Ln}\, z$ и $\sqrt[n]{z}$

Далее мы увидим, как рассматривать, пользуясь подходом аналитических функций в области, знакомые нам из первого семестра мнонозначные функции — логарифм и корень степени n. Практически все многозначные функции, которые встретятся нам дальше, будут получаться из этих основных функций с помощью ряда операций.

Логарифм как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Вспомним пример продолжения начального элемента логарифма, рассмотренный на прошлом занятии.
Определим функцию $\ln_0$ в круге $U_0 := \{|z-1| < 1\}$ формулой $\ln_0 z := \ln z$, $-\pi < \arg z < \pi$. Как известно, эта ветвь логарифма разлагается в следующий ряд Тейлора:

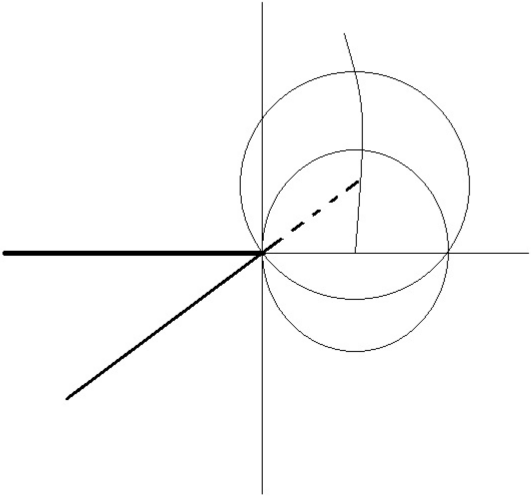
$$\ln_0 z = \ln_0(1 + (z-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}.$$

Тем самым $F_0 := (U_0, \ln_0)$ — канонический элемент.
Мы показывали, что элемент F_0 продолжается по любому пути, не проходящему через нуль, и не продолжается по любому пути, проходящему через нуль.
Если путь $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ начинается в точке 1 и не проходит через нуль, то существует непрерывная ветвь функции $\mathrm{Arg}\gamma(t)$, равная нулю в точке $t = 0$:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}, \quad \theta \in C[0;1], \quad \theta(0) = 0.$$

Продолжение элемента логарифма из точки $z = 1$

Определим элемент F_t, $t \in [0;1]$, следующим образом:
$F_t = (U_t, f_t)$, где $U_t := \{|z - \gamma(t)| < |\gamma(t)|\}$, а
$f_t(z) := \ln z, -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t)$.



Логарифм как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (продолжение)

Как уже говорилось на прошлом занятии, приведенная на предыдущем слайде формула действительно задает продолжение элемента F_0 по пути γ.
Тем самым множество всех продолжений элемента F_0 по всем путям, выходящим из 1 и не проходящим через нуль, представляет собой аналитическую функцию $\mathrm{Ln}\, z$ в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Как она соотносится со знакомой нам из первого семестра многозначной функцией?

1. Как уже говорилось на прошлом занятии, функция любого элемента построенной аналитической функции есть ветвь логарифма, то есть удовлетворяет условию $e^{f(z)} \equiv z$. (Это следует из того, что это свойство сохраняется при непосредственном аналитическом продолжении, а значит, и при продолжении по цепочке.)

Логарифм как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (продолжение)

2. Сколько различных элементов имеет аналитическая функция $\operatorname{Ln} z$ в каждой ненулевой точке?
Рассмотрим точку 1. Пусть γ_0 — это путь, выходящий из единицы и возвращающийся в нее, вдоль единичной окружности: $\gamma_0 : [0; 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_0(t) = e^{2\pi it}$.
Из конструкции продолжения видно, что продолжение F_0 по пути γ_0 дает элемент $(U_0, f_0 + 2\pi i)$. Более того, продолжение по пути γ_0^n (то есть n обходов окружности против часовой стрелки, $n \in N$) даст элемент $(U_0, f_0 + 2\pi in)$, а продолжение по пути γ_0^{-n}, то есть n обходов окружности по часовой стрелке, даст элемент $(U_0, f_0 - 2\pi in)$.
В частности, это значит, что количество элементов аналитической функции $\operatorname{Ln} z$ в любой точке $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ счетно (число листов бесконечно).

Логарифм как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (продолжение)

3. Пусть f — какая-нибудь голоморфная ветвь логарифма в окрестности U единицы. Поскольку функция $f - f_0$ принимает дискретные значения (целые кратные $2\pi i$) и голоморфна в U, то $f \equiv f_0 + 2\pi n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Значит, всюду в U ветвь f совпадает с функцией некоторого элемента построенной нами аналитической функции $\mathrm{Ln}\, z$ (одного из перечисленных выше элементов вида $(U_0, f_0 + 2\pi in)$).
А еще из этого видно, в частности, что никаких других элементов функции $\mathrm{Ln}\, z$ в точке 1, кроме элементов вида $(U_0, f_0 + 2\pi in)$, нет (ведь функция каждого элемента $\mathrm{Ln}\, z$ дает ветвь логарифма).
В частности, любое значение логарифма в точке 1 можно получить как значение одного и только одного элемента функции $\mathrm{Ln}\, z$ в этой точке.

Логарифм как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (продолжение)

4. Те же свойства, что утверждались на предыдущем слайде для точки 1, верны и для любой другой ненулевой точки z_0. Пусть f — какая-нибудь голоморфная ветвь логарифма в окрестности $U(z_0)$ точки z_0. Пусть γ — фиксированный путь из точки 1 в точку z_0, не проходящий через нуль. Продолжение исходного элемента F_0 по пути γ даст некоторый элемент (U_{z_0}, f_{z_0}). При этом f_{z_0} — ветвь логарифма в U_{z_0}. Значит, $f - f_{z_0} \equiv 2\pi i n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.
Тогда продолжение элемента F_0 по пути $\gamma_0^n \cup \gamma$ даст новый элемент аналитической функции $\mathrm{Ln}\, z$ в точке z_0, функция которого совпадет с f всюду в $U(z_0)$.
Вывод: все элементы функции $\mathrm{Ln}\, z$ в точке z_0 — это в точности все голоморфные ветви логарифма в круге $\{|z - z_0| < |z_0|\}$. Их счетное число, все они отличаютсся друг от друга на константы, кратные $2\pi i n$. В частности, любое значение логарифма z_0 есть значение одного и только одного из этих элементов.

Корень степени n как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Аналогично логарифму можно построить аналитическую функцию $\sqrt[n]{z}$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Приведем формулы:
Определим функцию f_0 в круге $U_0 := \{|z-1| < 1\}$ формулой $f_0(z) := \sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} e^{i\frac{1}{n}\arg z}$, $-\pi < \arg z < \pi$. Эта ветвь корня разлагается в следующий ряд Тейлора:

$$f_0(z) = (1 + (z-1))^{1/n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\dots(\frac{1}{n}-k+1)}{k!}(z-1)^k.$$

$F_0 := (U_0, f_0)$ — канонический элемент.
Элемент F_0 продолжается по любому пути, не проходящему через нуль, и не продолжается по любому пути, проходящему через нуль.
Если путь $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ начинается в точке 1 и не проходит через нуль, то существует непрерывная ветвь функции $\mathrm{Arg}\gamma(t)$, равная нулю в точке $t = 0$:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)}, \quad \theta \in C[0;1], \quad \theta(0) = 0.$$

Корень степени n как аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (продолжение)

Определим элемент F_t, $t \in [0; 1]$, следующим образом:
$F_t = (U_t, f_t)$, где $U_t := \{|z - \gamma(t)| < |\gamma(t)|\}$, а
$f_t(z) := \sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} e^{i \frac{1}{n} \arg z}, -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t)$.

Однако, зная, как устроена аналитическая функция $\operatorname{Ln} z$, теперь можно описать все свойства корня из одной формулы:

$$\sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z\right).$$

Действия над аналитическими функциями

1. сумма;
2. произведение;
3. дифференцирование;
4. композиция;
5. ограничение на подобласть.

Сумма аналитических функций

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — аналитические функции в области D.

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} := \{canon(F_{z_0} + G_{z_0}),\ F_{z_0} \in \mathcal{F}_{z_0}, G_{z_0} \in \mathcal{G}_{z_0}, z_0 \in D\}.$$

Примеры (в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$):
$\sqrt{z} + \sqrt{z} = 2\sqrt{z}; 0$
$\mathrm{Ln}\, z - \mathrm{Ln}\, z = 2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z = 2\,\mathrm{Ln}\, z; 2\,\mathrm{Ln}\, z + 2\pi i$
$\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$
$\mathcal{F} + \varphi$, $\varphi \in \mathcal{O}(D)$

Произведение аналитических функций

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — аналитические функции в области D.

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} := \{canon(F_{z_0} G_{z_0}),\ F_{z_0} \in \mathcal{F}_{z_0}, G_{z_0} \in \mathcal{G}_{z_0}, z_0 \in D\}.$$

Примеры (в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$):
$\sqrt{z}\sqrt{z} = z; -z$
$\sqrt{z}\sqrt[3]{z}$
$\mathcal{F}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{O}(D)$

Производная аналитической функции

$\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D.

$$\mathcal{F}' := \{F'_{z_0} \ : \ F_{z_0} \in \mathcal{F}_{z_0}, z_0 \in D\}.$$

Производная аналитической функции в D — *одна* аналитическая функция в D.
Число листов $\mathcal{F}'$ не больше числа листов $\mathcal{F}$, но может быть и меньше.
Пример: $(\mathrm{Ln}\, z)' = \dfrac{1}{z}$.

Композиция аналитических функций

$\mathcal{F}$ — аналитическая функции в области D, причем *все значения всех элементов F в точках области D лежат в области D_1*.
$\mathcal{G}$ — аналитическая функции в области D_1.

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) := \{canon(G_{f_{z_0}(z_0)}(F_{z_0}),\ F_{z_0} = (U_{z_0}, f_{z_0}) \in \mathcal{F}_{z_0}, G_a \in \mathcal{G}_a; z_0 \in D\}.$$

Примеры:
$(\sqrt{z})^2 = z$
$\sqrt[3]{\sqrt{z}} = \sqrt[6]{z}$
$\varphi(\mathcal{F})$, $\varphi \in \mathcal{O}(D_1)$ — одна аналитическая функция
Пример: $z^z := e^{z\,\mathrm{Ln}\,z}$

Ограничение на подобласть

$\mathcal{F}$ — аналитическая функции в области D; $\tilde{D} \subset D$.

$$\mathcal{F}|_{\tilde{D}} := \{F_{z_0} : \ F_{z_0} \in \mathcal{F}_{z_0}, z_0 \in \tilde{D}\}.$$

Например, если $\tilde{D}$ односвязна, получаем набор голоморфных функций в $\tilde{D}$.
Голоморфные ветви многозначной аналитической функции.