Семинар по комплексному анализу 13 мая 2020 г.

Указания к задачам домашнего задания

Задача 24.01 1)

Опишите особую точку 0 для функции $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

Задача 24.01 1) Опишите особую точку 0 для функции $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

Ответ: Точка ветвления второго порядка.

Указание. При обходе окружности с центром в нуле $\arg\sqrt{z}$ увеличивается на π, $\arg\dfrac{1}{\sqrt{z}}$ уменьшается на π.

Задача 24.01 3)

Опишите особую точку 0 для функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z+1}{z}$.

Задача 24.01 3) Опишите особую точку 0 для функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z+1}{z}$.

Ответ: Логарифмическая точка ветвления.

Указание. В точке $z = 0$ функция $\dfrac{z+1}{z} = 1 + \dfrac{1}{z}$ имеет полюс первого порядка.

Задача 24.01 б)

Опишите особую точку 0 для функции $\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$.

Задача 24.01 б) Опишите особую точку 0 для функции $\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$.

Ответ: Логарифмическая точка ветвления.

Указание. В точке $z = 0$ функция $\operatorname{Ln} z$ имеет логарифмическую точку ветвления. Если φ_k, $k \in \mathbb{Z}$ — элементы функции $\operatorname{Ln} z$ в точке, близкой к нулю (например, в точке $\varepsilon > 0$), причем $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi ik$, то при продолжении вдоль окружности с центром в нуле $\varphi_k \mapsto \varphi_{k+1}$, причем все значения элементов φ_k и их продолжений в своих центрах не обращаются в нуль.

Поэтому $\dfrac{1}{\varphi_k} \mapsto \dfrac{1}{\varphi_{k+1}}$.

Задача 24.01 7)
Опишите особую точку 0 для функции $z^{\sqrt{2}}$.

Задача 24.01 7) Опишите особую точку 0 для функции $z^{\sqrt{2}}$.

Ответ: Логарифмическая точка ветвления.

Указание. $z^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\, z}$. В точке $z = 0$ функция $\mathrm{Ln}\, z$ имеет логарифмическую точку ветвления. Если φ_k, $k \in \mathbb{Z}$ — элементы функции $\mathrm{Ln}\, z$ в точке, близкой к нулю (например, в точке $\varepsilon > 0$), причем $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi ik$, то при продолжении вдоль окружности с центром в нуле $\varphi_k \mapsto \varphi_{k+1}$. Тогда $e^{\sqrt{2}\varphi_k} \mapsto e^{\sqrt{2}\varphi_{k+1}}$, причем все элементы $e^{\sqrt{2}\varphi_k}$, $k \in \mathbb{Z}$, различны: например, у них различные значения в точке ε, поскольку

$$\varphi_k(\varepsilon) = e^{\sqrt{2}(\ln \varepsilon + 2\pi ik)} = e^{\sqrt{2}\ln \varepsilon} \cdot e^{2\sqrt{2}\pi ik}.$$

Задача 24.01 8)
Опишите особую точку 0 для функции $\sqrt[n]{\operatorname{Ln} z}$.

Задача 24.01 8) Опишите особую точку 0 для функции $\sqrt[n]{\operatorname{Ln} z}$.

Ответ: n логарифмических точек ветвления.

Указание. Можно рассуждать так же, как в случае $\sqrt{\operatorname{Ln} z}$, разобранном на прошлом занятии. В точке $z = 0$ функция $\operatorname{Ln} z$ имеет логарифмическую точку ветвления. Если φ_k, $k \in \mathbb{Z}$ — элементы функции $\operatorname{Ln} z$ в точке, близкой к нулю (например, в точке $\varepsilon > 0$), причем $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi i k$, то при продолжении вдоль окружности с центром в нуле $\varphi_k \mapsto \varphi_{k+1}$. Все значения элементов φ_k и их продолжений лежат в левой полуплоскости. Если $\Psi_j(w)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ — различные ветви функции $\sqrt[n]{w}$ в левой полуплоскости $\{\operatorname{Re} w < 0\}$, то $\Psi_j(\operatorname{Ln} z)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ — различные аналитические функции в проколотой окрестности нуля, каждая из которых имеет логарифмическую точку ветвления (поскольку $\Psi_j(\varphi_k) \mapsto \Psi_j(\varphi_{k+1})$ при всех $j = 0, 1, \ldots, n-1$ и всех $k \in \mathbb{Z}$).

Задача 24.02 1)
Опишите особую точку ∞ для функции $\sqrt{z(z^2-1)}$.

Задача 24.02 1) Опишите особую точку ∞ для функции $\sqrt{z(z^2-1)}$.

Ответ: Точка ветвления второго порядка.

Указание. Функция $z(z^2-1)$ имеет в точке ∞ полюс порядка 3.

Задача 24.02 2)
Опишите особую точку ∞ для функции $\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

Задача 24.02 2) Опишите особую точку ∞ для функции $\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

Ответ: Две логарифмические точки ветвления.

Указание. Можно записать $\sqrt{z^2-1} = z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$. Функция $1-\frac{1}{z^2}$ голоморфна в окрестности бесконечности и равна 1 в точке ∞. Поэтому $\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$ в окрестности бесконечности распадается на две голоморфных ветви, одна которых равна 1 в точке ∞, а другая -1. Далее,

$$z+\sqrt{z^2-1} = z \pm z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}.$$

При знаке "+" получаем полюс первого порядка в бесконечности:

$$z+z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}} \sim 2z.$$

Тогда логарифм дает логарифмическую точку ветвления.

Задача 24.02 2) (продолжение).

При знаке "$-$" получаем нуль первого порядка в бесконечности:

$$z - z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} = z - z\left(1 - \frac{1}{2z^2} + O(z^{-4})\right) = \frac{1}{2z} + O(z^{-3}).$$

Тогда логарифм дает еще одну логарифмическую точку ветвления.

Задача 24.02 5)

Опишите особую точку ∞ для функции $\sqrt{\mathrm{Ln}\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$, $\sqrt{z^2-1}>0$ при $z>1$.

Задача 24.02 5) Опишите особую точку ∞ для функции $\sqrt{\operatorname{Ln}\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$, $\sqrt{z^2-1}>0$ при $z>1$.

Ответ: Счетное число устранимых особых точек.

Указание. Запишем $\sqrt{z^2-1}=z\sqrt{1-\dfrac{1}{z^2}}$. Функция $1-\dfrac{1}{z^2}$ голоморфна в окрестности бесконечности и равна 1 в точке ∞. Поэтому $\sqrt{1-\dfrac{1}{z^2}}$ в окрестности бесконечности распадается на две голоморфных ветви, одна которых равна 1 в точке ∞, а другая -1. По условию нам нужно выбрать первую ветвь. Тогда

$$\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}=\frac{z+z\sqrt{1-\dfrac{1}{z^2}}}{2z}=\frac{z+z(1+O(z^{-1}))}{2z}=1+O(z^{-1}).$$

Тогда логарифм $\operatorname{Ln}\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$ распадается на счетное число голоморфных ветвей со значениями $\operatorname{Ln}1=2\pi ik$, $k\in\mathbb{Z}$, в бесконечности.

Задача 24.02 5) (продолжение).

При $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ корень превращает каждую такую ветвь в две голоморфные ветви. Однако при $k = 0$ голоморфная ветвь $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$ равна нулю, и нам нужно узнать порядок этого нуля. Для этого разложим функцию под логарифмом точнее:

$$\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z} = \frac{z+z\sqrt{1-\dfrac{1}{z^2}}}{2z} = \frac{z+z\left(1-\dfrac{1}{2z^2}+O(z^{-4})\right)}{2z} =$$

$= 1 - \dfrac{4}{z^2} + O(z^{-4})$. Значит, порядок нуля второй:

$$\ln\left(1-\frac{4}{z^2}+O(z^{-4})\right) = -4z^{-2} + O(z^{-4})$$

и корень $\sqrt{\mathrm{Ln}\,\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$ дает еще две устранимых особых точки.

Задача 24.02 б)

Опишите особую точку ∞ для функции $\sqrt[3]{\mathrm{Ln}\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$, $\sqrt{z^2-1} < 0$ при $z > 1$.

Задача 24.02 б) Опишите особую точку ∞ для функции $\sqrt[3]{\mathrm{Ln}\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$, $\sqrt{z^2-1}<0$ при $z>1$.

Ответ: Шесть логарифмических точек ветвления.

Указание. Запишем $\sqrt{z^2-1}=z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$. Функция $1-\frac{1}{z^2}$ голоморфна в окрестности бесконечности и равна 1 в точке ∞. Поэтому $\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$ в окрестности бесконечности распадается на две голоморфных ветви, одна которых равна 1 в точке ∞, а другая -1. По условию нам нужно выбрать вторую ветвь. Тогда

$$\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}=\frac{z-z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}{2z}=\frac{z-z\left(1-\frac{1}{2z^2}+O(z^{-4})\right)}{2z}=$$

$$=\frac{1}{4z^2}+O(z^{-4}).$$

Значит, функция $\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$ имеет нуль второго порядка в бесконечности.

Задача 24.02 б) (продолжение).

Поскольку функция $\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$ имеет нуль второго порядка в бесконечности, то функция $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$ дает две логарифмические точки ветвления, а кубический корень превращает каждую из них в три.

Задача 24.06 1)
Опишите все точки ветвления аналитической функции
$\sqrt[3]{z(1-z)^2}$.

Задача 24.06 1) Опишите все точки ветвления аналитической функции $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$.

Особые точки: 0, 1, ∞.

Точка 0 — нуль первого порядка для $z(1-z)^2$, получаем точку ветвления третьего порядка.

Точка 1 — нуль второго порядка для $z(1-z)^2$, получаем точку ветвления третьего порядка.

В точке ∞: $\sqrt[3]{z(z^2-1)} = z\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{z^2}}$. Функция $1-\dfrac{1}{z^2}$ голоморфна в окрестности бесконечности и равна 1 в точке ∞. Поэтому $\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{z^2}}$ в окрестности бесконечности распадается на три голоморфных ветви, каждая из которых не равна нулю в точке ∞. Каждая из них дает полюс первого порядка для функции $z\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{z^2}}$.

Задача 24.06 2)
Опишите все точки ветвления аналитической функции $\mathrm{Arctg}\, z$.

Задача 24.06 2) Опишите все точки ветвления аналитической функции $\operatorname{Arctg} z$.

Можно проверить, что $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{1+iz}{1-iz} = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{i-z}{i+z}$.

Особые точки: i, $-i$, ∞.

Точка i — нуль первого порядка для $\dfrac{i-z}{i+z}$, получаем логарифмическую точку ветвления.

Точка $-i$ — полюс первого порядка для $\dfrac{i-z}{i+z}$, получаем логарифмическую точку ветвления.

В точке ∞ функция $\dfrac{i-z}{i+z}$ имеет предел, равный -1, и поэтому логарифм $\operatorname{Ln} \dfrac{i-z}{i+z}$ распадается на счетное число голоморфных ветвей. Получаем счетное число устранимых особых точек.

Задача 24.06 3)
Опишите все точки ветвления аналитической функции $\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$.

Задача 24.06 3) Опишите все точки ветвления аналитической функции $\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$.

Особые точки: i, $-i$, ∞ (поскольку $z+\sqrt{z^2+1}\neq 0$).

Точка i — нуль первого порядка для z^2+1, точка ветвления второго порядка для $z+\sqrt{z^2+1}$. Если z обходит окружность малого радиуса с центром i, то $z+\sqrt{z^2+1}$ меняется в окрестности точки i. Функция $\mathrm{Ln}\, w$ в окрестности точки $w=i$ распадается на счетное число голоморфных ветвей $\Psi_k(w)$, $k\in\mathbb{Z}$. Каждая из функций $\Psi_k(z+\sqrt{z^2+1})$ имеет точку ветвления второго порядка в точке $z=i$.

Точка $-i$ — также нуль первого порядка для z^2+1, точка ветвления второго порядка для $z+\sqrt{z^2+1}$. Если z обходит окружность малого радиуса с центром $-i$, то $z+\sqrt{z^2+1}$ меняется в окрестности точки $-i$. Поэтому в точке $-i$ тоже счетное множество точек ветвления второго порядка.

В точке ∞ поступим аналогично задаче 24.02 2).

Задача 24.06 3) (продолжение).
$\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$, точка $z=\infty$.

$$z+\sqrt{z^2+1}=z\pm z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}=z\pm z\left(1+\frac{1}{2z^2}+O(z^{-4})\right).$$

При выборе знака "$+$" получаем полюс первого порядка, а значит, логарифмическую точку ветвления для $\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$.

При выборе знака "$-$" получаем нуль первого порядка, а значит, еще одну логарифмическую точку ветвления для $\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$.