Семинар по комплексному анализу 8 апреля 2020 г.

Указания к задачам домашнего задания

Задача 34.06

Пусть функция f голоморфна в прямоугольнике

$$\{0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad |\operatorname{Im} z| < h\},$$

непрерывна в замыкании этого прямоугольника и удовлетворяет условиям:

- $\operatorname{Im} f(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z = 0$, $|\operatorname{Im} z| < h$;
- $\operatorname{Im} f(z) = 1$ при $\operatorname{Re} z = 1$, $|\operatorname{Im} z| < h$.

Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить на полосу $\{|\operatorname{Im} z| < h\}$ и что функция F, осуществляющая это продолжение, имеет вид $iz + F_1(z)$, где функция $F_1(z)$ периодична с периодом 2: $F_1(z+2) = F_1(z)$.

К задаче 34.06

Применяя принцип симметрии в первой формулировке, мы можем продолжить функцию f голоморфно в прямоугольник $\{0 < \mathrm{Re}\, z < 2, \quad |\mathrm{Im}\, z| < h\}$ и непрерывно на его правую сторону. При этом $f(it+2) = f(it) + 2i$ при всех $t \in (-h; h)$ из формулы для симметрии (мы отражаем точки вещественной прямой относительно прямой $\{\mathrm{Im}\, z = 1\}$). В частности, все значения продолжения F функции f на правой стороне лежат на прямой $\{\mathrm{Im}\, z = 2\}$. Применяя принцип симметрии к прямоугольнику $\{1 < \mathrm{Re}\, z < 2, \quad |\mathrm{Im}\, z| < h\}$, продолжаем F в следующий прямоугольник и т.д. Аналогично можно продолжать F в прямоугольники, находящиеся слева от исходного. В результате получим $F \in \mathcal{O}(\{|\mathrm{Im}\, z| < h\})$. Поскольку $f(it+2) = f(it) + 2i$ при всех $t \in (-h; h)$, то по теореме единственности $F(z+2) = F(z) + 2i$ при всех $z \in \{|\mathrm{Im}\, z| < h\}$. Значит, если $G(z) := F(z) - iz$, то $G(z+2) = F(z+2) - i(z+2) = F(z) + 2i - iz - 2i = F(z) - iz = G(z)$, то есть $G(z)$ периодична с периодом 2.

Задача 34.11

Пусть функция f голоморфна в кольцевом секторе

$$\{r < |z| < R, \quad 0 < \arg z < \pi/n\} \text{ (}n\text{ — натуральное число),}$$

непрерывна в его замыкании и удовлетворяет условиям:

- $\mathrm{Re}\, f(z) = 0$ при $r < |z| < R$, $\arg z = 0$;
- $\mathrm{Re}(e^{-\pi i/n} f(z)) = 0$ при $r < |z| < R$, $\arg z = \pi/n$.

Докажите, что функцию f можно аналитически продолжить до голоморфной функции в кольце $\{r < |z| < R\}$.

К задаче 34.11

По принципу симметрии можно последовательно продолжать функцию f в сектора

$$\left\{r < |z| < R, \quad \frac{k\pi}{n} < \arg z < \frac{(k+1)\pi}{n}\right\}, \ k = 1, 2, \dots, 2n-1,$$

при этом значения продолжения F на верхней стороне такого сектора будут лежать на прямой $\{\mathrm{Re}(e^{-(k+1)\pi i/n}z) = 0\}$ и, более того,

$$F(\rho e^{(k+1)\pi i/n}) = e^{2\pi i/n} F(\rho e^{(k-1)\pi i/n}), \quad r < \rho < R.$$

(отражаем точки на прямой $\{\mathrm{Re}(e^{-(k-1)\pi i/n}z) = 0\}$ относительно прямой $\{\mathrm{Re}(e^{-k\pi i/n}z) = 0\}$).
Следовательно, для предельных значений изнутри последнего сектора $\left\{r < |z| < R, \quad \frac{(2n-1)\pi}{n} < \arg z < 2\pi\right\}$ получим $F(\rho - i0) = f(\rho)$, $r < \rho < R$, а значит, продолжение непрерывно «склеится» с исходной функцией f на интервале $(r; R)$.

Задача 34.21

Докажите, что любое конформное отображение круга на круг является дробно-линейным.

К задаче 34.21

Конечно, можно использовать знание, что любой автоморфим единичного круга дробно-линеен.
Но можно обойтись и без него. Если функция f конформно отображает круг U_1 на круг U_2, то по теореме Каратеодори f продолжается на границу ∂U_1 и дает гомеоморфизм ∂U_1 на ∂U_2. Тогда моэно применить принцип симметрии во второй формулировке и получить конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$:

$$U \cup \partial U \cup U^* = \overline{\mathbb{C}} \text{ для любого круга } U.$$

А всякий конформный автоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, как мы знаем, дробно-линейный.

Задача (не из задачника Евграфова, №3, обобщающая задачу 34.22)

а) Какие кольца вида $\{\alpha < |z| < \beta\}$ конформно эквивалентны данному кольцу $\{r < |z| < R\}$?

б) Опишите все конформные автоморфизмы кольца $\left\{\frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$.

К задаче №3 а)

В задаче 34.22 мы установили, что кольца $\{1 < |z| < R_1\}$ и $\{1 < |z| < R_2\}$ конформно эквивалентны, если и только если $R_1 = R_2$. Так как любое кольцо $\{\alpha < |z| < \beta\}$ отображением $z \mapsto z/\alpha$ конформно отображается в кольцо $\{1 < |z| < \beta/\alpha\}$, то кольцо вида $\{\alpha < |z| < \beta\}$ конформно эквивалентно данному кольцу $\{r < |z| < R\}$ тогда и только тогда, когда $\beta/\alpha = R/r$ (то есть если эти кольца гомотетичны).

К задаче №3 б)

При решении задачи 34.22 мы установили, что любой конформный автоморфизм кольца $\{1 < |z| < R\}$, переводящий (по теореме Каратеодори) внешнюю границу снова во внешнюю (а внутреннюю во внутреннюю), есть поворот $z \mapsto e^{i\theta} z$. Обозначим $K := \left\{ \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}$. Если $f : K \to K$ конформно, то:

либо f переводит внешнюю границу K в себя, тогда функция $g(z) := 2f(z/2)$ — автоморфизм кольца $2K = \{1 < |z| < 4\}$, сохраняющий его внешнюю границу, и потому $g(z) = e^{i\theta} z$ и тогда $f(z) = e^{i\theta} z$;

либо же f переводит внешнюю границу K во внутреннюю и наоборот, но тогда функция $h(z) = 1/f(z)$ — тоже автоморфизм K, но сохраняющий внешнюю границу. Значит, по предыдущему рассуждению $h(z) = e^{i\theta} z$ и $f(z) = e^{-i\theta}/z$.

Итак, $Aut(K) = \{e^{i\theta} z, e^{i\theta}/z \text{ при всех } \theta \in [0; 2\pi)\}$.

Задача (не из задачника Евграфова, №4)

Пусть функция f конформно отображает прямоугольник Π_1 на другой прямоугольник Π_2, причем каждая из вершин прямоугольника Π_1 отображается в одну из вершин Π_2. Докажите, что f — линейная функция. (Следовательно, прямоугольники Π_1 и Π_2 подобны, то есть имеют одинаковое отношение сторон.)

К задаче №4

По теореме Каратеодори f продолжается на $\partial\Pi_1$ и гомеоморфно отображает $\partial\Pi_1$ на $\partial\Pi_2$. При этом каждая вершина Π_1 по условию переходит в одну из вершин Π_2. Пусть $\Pi_1 = ABCD$ и $\Pi_2 = A'B'C'D'$. Заметим, что противоположные вершины (например, A и C) прямоугольника Π_1 не могут переходить в соседние вершины (например, A', B') прямоугольника Π_2 (иначе по теореме о промежуточном значении либо B, либо D перейдет в какую-то точку на стороне $A'B'$ прямоугольника Π_2). Значит каждая сторона Π_1 переходит в точности в одну из сторон Π_2.
Теперь мы можем применять принцип симметрии. Например, сначала будем продолжать f отражением через стороны AB и CD и их образы. Мы получим конформное отображение полосы, ограниченной прямыми BC и AD, на аналогичную полосу, полученную из Π_2. Затем, продолжая через границы первой полосы и их образы, мы в итоге получим конформное отображение $\mathbb{C}$ на себя, а все такие отображения линейны.

Многозначные аналитические функции

Этой теме будут посвящены несколько ближайших занятий.

Однозначное аналитическое продолжение (напоминание)

Пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, а G — бо́льшая область: $D \subset G$.
Иногда функцию f можно аналитически продолжить в область G, то есть существует такая функция $F \in \mathcal{O}(G)$, что $F|_D \equiv f$.
Пример, который мы рассматривали в прошлом семестре: гамма-функция определяется в правой полуплоскости $D := \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ интегральной формулой, но продолжается в область $G := \mathbb{C} \setminus \{0; -1; -2; \dots\}$
По теореме единственности для голоморфных функций функция $F \in \mathcal{O}(G)$ определяется однозначно.
Бывает также, что функцию f нельзя продолжить в область G.
Например, функция $\dfrac{1}{z}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и не продолжается голоморфно в $\mathbb{C}$.
Можно сказать, что *голоморфная функция f «сама определяет», куда и как ее можно продолжать*.

Пример: ветви комплексного логарифма, $f(z) = \ln z$

Рассмотрим функцию $f(z) := \ln z$, $0 < \arg z < \pi$, голоморфную в верхней полуплоскости $D := \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$.
(Напомним, что $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.)
Функцию f можно аналитически продолжить в область $G_1 := \{-\pi < \arg z < \pi\}$ до голоморфной функции

$$F_1(z) := \ln z, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Функцию f также можно аналитически продолжить в область $G_2 := \{0 < \arg z < 2\pi\}$ до голоморфной функции

$$F_2(z) := \ln z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Но при всех z в нижней полуплоскости значения $F_1(z)$ и $F_2(z)$ не совпадают. Например, $F_1(-i) = -\dfrac{\pi i}{2}$, а $F_2(-i) = \dfrac{3\pi i}{2}$.

Как работать с такими функциями?

Язык для работы с функциями, которые «по природе своей» многозначны, был предложен К.Вейерштрассом. Далее мы будем его изучать.

Язык аналитических элементов

Элемент, или **аналитический элемент** — это пара (U, f), где U – круг в $\mathbb{C}$ (его радиус положителен, но может быть бесконечным), а f — голоморфная функция в круге U.
(Два элемента считаются равными, если их круги совпадают и функции совпадают в этом одном и том же круге.)

Как мы знаем, функцию f можно разложить в круге U в ряд Тейлора. Элемент называется **каноническим**, если радиус круга U совпадает с радиусом сходимости этого ряда Тейлора. Это означает, что функцию f нельзя продолжить в бóльший круг с тем же центром, что U.

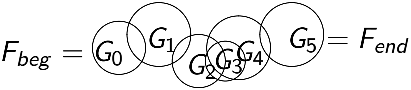
Элемент (U_2, f_2) называется **непосредственным аналитическим продолжением** (сокращенно НАП) элемента (U_1, f_1), если пересечение кругов $U_1 \cap U_2$ непусто, а функции f_1 и f_2 совпадают на этом пересечении: $f_1|_{U_1 \cap U_2} \equiv f_2|_{U_1 \cap U_2}$.
Очевидно, если (U_2, f_2) — НАП (U_1, f_1), то и, наоборот, (U_1, f_1) — НАП (U_2, f_2).

Продолжение по цепочке элементов

Пусть F_{beg} — элемент. Элемент F_{end} называется **результатом продолжения элемента F_{beg} по цепочке элементов G_0, G_1, G_2,. . . , G_n**, если $G_0 = F_{beg}$, $G_n = F_{end}$ и элемент G_j есть НАП элемента G_{j-1} при всех $j = 1, 2, \dots, n$. (См. рис. 1.)

Очевидно, если элемент F_{end} — результат продолжения F_{beg} по цепочке G_0, G_1, G_2, . . . , G_n, то и наоборот, F_{beg} — результат продолжения F_{end} по обратной цепочке G_n, G_{n-1},. . . , G_1, G_0.

Слово «результат» мы иногда будем опускать.



Продолжение по пути

В основном мы будем использовать продолжение элементов по путям.

Пусть $F_0 := (U_0, f_0)$ — *канонический* элемент с центром в точке a, а $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ — непрерывный путь из точки a в точку b: $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. **Продолжением (канонического) элемента F_0 по пути** γ называется семейство *канонических* элементов $F_t = (U_t, f_t)$, $t \in [0;1]$, обладающее двумя свойствами:
1) при каждом $t \in [0;1]$ центр круга U_t находится в точке $\gamma(t)$;
2) для каждого $t_0 \in [0;1]$ найдется такая окрестность $u(t_0) \subset [0;1]$, что для всех $t \in u(t_0)$ элемент F_t является НАП элемента F_{t_0}.
(См. рис. 2.)
Элемент F_1 называется результатом продолжения элемента F_0 по пути γ. Как и в случае цепочки, иногда слово «результат» мы будем опускать.

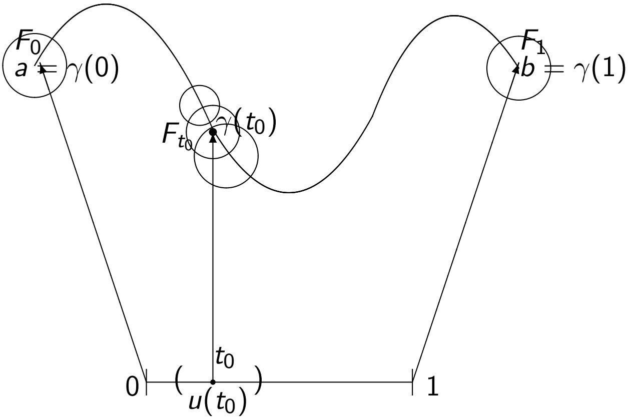


Рис. 2.

Свойства продолжения по пути

Важное замечание: окрестность в определении продолжения по пути берется *на отрезке* $[0;1]$, *где изменяется параметр*, а не на плоскости. В частности, если путь γ самопересекающийся, то есть $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ при некоторых $t_1 \neq t_2$, то элементы F_{t_1} и F_{t_2} вполне могут быть различны, хотя центры кругов U_{t_1} и U_{t_2} совпадают (они находятся в точке $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$).

Важное свойство (Предложение в п.10.4 в лекции 10 книги Домрина и Сергеева): если продолжение по пути существует, то оно единственно. (Тогда и результат продолжения, то есть элемент F_1, определен однозначно.)

Однако, вообще говоря, продолжения данного элемента по данному пути может и не существовать. Тогда мы говорим. что элемент не продолжается по данному пути.

Свойства продолжения по пути

Несложные свойства продолжения по пути:

- если заменить путь γ на эквивалентный, то есть репараметризовать, то результат продолжения по нему не изменится (потому что все семейство F_t можно будет так же репараметризовать). Поэтому корректно говорить о продолжении по (ориентированной) кривой.
- если канонический элемент F_1 — результат продолжения канонического элемента F_0 по пути γ, то F_0 — результат продолжения F_1 по обратному пути γ^{-1} (определяемому формулой $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$ при $t \in [0;1]$).
- элемент F_t есть результат продолжения элемента F_0 по пути $\gamma|_{[0;t]}$.

Полезное для понимания свойство (Лемма в п.10.4 в лекции 10 книги Домрина и Сергеева): если продолжение элемента вдоль пути существует, то радиус $R(t)$ круга U_t — либо тождественно ∞, либо (всюду конечная) непрерывная положительная функция на отрезке $[0;1]$.

Связь продолжения по цепочке и продолжения вдоль пути

Можно доказать, что продолжение вдоль пути (если, конечно, оно существует) сводится к продолжению по цепочке: если F_t, $t \in [0;1]$ — семейство (канонических) элементов, осуществляющее продолжение элемента F_0 по пути γ, то можно найти точки $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ на отрезке $[0;1]$ такие, что F_{t_j} — НАП $F_{t_{j-1}}$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то есть элемент F_1 — результат продолжения элемента F_0 по цепочке элементов F_{t_0}, F_{t_1}, ..., $F_{t_{n-1}}$, F_{t_n}. Это иногда бывает полезно.

Можно показать и обратную связь: продолжение канонического элемента F_{beg} по цепочке канонических элементов G_0, G_1, ..., G_n можно встроить в продолжение по пути, который представляет собой ломаную, последовательно соединяющую центры элементов G_0, G_1, ..., G_n. Но это нам не понадобится.

Оба этих утверждения доказаны в п.10.5 в лекции 10 книги Домрина и Сергеева.

Примеры

Тривиальный пример: пусть f — голоморфная функция в области D, а путь $\gamma : [0;1] \to D$. Начальный элемент F_0 задается суммой ряда Тейлора функции f в точке $\gamma(0)$. (Радиус его круга не меньше, чем $dist(\gamma(0), \partial D)$.) Продолжение строится так же: круг U_t — круг сходимости ряда Тейлора функции f с центром в точке $\gamma(t)$, а f_t — сумма этого ряда. Радиус круга U_t не меньше $dist(\gamma(t), \partial D)$, и в круге радиуса $dist(\gamma(t), \partial D)$ функция f_t совпадает с f. Мы видим, что результат продолжения зависит только от конечной точки $\gamma(1)$ и не зависит от выбора пути γ.

Самый тривиальный случай: f — целая функция. Тогда все радиусы равны ∞ и все функции совпадают с f.

Примеры (продолжение)

Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Начальный элемент рассмотрим в точке $z = 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \quad U_0 = \{|z-1| < 1\}.$$

Этот элемент продолжается по любому пути, который не проходит через нуль, но не продолжается ни по какому пути, который проходит через нуль. Почему?

Начальный элемент (U_0, f_0) обладает тем свойством, что $zf_0(z) \equiv 1$. Из теоремы единственности очевидно, что это свойство сохраняется при НАП. Предположим, что путь $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ кончается в нуле. Тогда конечный элемент (U_1, f_1) должен получаться из начального продолжением по некоторой цепочке. По индукции получаем, что для всех элементов (U, g) этой цепочки выполнено свойство $zg(z) \equiv 1$. Тогда оно верно и для конечного элемента (U_1, f_1). Но при $z = 0$ получаем $0 \cdot f_1(0) = 1$ — противоречие.

Пример: продолжение элемента логарифма из точки $z = 1$

Определим функцию $\ln_0$ в круге $U_0 := \{|z-1| < 1\}$ формулой $\ln_0 z := \ln z$, $-\pi < \arg z < \pi$. Как известно, эта ветвь логарифма разлагается в следующий ряд Тейлора:

$$\ln_0 z = \ln_0(1 + (z-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}.$$

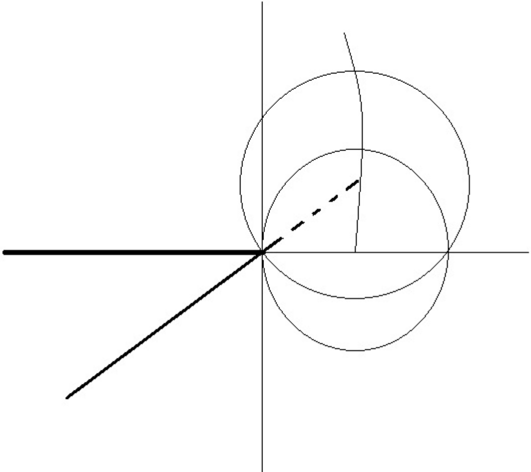
Тем самым $F_0 := (U_0, \ln_0)$ — канонический элемент.
Покажем, что *элемент F_0 продолжается по любому пути, не проходящему через нуль, и не продолжается по любому пути, проходящему через нуль.*
Случай 1. Пусть путь $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ начинается в точке 1 и не проходит через нуль. Тогда существует непрерывная ветвь функции $\mathrm{Arg}\gamma(t)$, равная нулю в точке $t = 0$:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}, \quad \theta \in C[0;1] \quad \theta(0) = 0.$$

Это доказывалось на первой лекции этого семестра (посвященной принципу аргумента).

Пример: продолжение элемента логарифма из точки $z = 1$ (продолжение)

Определим элемент F_t, $t \in [0; 1]$, следующим образом:
$F_t = (U_t, f_t)$, где $U_t := \{|z - \gamma(t)| < |\gamma(t)|\}$, а
$f_t(z) := \ln z, -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t)$.



Пример (продолжение)

Покажем, что каждый из элементов F_t канонический. При каждом $t \in [0;1]$ функция f_t является ветвью логарифма в круге U_t, и поэтому $\mathrm{Re}\, f_t = \ln|z|$. Если бы ее ряд Тейлора сходился бы в бóльшем круге $\tilde{U}_t$, то сумма $S_t(z)$ этого ряда Тейлора была бы голоморфна в нуле, но совпадала бы с f_t в круге U_t, а значит, $\mathrm{Re}\, S_t(z)$ стремилась бы к бесконечности при $z \to 0$, что невозможно.
Выполнение обоих свойств продолжения по пути для семейства F_t ясно из его определения.

Случай 2. Пусть путь γ проходит через нуль (для простоты пусть он кончается в нуле). Поскольку функция f_0 в начальном элементе — ветвь логарифма, то есть удовлетворяет уравнению $e^{f_0(z)} \equiv z$ в своем круге, а в силу теоремы единственности это свойство сохраняется при НАП, то и любое продолжение элемента F_0 по цепочке обязано обладать тем же свойством. Значит, и конечный элемент F_1 с центром 0 обладает этим свойством, но тогда $e^{f_1(0)} = 0$ — противоречие.

В рассмотренном выше примере с логарифмом можно заметить, что результат продолжения элемента F_0 по не проходящему через нуль пути γ зависит не только от конечной точки $\gamma(1)$, но и от самого пути: продолжение по двум разных путям с одним и тем же концом может дать разные результаты. На самом деле, как легко видеть, результат продолжения зависит не от самого пути, а от величины $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z$. Эта величина топологическая, она не меняется при малых деформациях пути γ. Это обстоятельство не случайно, как показывает следующая важная теорема.

Теорема о продолжении по гомотопным путям

Теорема о продолжении по гомотопным путям. Пусть $\gamma_0, \gamma_1 : [0;1] \to \mathbb{C}$ — два пути с общими концами: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = b$. Предположим, что пути γ_0 и γ_1 гомотопны в $\mathbb{C}$ (как пути с общими концами), то есть существует такое непрерывное отображение $\gamma(s,t)$, $\gamma : [0;1] \times [0;1] \to \mathbb{C}$, что $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ и $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [0;1]$, а также $\gamma(s,0) = a$ и $\gamma(s,1) = b$ при всех $s \in [0;1]$.
Положим $\gamma_s(t) := \gamma(s,t)$ при $s, t \in [0;1]$. Пусть канонический элемент F_0 в точке a *продолжается по каждому из путей* γ_s. Тогда результаты продолжения элемента F_0 по пути γ_0 и по пути γ_1 совпадают.

Теорема о монодромии

Следствием из теоремы о продолжении по гомотопным путям являтся теорема о монодромии.

Теорема. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$. Пусть задан канонический элемент F_0 в некоторой точке $a \in D$.
Предположим, что элемент F_0 *продолжается по всем путям в области* D*, выходящим из точки* a.
Тогда результат этого продолжения зависит только от конечной точки пути (а не от выбора самого пути).