Семинар по комплексному анализу 6 мая 2020 г.

Указания к задачам домашнего задания

Опишите особую точку суммы $\sqrt[k]{z}+\sqrt[l]{z}$ в нуле при $k, l \in \mathbb{N}$.

Ответ: НОД(k, l) точек ветвления порядка НОК(k, l).

Указание. При обходе окружности с центром в нуле $\arg \sqrt[k]{z}$ увеличивается на $2\pi/k$, $\arg \sqrt[l]{z}$ увеличивается на $2\pi/l$. Поэтому любой элемент суммы $\sqrt[k]{z}+\sqrt[l]{z}$ перейдет в себя через число обходов n такое, что $k \mid n$ и $l \mid n$, а минимальное такое число n и есть НОК(k, l). Поскольку всего разных элементов kl, то разных цепочек длины НОК(k, l) ровно $kl/$НОК$(k, l)=$НОД(k, l) штук.

(Пусть $d :=$НОД(k, l), $k = k'd$, $l = l'd$. Тогда НОК$(k, l) = k'l'd$ и $kl = k'l'd^2 = d$НОК(k, l).)

Опишите особую точку композиции $\sqrt[k]{z^l}$ в нуле при $k, l \in \mathbb{N}$.

Ответ: НОД(k, l) точек ветвления порядка $k/$НОД(k, l).

Указание.
При обходе окружности с центром в нуле $\arg(z^l)$ увеличивается на $2\pi l$, а $\arg \sqrt[k]{z^l}$ увеличивается на $2\pi l/k$. Поэтому любой элемент $\arg \sqrt[k]{z^l}$ перейдет в себя через число обходов n такое, что $k \mid nl$.
Пусть $d :=$НОД(k, l), $k = k'd$, $l = l'd$. Тогда $k'd \mid nl'd$, если и только если $k' \mid n$. Минимальное такое число n есть k'.
Поскольку всего разных элементов k, то разных цепочек длины k' ровно $k/k' = d$ штук.

В частности, если $k \mid l$, получаем просто l/k голоморфных функций. Например, $\sqrt{z^6} = \{z^3; -z^3\}$. Говоря корректнее, имеем l/k устранимых особых точек.

Изолированные особые точки аналитических функций (продолжение)

Опишите все особые точки суммы $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z-1}$.

Решение. Особые точки суммы там, где есть особая точка у одного из слагаемых, то есть 0, 1, ∞.

В окрестности точки 0 функция $\sqrt[3]{z-1}$ распадается на три голоморфные ветви (обозначим их через ψ_1, ψ_2, ψ_3). Функция $\sqrt{z}$ имеет точку ветвления порядка 2.
Пусть φ_0 и φ_1 — два элемента функции $\sqrt{z}$ в точке, близкой к $z = 0$. Тогда при обходе окружности с центром в нуле $\varphi_0 \mapsto \varphi_1 \mapsto \varphi_0$. Очевидно, тогда $\varphi_0 + \psi_j \mapsto \varphi_1 + \psi_j \mapsto \varphi_0 + \psi_j$ при $j = 1, 2, 3$, то есть имеется три точки ветвления порядка 2. (Соответствующие аналитические функции в проколотой окрестности нуля можно выписать в виде $\sqrt{z} + \psi_j$, $j = 1, 2, 3$.)

Рассуждая аналогично в точке $z = 1$, получим там две точки ветвления порядка 3.

Чтобы изучить точку $z = \infty$, следует обходить окружность $\{|z| = R\}$ большого радиуса R. На ней приращения аргумента практически такие же, как у $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$, получаем точку ветвления порядка 6.

$\sqrt{z} + \sqrt[3]{z-1}$

Замечание. Любой элемент суммы $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z-1}$ в любой точке может быть продолжен, например, в точку $z = 1000$ вдоль любого пути, не задевающего 0 и 1. Поскольку все элементы в точке 1000 получаются друг из друга каким-нибудь продолжением, то и все элементы во всех точках получаются друг из друга каким-нибудь продолжением. Тем самым сумма $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z-1}$ представляет собой единую аналитическую функцию в $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$.

$\sqrt{(z-a)f(z)}$

Пусть функция f голоморфна в окрестности нуля и $f(a) \neq 0$. Как описать особую точку $z = a$ для функции $\sqrt{(z-a)f(z)}$?

$\sqrt{(z-a)f(z)}$ (решение)

Пусть функция f голоморфна в окрестности нуля и $f(a) \neq 0$. Как описать особую точку $z = a$ для функции $\sqrt{(z-a)f(z)}$? Композиция $\sqrt{f(z)}$ в окрестности точки $z = a$ распадается на две голоморфные ветви ψ_1, $\psi_2 = -\psi_1$. Если φ_0, φ_1 — два элемента $\sqrt{z-a}$, например, в точке $a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ мало, то два элемента $\sqrt{(z-a)f(z)}$ в точке $a + \varepsilon$ есть $\varphi_0\psi_1$ и $\varphi_1\psi_1$ (они отличаются знаком).
Очевидно, при обходе окружности $\{|z-a| = \varepsilon\}$ получаем: $\varphi_0\psi_1 \mapsto \varphi_1\psi_1 \mapsto \varphi_0\psi_1$, то есть точка ветвления второго порядка.

Следствие. Пусть $F(z)$ — голоморфная функция в точке a, имеющая в этой точке нуль первого порядка. Тогда $\sqrt{F(z)}$ — аналитическая функция в проколотой окрестности точки a, имеющая в точке a точку ветвления порядка 2.

$\sqrt{(z-a)^l f(z)}$, $l \in \mathbb{N}$

Точно такие же рассуждения, как в предыдущей задаче, показывают, что если функция f голоморфна в окрестности нуля и $f(a) \neq 0$, то особые точки композиции $\sqrt{(z-a)^l f(z)}$ в точке a такие же, как и для композиции $\sqrt{(z-a)^l}$, то есть:

- одна точка ветвления второго порядка, если l нечетно;
- две устранимых особых точки, если l четно. (В этом случае получаем две голоморфные функции $(z-a)^{l/2}\sqrt{f(z)}$ и $-(z-a)^{l/2}\sqrt{f(z)}$, где $\sqrt{f(z)}$ — какая-нибудь голоморфная ветвь корня из $f(z)$ в окрестности точки a.)

Следствие. Пусть $F(z)$ — голоморфная функция в точке a, имеющая в этой точке нуль порядка $l \in \mathbb{N}$. Тогда $\sqrt{F(z)}$ имеет в точке a особые точки, определяющиеся четностью l:

- одна точка ветвления второго порядка, если l нечетно;
- две устранимых особых точки, если l четно.

$\sqrt[k]{F(z)}$, $F(a)=0$

Рассуждения, которые мы проводили для квадратного корня, легко обобщаются на случай корня произвольной степени. Поэтому если $F(z)$ — голоморфная функция в точке a, имеющая в этой точке нуль порядка $l \in \mathbb{N}$, то типы особых точек композиции $\sqrt[k]{F(z)}$, $k \in \mathbb{N}$, в точке a определяются только числами k и l.
(А именно, НОД(k, l) точек ветвления порядка $k/$НОД(k, l).)

Корни в полюсе

Если z обходит окружность с центром в нуле против часовой стрелки, то $\arg z$ увеличивается на 2π, а $\arg(\frac{1}{z})$ уменьшается на 2π.

Поэтому переходы различных элементов друг в друга для выражений $\sqrt[k]{\dfrac{1}{z^l}}$ устроены так же, как для выражений $\sqrt[k]{z^l}$.

Однако если $k \mid l$, то в этом случае получающиеся k функций, голоморфных в проколотой окрестности нуля, имеют в точке $z = 0$ не устранимую особую точку, а полюс порядка l/k.

Например, $\sqrt{\dfrac{1}{z^4}} = \left\{\dfrac{1}{z^2}; -\dfrac{1}{z^2}\right\}$.

Пример: опишем все особые точки функции $\sqrt[3]{\sin \pi z}$.
Особые точки имеются в нулях функции $\sin \pi z$ (то есть в точках $z = k \in \mathbb{Z}$) и в точке ∞. При этом во всех точках $k \in \mathbb{Z}$ имеется точка ветвления третьего порядка.
Точка $z = \infty$ — *неизолированная*, в нашу классификацию она не попадает.

Пример 2: опишем все особые точки функции $\sqrt{\operatorname{tg}(1/z)}$.
Особые точки возникают:
- там, где $\operatorname{tg}(1/z) = 0$ (то есть $\frac{1}{z} = \pi k$, $z = \frac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$);
- там, где функция $\operatorname{tg}(1/z)$ имеет полюс (то есть $\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$);
- в точке $z = \infty$ (ее мы всегда исследуем отдельно);
- в точке $z = 0$ (особая точка уже у подкоренного выражения).

Точка $z = 0$ — неизолированная.
Точки $z = \frac{1}{\pi k}$ и ∞ — нули первого порядка для $\operatorname{tg}(1/z)$, а значит, точки ветвления второго порядка.
Точки $z = \frac{1}{\pi/2 + \pi k}$ — полюса первого порядка для $\operatorname{tg}(1/z)$, а значит, тоже точки ветвления второго порядка.

$\operatorname{Ln} z^2$

Какие особые точки имеет выражение $\operatorname{Ln} z^2$ в нуле?
Пусть $\varepsilon > 0$. В точке $z = \varepsilon$ имеется счетное множество элементов: один из них φ_0 таков, что $\varphi_0(\varepsilon) = 2\ln\varepsilon \in \mathbb{R}$, а все прочие $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Если z обходит окружность с центром в нуле, то $\arg z$ увеличивается на 2π, а $\arg z^2$ увеличивается на 4π. Поэтому получаем цепочку:

$$\ldots \mapsto \varphi_{-4} \mapsto \varphi_{-2} \mapsto \varphi_0 \mapsto \varphi_2 \mapsto \varphi_4 \mapsto \ldots$$

Очевидно, она включает не все элементы. Элемент φ_1 порождает свою цепочку:

$$\ldots \mapsto \varphi_{-3} \mapsto \varphi_{-1} \mapsto \varphi_1 \mapsto \varphi_3 \mapsto \varphi_5 \mapsto \ldots$$

Теперь все элементы включены в одну из двух цепочек.
Ответ: две логарифмические точки ветвления.
Заметим, что в наших рассуждениях ε произвольно, поэтому они пригодны и для того, чтобы описать точку $z = \infty$.

$\mathrm{Ln}\, F(z)$ в нуле или в полюсе функции F

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в окрестности точки $z = a$ такая, что $f(a) \neq 0$. Тогда $\mathrm{Ln}\, f(z)$ в окрестности точки $z = a$ распадается на счетное множество голоморфных ветвей.
Обозначим одну из них через ψ_0.
Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Все элементы функции $\mathrm{Ln}\big((z-a)^n f(z)\big)$ в точке $a + \varepsilon$ имеют вид $f_k = \psi_0 + n\varphi_0 + 2\pi i k$, где φ_0 — такой элемент $\ln(z - a)$, что $\varphi_0(a + \varepsilon) \in \mathbb{R}$, а $k \in \mathbb{Z}$.
При обходе окружности $\{|z - a| = \varepsilon\}$ получаем $f_k \mapsto f_{k+n}$, аналогично случаю $\mathrm{Ln}\, z^2$.
Поэтому имеется n независимых бесконечных цепочек, то есть n логарифмических точек ветвления.

Следствие. Пусть $F(z)$ — голоморфная функция в точке a, имеющая в этой точке нуль порядка $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathrm{Ln}\, F(z)$ имеет в точке $z = a$ n логарифмических точек ветвления.
То же самое верно и для функции F, имеющей в точке $z = a$ полюс порядка n.

$\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ в точке $z = 0$

Какие особые точки имеет композиция $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ в точке $z = 0$?
Пусть, например, $\varepsilon > 0$. Тогда $\sqrt{z}$ имеет два элемента в точке ε: $\varphi_0(\varepsilon) > 0$ и $\varphi_1 = -\varphi_0$.
Тогда $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ имеет два счетных семейства элементов в точке ε:
$\psi_0(\varepsilon) = \frac{1}{2}\ln\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\psi_k = \psi_0 + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\tilde{\psi}_0 = \psi_0 + \pi i$ и $\tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_0 + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.
При обходе окружности $\{|z| = \varepsilon\}$ получаем:

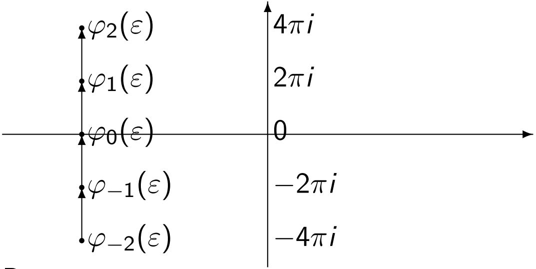
$$\ldots \mapsto \psi_{-1} \mapsto \tilde{\psi}_{-1} \mapsto \psi_0 \mapsto \tilde{\psi}_0 \mapsto \psi_1 \mapsto \tilde{\psi}_1 \mapsto \psi_2 \mapsto \ldots$$

То есть получается одна логарифмическая точка ветвления.

Опишите все особые точки функции $\sqrt{\mathrm{Ln}\, z}$.

Особые точки $\mathrm{Ln}\, z$: 0, ∞.
Особые точки $\sqrt{w}$: $w = 0$. Когда может быть $\ln z = 0$? При $z = 1$. Итак, особые точки 0, 1, ∞.

$z = 0$: $\mathrm{Ln}\, z$ имеет логарифмическую точку ветвления. Точнее, в близкой к нулю точке $\varepsilon > 0$ имеется счетное число элементов φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, где $\varphi_0(\varepsilon) < 0$ и $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi i k$.



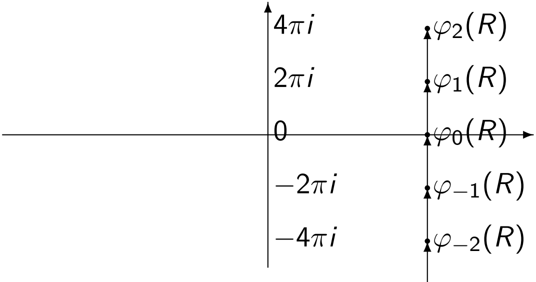
Все продолжение происходит в левой полуплоскости («близко к $-\infty$»). А в ней $\sqrt{w}$ распадается на две голоморфные ветви (пусть Ψ_1 и Ψ_2). Поэтому получаем две логарифмические точки ветвления: соответствующие аналитические функции есть $\Psi_1(\mathrm{Ln}\, z)$ и $\Psi_2(\mathrm{Ln}\, z)$.

$\sqrt{\operatorname{Ln} z}$ (продолжение)

Точка $z = \infty$.

Рассуждения аналогичны тем, что проведены при $z = 0$:

$\operatorname{Ln} z$ имеет логарифмическую точку ветвления. Точнее, в точке $R > 0$ (где R велико) имеется счетное число элементов φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, где $\varphi_0(R) > 0$ и $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi i k$.



Теперь все продолжение происходит в правой полуплоскости («близко к $+\infty$»). А в ней $\sqrt{w}$ опять распадается на две голоморфные ветви.

Поэтому опять получаем две логарифмические точки ветвления.

$\sqrt{\operatorname{Ln} z}$ (продолжение)

Точка $z = 1$.

В окрестности точки 1 функция $\operatorname{Ln} z$ распадается на счетное число голоморфных ветвей $\psi_k(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\psi_0(z) = 0$ и $\psi_k = \psi_0 + 2\pi ik$.

Значит, при всех $k \neq 0$ $\psi_k(1) = 2\pi ik \neq 0$. Функция $\sqrt{w}$ имеет две голоморфные ветви в окрестности каждой точки $2\pi ik$, $k \neq 0$. Обозначим их через $\Phi_k^+(w)$ и $\Phi_k^-(w)$. То есть при каждом $k \neq 0$ получаем две голоморфные ветви композиции $\sqrt{\operatorname{Ln} z}$: $\Phi_k^+(\psi_k(z))$ и $\Phi_k^-(\psi_k(z))$ (то есть две устранимые особые точки).

Но $\psi_0(1) = 0$. Чтобы изучить поведение $\sqrt{\psi_0}$, нужно узнать, каков *порядок нуля* функции $\psi_0(z)$ в точке $z = 1$.

$\psi_0(z) = \ln(1 + (z-1)) = (z-1) + O((z-1)^2)$, порядок нуля первый. То есть при $k = 0$ получаем точку ветвления второго порядка.

Итак, при $z = 1$:

счетное («дважды счетное») множество устранимых точек и одна точка ветвления порядка 2.

$\sqrt{1+\sqrt{z}}$

Какие особые точки у функции $\sqrt{1+\sqrt{z}}$?
Особые точки $\sqrt{z}$: 0, ∞.
Особые точки $\sqrt{w}$: $w=0$. Когда может быть $1+\sqrt{z}=0$? При $z=1$. Итак, особые точки 0, 1, ∞.

$z=0$.
$\sqrt{z}$ имеет точку ветвления второго порядка, два элемента: $\varphi_0(\varepsilon)>0$, $\varphi_1=-\varphi_0$.
Если z обходит окружность $\{|z|=\varepsilon\}$, то $1+\sqrt{z}$ меняется в окрестности единицы. В этой окрестности $\sqrt{w}$ имеет две голоморфных ветви: $\psi_0(1)=1$ и $\psi_1=-\psi_0$.
Получаем две аналитические функции, каждая с точкой ветвления 2-го порядка: $\psi_0(1+\sqrt{z})$ и $\psi_1(1+\sqrt{z})$.
$\psi_0(1+\varphi_0)\mapsto\psi_0(1+\varphi_1)\mapsto\psi_0(1+\varphi_0)$ и
$\psi_1(1+\varphi_0)\mapsto\psi_1(1+\varphi_1)\mapsto\psi_1(1+\varphi_0)$.

$\sqrt{1+\sqrt{z}}$ (продолжение)

$z = 1$.

$\sqrt{z}$ в окрестности точки $z = 1$ распадается на две голоморфные ветви: $\varphi_0(1) = 1$ и $\varphi_1 = -\varphi_0$.

Очевидно, $1 + \varphi_0(1) = 2$. В окрестности точки $w = 2$ функция $\sqrt{w}$ распадается на две голоморфные ветви ($\psi_0(2) = \sqrt{2}$ и $\psi_1 = -\psi_0$). Получаем две голоморфные функции в окрестности $z = 1$: $\psi_0(1 + \varphi_0(z))$ и $\psi_1(1 + \varphi_0(z))$.

Однако $1 + \varphi_1(1) = 0$. Какого порядка нуль функции $1 + \varphi_1(z)$ в точке $z = 1$?

$$1+\varphi_1(z) = 1-\sqrt{1+(z-1)} = 1-\left(1+\frac{z-1}{2}+O((z-1)^2)\right) =$$

$$= -\frac{z-1}{2} + O((z-1)^2).$$ Значит, нуль порядка 1.

Итого: две устранимых особых точки и одна точка ветвления порядка 2.

$\sqrt{1+\sqrt{z}}$ (продолжение)

$z = \infty$.
Пусть $R > 0$ велико. Будем различать элементы по их значениям в точке R:
$\sqrt{\sqrt{R}+1}$, $-\sqrt{\sqrt{R}+1}$, $i\sqrt{\sqrt{R}-1}$, $-i\sqrt{\sqrt{R}-1}$.
При продолжении вдоль окружности $\{|z| = R\}$ аргумент $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ увеличивается примерно на $\pi/2$. Поэтому получаем:

$$\sqrt{\sqrt{R}+1} \mapsto i\sqrt{\sqrt{R}-1} \mapsto -\sqrt{\sqrt{R}+1} \mapsto -i\sqrt{\sqrt{R}-1},$$

то есть точка ветвления четвертого порядка.

$\sqrt{z+\sqrt{z}}$

Какие особые точки у функции $\sqrt{z+\sqrt{z}}$?
Особые точки $\sqrt{z}$: 0, ∞.
Особые точки $\sqrt{w}$: $w=0$. Когда может быть $z+\sqrt{z}=0$? При $z^2=z$, то есть $z=0$ и $z=1$. Итак, особые точки 0, 1, ∞.

$z=0$: $\sqrt{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}$, $-\sqrt{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}$, $i\sqrt{\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon}$, $-i\sqrt{\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon}$.

Переходы: аргумент увеличивается примерно на $\pi/2$, то есть
$\sqrt{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon} \mapsto i\sqrt{\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon} \mapsto -\sqrt{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon} \mapsto -i\sqrt{\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon}$.

$z=\infty$: $\sqrt{R+\sqrt{R}}$, $\sqrt{R-\sqrt{R}}$, $-\sqrt{R+\sqrt{R}}$, $-\sqrt{R-\sqrt{R}}$.

Переходы: аргумент увеличивается примерно на π, но знак внутреннего корня меняется. То есть:
$\sqrt{R+\sqrt{R}} \mapsto -\sqrt{R-\sqrt{R}} \mapsto \sqrt{R+\sqrt{R}}$;
$\sqrt{R-\sqrt{R}} \mapsto -\sqrt{R+\sqrt{R}} \mapsto \sqrt{R-\sqrt{R}}$.

$\sqrt{z+\sqrt{z^2-4}}$

Какие особые точки у функции $\sqrt{z+\sqrt{z^2-4}}$?
Особые точки $\sqrt{z^2-4}$: ± 2, ∞.
Особые точки $\sqrt{w}$: $w=0$. Когда может быть $z+\sqrt{z^2-4}=0$?
При $z^2=z^2-4$, то есть никогда. Итак, особые точки 2, -2, ∞.

Точка $z=\infty$:

$$z+\sqrt{z^2-4}=z\pm z\sqrt{1-\frac{4}{z^2}}=z\pm z\left(1-\frac{2}{z^2}+O(z^{-4}))\right)=$$

$$=z\pm\left(z-\frac{2}{z}\right)+O(z^{-3}).$$

Знак «$+$» дает полюс порядка 1 в ∞, знак «$-$» дает нуль порядка 1 в ∞.

В дальнейшем...

Д/з: 24.01 1)3)6)7)8), 24.02 1)2)5)6), 24.06 1)2)3).

- $\mathrm{Arctg}\, z = \dfrac{1}{2i} \mathrm{Ln} \dfrac{1+iz}{1-iz}$ (к 24.06 п.2).

Еще можно посмотреть для тренировки:

- $\mathrm{Ln}\,\mathrm{Ln}\, z$;
- $\cos\left(\dfrac{i\,\mathrm{Ln}\, z}{8}\right)$.