А.Я.Хелемский. Задачи на 18 марта для 302 группы.

Проверка домашнего задания. 1. Полинормированное пространство $\mathcal{D}$ не метризуемо.

Проверка домашнего задания. 2. $\mathcal{D}$ как подмножество плотно в полинормированном пространстве $\mathcal{E}$.

Проверка домашнего задания. 3. Топология в $\mathcal{D}$, унаследованная из $\mathcal{S}$, строго грубее (= слабее) исходной.

Указание. Можно доказать, что существуют числа $c_n > 0$, такие, что последовательность $c_n\varphi(t-n)$ где φ — горбушка или шляпа, сходится в $\mathcal{S}$, но не в $\mathcal{D}$. А для этого можно использовать следующую лемму общего характера: пусть $(E, \|\cdot\|_m)$ — полинормированное пространство (со счетным семейством преднорм), ψ_n — последовательность его векторов. Тогда существуют числа $c_n > 0$, такие, что последовательность $c_n\psi_n$ стремится к нулю в E (то есть для любого m выполнено $\|c_n\psi_n\|_m \to 0; n \to \infty$.

Проверка домашнего задания. 4. Оператор умножения на гладкую функцию $\psi \in \mathcal{E}$ в $\mathcal{D}$ и в $\mathcal{E}$ непрерывен.

Указание. Если $\|\cdot\|$ — допустимая преднорма, то преднорма $|||\cdot|||; |||\varphi||| := \|\psi\varphi\|$ тоже допустима.

Определяются следующие понятия: а) обобщенная-функция; б) обобщенная-функция-умеренного роста; в) обобщенная-функция-с-компактным-носителем.

Задача на дом (на проверку определений) 1. Функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ является обобщенной-функцией $\iff$ для любого N существуют C и n, такие, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}_N$ выполнено $|f(\varphi)| \le C\|\varphi\|_n^{(N)}$.

Задача на дом (на проверку определений) 2. Функционал $f : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ является обобщенной-функцией-с-компактным-носителем $\iff$ существуют N, n и C, такие, что для любой $\varphi \in \mathcal{E}$ выполнено $|f(\varphi)| \le C\|\varphi\|_n^{(N)}$.

Определяется порядок обобщенной-функции f: наименьшее n (если оно существует), такое, что для любого N существует C, такое, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}_N$ выполнено $|f(\varphi)| \le C\|\varphi\|_n^{(N)}$.

Рассматривается диаграмма $\mathcal{E}^* \to \mathcal{S}^* \to \mathcal{D}^*$ ("сопряженная" к диаграмме естественных вложений $\mathcal{D} \to \mathcal{S} \to \mathcal{E}$). На месте: её операторы инъективны, так что можно $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{S}^*$ отождествить с их образами соответственно в $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{D}^*$.

Задача на дом. 3. Обобщенная-функция может быть отождествлена с обобщенной-функцией-с-компактным-носителем $\mathcal{D}^* \iff$ она непрерывна относительно топологии, унаследованной из $\mathcal{E}$ (то есть заданной стандартными преднормами)

Указание. Осознать, что операторы в диаграмме $\mathcal{E}^* \to \mathcal{S}^* \to \mathcal{D}^*$ суть ограничения на подпространство.

Определение локально интегрируемой функции. Определение регулярной (и сингулярной) обобщенной-функции. Оператор $L_1^{loc} \to \mathcal{D}^*$. Его инъективность. Если это не доказывалось на (дистанционной?) лекции, то вот подводящая задача из действительного анализа.

Задача на дом. 4. Пусть $f \in L[a,b]$ такова, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, равной нулю вне $[a,b]$, выполнено $\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = 0$ Тогда $f = 0$ почти всюду.

Теперь мы вправе снять "черточку" в термине "обобщенная-функция".

Определение δ-функции Дирака $\delta(\varphi) : -\varphi(0)$ (и её аналоги в $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{E}^*$. Теорема: это сингулярная обобщенная функция нулевого порядка. (если не было на "лекции", то это Задача на дом. 5.)

Задача на дом. 6. Функционал $\varphi \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ — это сингулярная обобщенная функция порядка 1.

Указание. То, что это сингулярная обобщенная функция порядка ≤ 1, следует из теоремы о среднем для $\psi(t) := \varphi(t) - \varphi(0)$. То, что порядок не может быть нулем, следует из существования в $\mathcal{D}$ для любых N и $\varepsilon > 0$ функций, возрастающих на $[-N, N]$ и равных 1 при $\varepsilon \leq t \leq N$ и -1 при $-N \leq t \leq -\varepsilon$.

Топология в пространствах обобщенных функций (слабая*!)

δ-образная последовательность в $\mathcal{D}$.

Задача на дом. 7. δ-образная последовательность сходится в $\mathcal{D}^*$ к δ-функции.

Литература. А.Я.Хелемский. Лекции по функциональному анализу. Москва МНЦМО 2004 (потом переиздана в 2014?) Глава 4 §3.

А.Я.Хелемский. Задачи на 25 марта для 302 группы.

Проверка домашнего задания. Задача на проверку определений. 1. Функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ является обобщенной-функцией $\iff$ для любого N существуют C и n, такие, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}_N$ выполнено $|f(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_n^{(N)}$.

Проверка домашнего задания. Задача на проверку определений. 2. Функционал $f : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ является обобщенной-функцией-с-компактным-носителем $\iff$ существуют N, n и C, такие, что для любой $\varphi \in \mathcal{E}$ выполнено $|f(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_n^{(N)}$.

Проверка домашнего задания. 3. Обобщенная-функция может быть отождествлена с обобщенной-функцией-с-компактным-носителем $\iff$ она непрерывна относительно топологии, унаследованной из $\mathcal{E}$ (то есть заданной стандартными преднормами)

Проверка домашнего задания. 4. Пусть $f \in L[a,b]$ такова, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, равной нулю вне $[a,b]$, выполнено $\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = 0$ Тогда $f = 0$ почти всюду.

Проверка домашнего задания. 5. (Если не было на лекции!) δ-функция Дирака — это сингулярная обобщенная-функция нулевого порядка.

Проверка домашнего задания. 6. Функционал $\varphi \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ — это сингулярная обобщенная-функция порядка 1.

Проверка домашнего задания. 7. δ-образная последовательность сходится в $\mathcal{D}^*$ к δ-функции.

Напоминание о вложениях $\mathcal{D} \to \mathcal{S} \to \mathcal{E} \to L_1^{loc} \to \mathcal{D}^*$; в частности, $\mathcal{D}$ вложено в $\mathcal{D}^*$.

Функция умеренного f роста: для некоторого p выполнено $|f(t)| \leq C(1 + |t|^p)$.

Задача на месте. Если f — локально интегрируемая функция умеренного роста, то функционал $\hat{f} : \mathcal{S} \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ — это обобщенная-функция-умеренного роста. В частности, возникает вложение $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$.

Задача на месте. Если f — локально интегрируемая функция с компактным носителем, то функционал $\hat{f} : \mathcal{S} \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ — это обобщенная-функция–с-компактным-носителем.

Замечание. $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$ не вкладывается!

Теперь мы вправе снять "черточку" в терминах "обобщенная-функция-умеренного роста" и "обобщенная-функция–с-компактным-носителем."

Напоминание о достаточном условии плотности подпространства в (E^*, w^*).

Задача на дом 1. $\mathcal{D}$ плотно в $(\mathcal{D}^*, w^*)$, а $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}^*, w^*)$.

Мотивировка определения обобщенной производной: общая задача о продолжении оператора $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ до w^*-непрерывного оператора $\widetilde{T} : \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$. (Иллюстрацию даёт коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} T : \mathcal{D} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "in"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "in"] \\ \mathcal{D}^* \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \mathcal{D}^* \end{tikzcd} , \tag{1}$$

Задача на дом 2. (Если на лекции есть только определение "явочным порядком"). Пусть $D : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ — оператор дифференцирования. Тогда существует единственный w^*-непрерывный оператор $\mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$, продолжающий D. Он действует по правилу

$$[\widetilde{D} f](\varphi) = f(-D\varphi),$$

то есть $\widetilde{D} = -D^*$.

Указание. Единственность следует из плотности $\mathcal{D}$ в $(\mathcal{D}^*, w^*)$. Далее, всякий сопряженный оператор w^*-непрерывен. Наконец, интегрирование по частям, с учетом финитности функций из $\mathcal{D}$, показывает, что оператор, заданный как (1), действительно является продолжением D.

Задача на месте. Обобщенная производная функции Хевисайда есть δ-функция.

Задача на дом 3. Обобщенная производная функции $\ln|t|$ есть интеграл главного значения из задачи 6.

Определение обобщенной производной обобщенной функции. Видим, что любая обобщенная функция имеет сколько угодно производных.

Определение первообразной обобщенной функции.

Задача на дом 4. Каждая обобщенная функция имеет первообразную, и все первообразные отличаются на константу.

Указание. Подпространство $\{\varphi'; \varphi \in D$ в D имеет коразмерность 1.

Задача на дом 5. По аналогии с задачей 2 дать определение производной обобщенной функции умеренного роста и доказать соответствующую теорему существования и единственности.

Указание. Роль диаграммы (1) теперь играет

$$\begin{tikzcd} T : \mathcal{S} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "in"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "in"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd} ,$$

Задача на дом 6. По аналогии с задачей 2 дать определение произведения функции из $\mathcal{E}$ на функцию из $\mathcal{D}^*$.

Литература. А.Я.Хелемский. Лекции по функциональному анализу. Москва МНЦМО 2004 (потом переиздана в 2014?) Глава 4 §3.

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 1 апреля (!) для 302 группы.

Проверка домашнего задания. 1. $\mathcal{D}$ плотно в $(\mathcal{D}^*, w^*)$, а $\mathcal{S}$ плотно в $(\mathcal{S}^*, w^*)$.

Проверка домашнего задания. 2. (определение обобщенной производной). Пусть $D : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ — оператор дифференцирования. Тогда существует единственный w^*-непрерывный оператор $\mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$, продолжающий D. Он действует по правилу

$$[\widetilde{D}f](\varphi) = f(-D\varphi),$$

то есть $\widetilde{D} = -D^*$.

Проверка домашнего задания 3. Обобщенная производная функции $\ln|t|$ есть "интеграл главного значения" ($\varphi \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$).

Проверка домашнего задания 4. Каждая обобщенная функция имеет первообразную, и все первообразные отличаются на константу.

Проверка домашнего задания 5. По аналогии с задачей о производной (просто) обобщенной функции дать определение производной обобщенной функции умеренного роста и доказать соответствующую теорему существования и единственности.

Проверка домашнего задания 6. По аналогии с задачей о производной обобщенной функции дать определение произведения функции из $\mathcal{E}$ на функцию из $\mathcal{D}^*$.

Определение носителя обобщенной функции f: это замкнутое подмножество M в $\mathbb{R}$, такое, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, равной нулю в некоторой окрестности множества M, выполнено $f(\varphi) = 0$. (Таким образом, согласно этому определению носителей много, а как на лекциях?).

Задача на месте. Каковы носители у δ и δ'? (во втором случае мы видим, зачем в определении упомянута окрестность).

Задача на дом 1. (Если не доказывалась на лекции). Обобщенная функция из $\mathcal{D}^*$ принадлежит $\mathcal{E}^* \iff$ у неё есть компактный носитель.

(её шуточная формулировка: обобщенная-функция-с-компактным-носителем — это в точности обобщенная функция с компактным носителем.)

Задача на дом 2. (Если не доказывалась на лекции). Если носитель обобщенной функции — $\{0\}$, то она есть (конечная) линейная комбинация δ-функции и её производных.

Теорема. (Доказывалась на лекциях? В любом случае формулировку надо знать.) Пусть f — обобщенная функция с компактным носителем. Тогда

(i) для некоторого $n > 0$ функция f представима как $\sum_{k=0}^{n} h_k^(k)$, где все h_k — регулярные финитные функции;

(ii) f есть кратная производная от некоторой регулярной обобщенной функции, которая может быть выбрана сколь угодно раз гладкой.

Задача на дом 3. Вывести из предыдущей теоремы, что любая обобщенная функция с компактным носителем имеет конечный порядок.

Литература. А.Я.Хелемский. Лекции по функциональному анализу. Москва МНЦМО 2004 (потом переиздана в 2014?) Конец главы 4 §3.

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 8 апреля для 302 группы.

Проверка домашнего задания 1. (Если не доказывалась на лекции). Обобщенная функция из $\mathcal{D}^*$ принадлежит $\mathcal{E}^* \iff$ у неё есть компактный носитель.

Проверка домашнего задания 2. (Если доказывалась на лекции, все равно, закрыв тетрадь, докажите сами). Если носитель обобщенной функции — $\{0\}$, то она есть (конечная) линейная комбинация δ-функции и её производных.

В прошлом задании я сформулировал теорему о структуре обобщенных функций с компактным носителем. Саша Кучеренко пишет, что её не было на лекции. Но я все равно убежден, что её формулировку, ввиду её четкости и понятности, надо знать. Повторяю:

Теорема. Пусть f — обобщенная функция с компактным носителем. Тогда

(i) для некоторого $n > 0$ функция f представима как $\sum_{k=0}^{n} h_k^(k)$, где все h_k — регулярные финитные функции;

(ii) f есть кратная производная от некоторой регулярной обобщенной функции, которая может быть выбрана сколь угодно раз гладкой.

Проверка домашнего задания 3. Вывести из этой теоремы, что любая обобщенная функция с компактным носителем имеет конечный порядок.

Начинается новая тема: **Преобразование Фурье.**

Тут лектор поменял традиционный порядок: как я привык, эта тема излагается в самом конце, после спектральной теории. Но делать нечего: в этом учебном году, выражаясь по-феодальному, он наш сеньор, а мы все его вассалы. Итак:

Первая из трех разновидностей преобразования Фурье (они потом все нам понадобятся) — это так называемое классическое, записываемое для $\varphi \in L_1(\mathbb{R}$ формулой $[F(\varphi)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-ist} dt$. Начинаем с ним разбираться.

Два обязательных примера. (Если были на лекции, тем лучше, но все равно я их даю как задачи.)

Задача на дом 1. Найти преобразование Фурье от ступеньки $\chi_{[a,b]}$.

(Сразу же видим, что получается не интегрируемая функция.)

Задача на дом 2. Показать, что преобразование Фурье от функции Гаусса $e^{-t^2/2}$ оставляет её на месте.

Указание. Применить интегральную теорему Коши для функции

$e^{-z^2/2}e^{-isz}$, рассмотренной на расширяющемся в обе стороны прямоугольнике, у которого нижняя сторона — часть оси абсцисс, а верхняя — часть прямой $\{z = -is; s \in \mathbb{R}\}$.

Узнав на лекции, что $[F(\varphi)](s)$ всегда лежит в $C_0(\mathbb{R})$, вводим оператор классического преобразования Фурье $F : L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

Про него надо знать, что он а) инъективен ("теорема единственности") и б) он не сюръективен, но его образ плотен. Оба факта сообщаем без доказательства (впрочем, теорему единственности и плотность — но не сюръективность — на занятиях докажем позже.)

Далее на лекциях мы узнали то замечательное свойство преобразования Фурье, что оно меняет местами операции дифференцирования и умножения на независимую переменную.

Везде далее D — оператор дифференцирования, а M — оператор умножения на независимую переменную (там, где они имеют смысл.)

Задача на дом 1. Считая, что оператор F не выводит из $\mathcal{S}$ (это легко, но докажем позже) показать, что существуют коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "iD"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "-M"] & \mathcal{S} \end{tikzcd},$$

и

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "iD"] & \mathcal{S} \end{tikzcd},$$

Что, если φ убывает даже быстрее отрицательных степеней многочленов? Догадываемся, что должны получить что-то покруче гладкости. И вот:

Задача на дом 2. Пусть $\varphi \in L_1(\mathbb{R}$ такова, что для некоторого $b > 0$ выполнено $e^{b|t|}\varphi \in L_1(\mathbb{R}$. Тогда $[F(\varphi)](s)$ продолжается до голоморфной функции $\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-izt}dt$ в полосе $\{z : |Im(z)| < b$.

Указание. В указанной полосе интеграл функции по любому треугольному контуру равен нулю. Дальше — комплексный анализ.

Задача на дом 3. Считая известной теорему единственности, доказать, что при тех же предположениях относительно φ из $\int_{\mathbb{R}} t^n\varphi(t) = 0$ для всех $n = 0, 1, ...$ следует, что $\varphi = 0$ почти всюду.

Указание. Голоморфная функция $[F(\varphi)](s)$ равна в нуле нулю со всеми производными.

Задача на дом 4. Функции Эрмита образуют в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ ортонормированный базис.

Указание. Если ψ ортогональна всем функциям Эрмита, то $\psi(t)e^{-t^2/2}$ удовлетворяет условиям задачи 3.

Пусть T_a — оператор сдвига на $a \in \mathbb{R}$, а E_a — оператор умножения на e^{-iat}.

Задача на дом 2. Существуют коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "T_a"] \arrow[d, "F"'] & L_1(\mathbb{R}) \arrow[d, "F"] \\ C_0(\mathbb{R}) \arrow[r, "E_a"] & C_0(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "E_a"] \arrow[d, "F"'] & L_1(\mathbb{R}) \arrow[d, "F"] \\ C_0(\mathbb{R}) \arrow[r, "T_a"] & C_0(\mathbb{R}). \end{tikzcd}$$

Думал Фурье: как восстановить исходную функцию по "его" преобразованию? Сейчас мы просто даём определение обратного преобразования Фурье $[\breve{F}(\varphi)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{+ist}dt$ (имеющего смысл только для $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

На месте: если для любой функции ψ на $\mathbb{R}$ положить $\Sigma\psi(t) := \psi(-t)$, то $[\breve{F}(\varphi)](t) = [(\Sigma F(\varphi)](t) = [F(\Sigma\varphi)](t)$.

Дома: вывести отсюда аналоги предыдущих утверждений о "прямом" преобразовании Фурье.

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 15 апреля для 302 группы.

Проверка домашнего задания 1. Считая, что оператор F не выводит из $\mathcal{S}$ (теперь И.А. уже вам это доказал) показать, что существуют коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "iD"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "-M"] & \mathcal{S} \end{tikzcd},$$

и

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "iD"] & \mathcal{S} \end{tikzcd},$$

Проверка домашнего задания 2. (Кажется, это было на лекциях. Все равно попробуйте это доказать без их привлечения.) Пусть $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ такова, что для некоторого $b > 0$ выполнено $e^{b|t|}\varphi \in L_1(\mathbb{R}$. Тогда $[F(\varphi)](s)$ продолжается до голоморфной функции $\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-izt}dt$ в полосе $\{z : |Im(z)| < b\}$.

Проверка домашнего задания 3. Считая известной теорему единственности (её докажут на лекции 13го), показать, что при тех же предположениях относительно φ из $\int_{\mathbb{R}} t^n\varphi(t) = 0$ для всех $n = 0, 1, ...$ следует, что $\varphi = 0$ почти всюду.

Проверка домашнего задания 4. Функции Эрмита образуют в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ ортонормированный базис.

Проверка домашнего задания 5. В обозначениях T_a и E_a предыдущего занятия показать, что существуют коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "T_a"] \arrow[d, "F"'] & L_1(\mathbb{R}) \arrow[d, "F"] \\ C_0(\mathbb{R}) \arrow[r, "E_a"] & C_0(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "E_a"] \arrow[d, "F"'] & L_1(\mathbb{R}) \arrow[d, "F"] \\ C_0(\mathbb{R}) \arrow[r, "T_a"] & C_0(\mathbb{R}) \end{tikzcd}.$$

(кажется, согласно Алексеевсу, надо здесь T_a заменить на T_{-a}. Проверьте!)

Насколько мне известно, на лекциях аккуратно доказывалось, что оператор классического преобразования Фурье, будучи ограничен на $\mathcal{S}$, превращается в топологический изоморфизм (относительно топологии в $\mathcal{S}$) $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. На всякий случай: проверьте,что обратный оператор также непрерывен.

Задача на дом 1. (сравните с задачей на дом 3 из предыдущего занятия.) Пусть функция $\varphi \in \mathcal{S}$ такова, что $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) = 0$ для всех $n = 0, 1, ...$ следует ли отсюда, что $\varphi = 0$?

Указание. Нет! Рассмотрите $\check{F}(\psi); \psi \in \mathcal{S}$, где ψ равна нулю в 0 со всеми производными (хоть сдвиг горбушки.)

Вспомним об определении оператора $\widetilde{D}$ как разумного продолжения оператора $D : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Думаем: можно ли сходным образом продолжить оператор Фурье?

На месте: F выводит из $\mathcal{D}$; более того, $\mathcal{D} \cap F(\mathcal{D}) = 0$. И вообще:

Задача на дом 2. Не существует оператора $T : \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$, который был бы слабо* непрерывен и совпадал бы на $\mathcal{D}$ с классическим преобразованием Фурье.

Указание. Берем $\psi_1 \in \mathcal{D}$. Знание слабо* непрерывных функционалов на $\mathcal{D}^*$ дает $(Tf)(\psi_1) = f(\psi_2)$ для какой-то $\psi_2 \in \mathcal{D}$. Отюда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ выполнено $(Tf)(\psi_1) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\psi_2(s)ds = \int_{\mathbb{R}} F(\varphi)(s)\psi_1(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)[F(\psi_1)](t)dt$. Следовательно, $\psi_2(t) = [F(\psi_1)](t)$ почти всюду, а это противоречит тому, что $\mathcal{D} \cap F(\mathcal{D}) = 0$.

Оказывается, если перейти от $\mathcal{D}$ к $\mathcal{S}$, все получается:

Задача на дом 3. (Если было на лекции, отложите тетрадь и продумайте.) Существует единственный w^*-непрерывный оператор $\widetilde{F} : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$, продолжающий F, то есть делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "in"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "in"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{F}^* \end{tikzcd}$$

коммутатовной. Он действует по правилу

$$[\widetilde{F}f](\varphi) = f(F\varphi),$$

то есть $\widetilde{D} = F*$.

На месте: это топологический изоморфизм.

Этим определено проеобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста.

Задача на дом 4. Найдите $\widetilde{F}$ от δ-функции

Ответ: регулярная обобщенная функция умеренного роста "константа". Какая?

Задача на дом 5. Найдите $\widetilde{F}$ от константы.

Ответ: δ-функция с коэффициентом. Каким?

Задача на дом 6. Придав точный смысл действующим в $\mathcal{S}^*$ операторам $\widetilde{D}$ (дифференцирования), $\widetilde{M}$ (умножения на независимую переменную), $\widetilde{E}_a$ (умножения на e^{-iat}) и $\widetilde{T}_a$ (сдвига на a), нарисовать коммутативные диаграммы, связывающие: 1) $i\widetilde{D}$ и $-\widetilde{M}$; 2) $\widetilde{M}$ и $i\widetilde{D}$; 3) $\widetilde{E}_a$ и $\widetilde{T}_{-a}$; 4) $\widetilde{T}_a$ и $\widetilde{E}_a$.

Задача на дом 7. Найдите $\widetilde{F}$ от $\sum_{k=0}^{n} e^{ia_k t}t^k$ и $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi^{(k)}(a_k)$.

Указание. Использовать коммутативные диаграммы предыдущей задачи.

То, что $\widetilde{F}$ — изоморфизм, позволяет, наконец, доказать теорему единственности классического преобразования Фурье (что, наверное, было на лекции).

Задача на дом 8. Пусть для $\varphi \in L_1(\mathbb{R}$ функция $F(\varphi)$ также принадлежит $L_1(\mathbb{R}$. Тогда $\breve{F}(F(\varphi))$ совпадает с φ почти всюду.

Указание. Рассмотреть функции из $L_1(\mathbb{R}$ как регулярные обобщенные функции умеренного роста и использовать вид обратного оператора к $\widetilde{F}$.

P.S. Пусть кто-нибудь напишет, на чем кончилась лекция 13.04.

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 22 апреля для 302 группы.

Проверка домашнего задания 1. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{S}$ такова, что $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) = 0$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Следует ли отсюда, что $\varphi = 0$?

Проверка домашнего задания 2. Не существует оператора $T : \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$, который был бы слабо* непрерывен и совпадал бы на $\mathcal{D}$ с классическим преобразованием Фурье.

(Интересно, кто эту задачу сделал.)

Проверка домашнего задания 3. (Если было на лекции, отложите тетрадь и продумайте.) Существует единственный w^*-непрерывный оператор $\widetilde{F} : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$, продолжающий F, то есть делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "in"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "in"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{F}^* \end{tikzcd}$$

коммутативной. Он действует по правилу

$$[\widetilde{F} f](\varphi) = f(F\varphi),$$

то есть $\widetilde{D} = F*$.

На месте: это топологический изоморфизм.

Проверка домашнего задания 4. Найдите $\widetilde{F}$ от δ-функции

Проверка домашнего задания 5. Найдите $\widetilde{F}$ от константы.

Проверка домашнего задания 6. Придав точный смысл действующим в $\mathcal{S}^*$ операторам $\widetilde{D}$ (дифференцирования), $\widetilde{M}$ (умножения на независимую переменную), $\widetilde{E}_a$ (умножения на e^{-iat}) и $\widetilde{T}_a$ (сдвига на a), нарисовать коммутативные диаграммы, связывающие: 1) $i\widetilde{D}$ и $-\widetilde{M}$; 2) $\widetilde{M}$ и $i\widetilde{D}$; 3) $\widetilde{E}_a$ и $\widetilde{T}_{-a}$; 4) $\widetilde{T}_a$ и $\widetilde{E}_a$.

Проверка домашнего задания 7. Найдите $\widetilde{F}$ от $\sum_{k=0}^{n} e^{ia_k t} t^k$ и от $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi^{(k)}(a_k)$.

Проверка домашнего задания 8. Пусть для $\varphi \in L_1(\mathbb{R}$ функция $F(\varphi)$ также принадлежит $L_1(\mathbb{R}$. Тогда $\check{F}(F(\varphi))$ совпадает с φ почти всюду.

Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ ("гильбертово" преобразование Фурье"). Формально это третья разновидность преобразования Фурье (хотя на самом деле оно, как и классическое, могут быть рассмотрены как ограничения преобразования Фурье обобщенных функций. (Придайте этому заявлению точный смысл.)

На месте: почему для $L_2(\mathbb{R})$ нельзя определить её преобразование Фурье тем же интегралом, как и для классического?

Что же делать? На помощь приходит функциональный анализ.

Задача на дом 1. (Как на лекции?) Проверить, что $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ — унитарный оператор относительно скалярного произведения, индуцированного из $L_2(\mathbb{R})$.

После этого "стреляем из пушки": благодаря принципу продолжения по непрерывности, мгновенно появляется унитарный оператор $F_\bullet$, действующий в $L_2(\mathbb{R})$.

На месте: вспомните, что это за принцип, и какая его разновидность здесь используется. (На всякий случай: см. книгу, с. 525 издания 2004 г.)

Задача на дом 2. (Если не было на лекции.) Докажите последнее утверждение теоремы Планшереля с помощью коммутативных (что надо проверить!) диаграмм

$$\begin{tikzcd}
L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "in"'] & C_0(\mathbb{R}) \arrow[d, "in"] \\
\mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{S}^*
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
L_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "in"'] & L_2\mathcal{S} \arrow[d, "in"] \\
\mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{S}^*
\end{tikzcd}$$

В нашем зоопарке операторов появился новый зверь: $F_\bullet$. Как же он действует? На лекциях показано, что его спектр — точечный, и состоит из точек $1, -i, -1, i$. Но мы "позна́ем" его полностью, указав модель. Сперва — два подготовительных утверждения на уровне первого курса. (Возможно, были на лекциях.)

Задача на дом 3. $(e^{-t^2/2})^{(n)}$ имеет вид

$$(-1)^n t^n e^{-t^2/2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t^{n-k} e^{-t^2/2},$$

где λ_k — целые числа.

Задача на дом 4. Выполнено

$$F(t^n e^{-t^2/2}) = (-i)^n t^n e^{-t^2/2} + \sum_{k=1}^{n} i^n \lambda_k t^{n-k} e^{-t^2/2},$$

где λ_k — те же, что и в предыдущей задаче.

Теперь — главное.

Задача на дом 5. (Если было на лекции, то продумайте еще раз — она того стоит.) Функции Эрмита $h_n; n = 0, 1, ...$ суть собственные векторы оператора $F_\bullet$, а соответствующие собственные значения суть $(-i)^n$.

Указание. $H_n := span\{h_0, ..., h_n\}$ суть инвариантные подпространства оператора $F_\bullet$. При этом а) $F_\bullet(h_n) \perp H_{n-1}$ и б) $F_\bullet(h_n) = \lambda h_n$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Что это за λ, узнаём из подготовительных утверждений.

Задача на дом 6. Показать, что $F_\bullet$ унитарно эквивалентен диагональному оператору T_ξ, где $\xi_n = (-i)^n$.

Теперь — новая тема. **Свертка.**

Вспомните формулу на лекциях и осознайте, что $\varphi * \psi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau)[T_t \Sigma\psi](\tau)d\tau$, где T_t — сдвиг, а $\Sigma\psi(\tau) := \psi(-\tau)$.

Надо знать, что "свертка усредняет", свертка горбушки и ступеньки дает шляпу, и что "свертка сглаживает". (Если чего-то не было на лекции, сообщите, и мы на этом задержимся.

Когда свертка заведомо существует? Главный факт — это существование свертки двух интегрируемых функций (теорема на лекциях).

Задача на дом 7. Свертка является (в смысле алгебраического определения) коммутативным умножением в $L_1(\mathbb{R})$.

Указание. Можно применить теорему Фубини, а можно — теорему единственности.

Но бывают и другие случаи свертки:

Задача на дом 8. Свертка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_\infty(\mathbb{R})$ существует в любой точке, она ограничена и равномерно непрерывна.

Задача на дом 9. Свертка двух функций из $L_2(\mathbb{R})$ существует и принадлежит $C_0(\mathbb{R})$.

Задача на дом 10. (Она потруднее, но очень важна.) Свертка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_2(\mathbb{R})$ существует почти всюду и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

Указание. Применить к функциям (от τ) $\sqrt{|\varphi(\tau)||\psi(t-\tau)|}$ и $\sqrt{|\varphi(\tau)|}$ (принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$!) неравенство Коши-Буняковского.

Фундаментальный факт: после преобразования Фурье свертка переходит в поточечное умножение (на лекциях)

Задача на дом 11. Две алгебры: $\mathcal{S}$ со сверточным умножением и $\mathcal{S}$ с поточечным умножением изоморфны.

Литература. А.Я.Хелемский. Лекции по функциональному анализу. Москва МНЦМО 2004 (потом переиздана в 2014?).

Приложение (по просьбе общественности) Решение задачи 10. Function $t \mapsto |\varphi(t)||\psi(s-t)|^2 \in L_1$ (Fubini from $\int\int \mapsto |\varphi(t)||\psi(s-t)|^2 dtds$)

Hence $t \mapsto \sqrt{|\varphi(t)|}\psi(s-t) \in L_2$. Since $\sqrt{|\varphi(t)|}$ also $\in L_2$,

pointwise product $|\varphi(t)||\psi(t-s)| \in L_1$, i.e. $\varphi * \psi$ exists. Now

$$\|\varphi * \psi\|_2^2 = \int | \int \varphi(t)\psi(s-t)dt|^2 ds \leq \int | \int \sqrt{|\varphi(t)|}\sqrt{|\varphi(t)|}\psi(s-t)|dt^2 ds$$

$$\leq (innerproduct) \int \|\varphi\|_1| \int |\varphi(t)||\psi(s-t)|^2 dt \leq (convolutioninL_1)\|\varphi\|_1\|\varphi\|_1\|\psi\|^{22} = \|\varphi\|_1^2\|\psi\|_2^2.$$

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 29 апреля для 302 группы.

Проверка домашнего задания 2. (Если не было на лекции.) Докажите последнее утверждение теоремы Планшереля с помощью коммутативных (что надо проверить!) диаграмм

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "in"'] & C_0(\mathbb{R}) \arrow[d, "in"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} L_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "in"'] & L_2\mathcal{S} \arrow[d, "in"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd}$$

Проверка домашнего задания 5. (Если было на лекции, то продумайте еще раз — она того стоит.) Функции Эрмита $h_n; n = 0, 1, ...$ суть собственные векторы оператора $F_\bullet$, а соответствующие собственные значения суть $(-i)^n$.

Проверка домашнего задания 6. Показать, что $F_\bullet$ унитарно эквивалентен диагональному оператору T_ξ, где $\xi_n = (-i)^n$.

Проверка домашнего задания 7. Свертка является (в смысле алгебраического определения) коммутативным умножением в $L_1(\mathbb{R})$.

Проверка домашнего задания 8. Свертка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_\infty(\mathbb{R})$ существует в любой точке, она ограничена и равномерно непрерывна.

Проверка домашнего задания 9. Свертка двух функций из $L_2(\mathbb{R})$ существует и принадлежит $C_0(\mathbb{R})$.

Проверка домашнего задания 10. Свертка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_2(\mathbb{R})$ существует почти всюду и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

Проверка домашнего задания 11. Две алгебры: $\mathcal{S}$ со сверточным умножением и $\mathcal{S}$ с поточечным умножением изоморфны.

Задача на дом 1. Множество функций $\varphi*\psi$, где φ, ψ пробегают $L_2(\mathbb{R})$, совпадает с $F(\chi)$, где χ пробегает $L_1(\mathbb{R})$.

Указание. Возьмем $\varphi_n, \psi_n \in L_1(\mathbb{R})$ с $\varphi_n \to \varphi$ $\psi_n \to \psi$ в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда $F(\varphi_n * \psi_n) = F(\varphi_n)F(\psi_n) \to F_\bullet(\varphi)F_\bullet(\psi)$ в $L_1(\mathbb{R})$. Отсюда $\varphi_n * \psi_n \to F_{-1}[F_\bullet(\varphi)F_\bullet(\psi)]$ в $C_0(\mathbb{R})$. Но в то же время $\varphi_n * \psi_n \to \varphi * \psi$ в том же $C_0(\mathbb{R})$.

Задача на дом 2. Пусть $(C)_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ действует как $\psi \mapsto \psi * \varphi$. Существует единственный w^*-непрерывный оператор $\widetilde{(C)_\varphi} : \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$, продолжающий $(C)_\varphi$. Он действует по правилу

$$[\widetilde{(C)_\varphi} f](\psi) = f(\psi * \Sigma\varphi),$$

то есть $\widetilde{(C)_\varphi} = (C)^*_{\Sigma\varphi}$.

Новая тема: **Вокруг спектральной теоремы.** На лекции будет введено непрерывное функциональное исчисление от самосопряженного оператора T. Это ограниченный унитальный гомоморфизм $\gamma_c : C[a,b] \to \mathcal{B}(H)$, такой, что $\gamma(\mathbf{t}) = T$. Обозначение $f(T) := \gamma(f)$.

В задачах 3-6 предполагается, что $f \in C[a,b]$, где $[a,b]$ содержит спектр оператора T.

Задача на дом 3. Если T компактен, и $f(0) = 0$, то и $f(T)$ компактен.

Задача на дом 4. Найти $f(P)$, где P — проектор.

Задача на дом 5. Найти $f(T)$, где T — оператор умножения на независимую переменную в $L_2[a,b]$.

Задача на дом 6. Найти $f(T)$, где T — самосопряженный диагональный оператор в ℓ_2.

Самосопряженный оператор называется положительным, если его спектр лежит на неотрицательной полуоси. Обозначение: $T \geq 0$. В этом случае оператор $f(T)$, где $f(t) = \sqrt{t}$, называется арифметическим корнем квадратным из T и обозначается $\sqrt{T}$. (Это далекое обобщение положительного числа!)

Задача на дом 7. Следующие свойства оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ эквивалентны:

(i) T положителен

(ii) $T = S^2$ для некоторого положительного S

(iii) $T = S^2$ для некоторого самосопряженного S

(iv) $T = S^*S$ для некоторого $S \in \mathcal{B}(H)$

(v) $\langle Tx, x\rangle > 0$ для всех $x \in H$.

Указание. Вывод (i) из (v). T самосопряжен (почему?), а неравенство Коши-Буняковского дает $\|(T + t\mathbf{1})x\|\|x\| \geq t\|x\|^2$ при $t > 0$.

Литература. А.Я.Хелемский. Лекции по функциональному анализу. Москва МНЦМО 2004 (потом переиздана в 2014?).

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 6 мая для 302 группы.

Поскольку 4 мая лекции не будет, домашних задач в этот раз будет меньше. Они будут готовить к боролеву функциональному исчислению, которое будет обсуждаться на лекции 11 мая.

Проверка домашнего задания 1. Множество функций $\varphi * \psi$, где φ, ψ пробегают $L_2(\mathbb{R})$, совпадает с $F(\chi)$, где χ пробегает $L_1(\mathbb{R})$.

Проверка домашнего задания 2. Пусть $(C)_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ действует как $\psi \mapsto \psi * \varphi$. Существует единственный w^*-непрерывный оператор $\widetilde{(C)_\varphi} : \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$, продолжающий $(C)_\varphi$. Он действует по правилу

$$[\widetilde{(C)_\varphi} f](\psi) = f(\psi * \Sigma\varphi),$$

то есть $\widetilde{(C)_\varphi} = (C)^*_{\Sigma\varphi}$.

В домашних заданиях 3-6 предполагается, что $f \in C[a,b]$, где $[a,b]$ содержит спектр оператора T.

Проверка домашнего задания 3. Если T компактен, и $f(0) = 0$, то и $f(T)$ компактен.

Проверка домашнего задания 4. Найти $f(P)$, где P — проектор.

Проверка домашнего задания 5. Найти $f(T)$, где T — оператор умножения на независимую переменную в $L_2[a,b]$.

Проверка домашнего задания 6. Найти $f(T)$, где T — самосопряженный диагональный оператор в ℓ_2.

Проверка домашнего задания 7. Следующие свойства оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ эквивалентны:

(i) T положителен

(ii) $T = S^2$ для некоторого положительного S

(iii) $T = S^2$ для некоторого самосопряженного S

(iv) $T = S^*S$ для некоторого $S \in \mathcal{B}(H)$

(v) $\langle Tx, x\rangle > 0$ для всех $x \in H$.

Теперь — новая тема. **Борелево (или борелевское) функциональное исчисление.**

Вот один из возможных вариантов определения. (Что будет на лекции, вы мне в свое время скажете.)

Далее везде T – самосопряженный оператор в H, $[a,b]$ — отрезок, содержащий его спектр, $B[a,b]$ — пространство ограниченных борелевых функций на $[a,b]$ с равномерной нормой, $M[a,b]$ — пространство комплексных мер на $[a,b]$ с нормой "вариация меры". Мы помним теорему Рисса о том, что $C[a,b]^* = M[a,b]$. Видим, что каждая мера μ на $[a,b]$ задает преднорму в $B[a,b]$ равенством $\|f\|_\mu := |\int_a^b f(t)d\mu(t)|$. Топология в $B[a,b]$, задаваемая системой преднорм $\{\|f\|_\mu; \mu \in M[a,b]\}$ обозначается wm (и иногда называется слабо-мерной).

Определение. Борелево функциональное исчисление от T — это унитальный гомоморфизм $\gamma_b : B[a,b]\mathcal{B}(H)$, такой, что $\gamma_b(\bar{f}) = \gamma_b(f)^*$ и обладающий следующими свойствами:

(i) $\|\gamma_b(f)\| \leq \|f\|$ ("сжимаемость")

(ii) $\gamma_b(f)$ непрерывен как оператор между полинормированными пространствами $(B[a,b], wm)$ и $\mathcal{B}(H)$ со слабо-операторной топологией (вспомните, какая там система преднорм)

(iii) если $f(t) = t$, то $f(T) = T$.

Задача на дом 1. Оператор

$$B[a,b] \to M[a,b]^* : f \mapsto \varphi_f : M[a,b] \to \mathbb{C} : \mu \mapsto \int_a^b f(t)d\mu(t)$$

инъективен (а, значит, позволяет отождествить $B[a,b]$ с подпространством в $M[a,b]^*$). При этом топология в $B[a,b]$, индуцированная w^*-топологией в $M[a,b]^*$, совпадает с wm.

Указание. Просто надо вспомнить, как выглядит слабая* система преднорм в сопряженном пространстве, а также что среди мер есть и сосредоточенные в точках.

Конструкция нужного исчисления проходит в два этапа:

Задача на дом 2. Для любых $x, y \in H$ существует единственная $\mu_{x,y} \in M[a,b]$, такая, что

$$\int_a^b f(t)d\mu_{x,y}(t) = \langle f(T)x, y\rangle$$

для любой $f \in C[a,b]$.

Указание. $f \mapsto \langle f(T)x, y\rangle$ — это ограниченный функционал на $C[a,b]$. Так что работает теорема Рисса.

Задача на дом 3. Для $f \in B[a,b]$ существует единственный оператор в T, обозначаемый $f(T)$, такой, что для любых $x, y \in H$ выполнено

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_a^b f(t)d\mu_{x,y}(t).$$

При этом $\|f(T)\| \leq \|f\|$.

Указание. Это равенство определяет сопряженно-линейный оператор, а сказать "ограниченный сопряженно-линейный оператор" эквивалентно тому, что сказать "ограниченный оператор". (Следствие из ещё одной теоремы Рисса.)

Теорема (без доказательства, но знать формулировку надо). *Отображение $f \mapsto f(T)$ и есть борелево функциональное исчисление от T. При этом существует только одно борелево функциональное исчисление от T. Для непрерывных функций борелево исчисление совпадает с непрерывным.*

Борелево исчисление позволяет ввести очень важный класс функций от оператора:

Задача на месте. Пусть M — борелево подмножество в $[a, b]$, χ_M — его (борелева!) характеристическая функция. Показать, что $\chi_M(T)$ — проектор.

Совокупность полученных проекторов играет основную роль в доказательстве одной из важнейших версий спектральной теоремы.

Литература. А.Я.Хелемский. Лекции по функциональному анализу. Москва МНЦМО 2004 (потом переиздана в 2014?), Гл.6, §6.

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 13 мая для 302 группы.

Проверка домашнего задания 1. Оператор

$$B[a,b] \to M[a,b]^* : f \mapsto \varphi_f : M[a,b] \to \mathbb{C} : \mu \mapsto \int_a^b f(t) d\mu(t)$$

инъективен (а, значит, позволяет отождествить $B[a,b]$ с подпространством в $M[a,b]^*$). При этом топология в $B[a,b]$, индуцированная w^*-топологией в $M[a,b]^*$, совпадает с wm.

Проверка домашнего задания 2. Для любых $x, y \in H$ существует единственная $\mu_{x,y} \in M[a,b]$, такая, что

$$\int_a^b f(t) d\mu_{x,y}(t) = \langle f(T)x, y\rangle$$

для любой $f \in C[a,b]$.

Проверка домашнего задания 3. Для $g \in B[a,b]$ существует единственный оператор в T, обозначаемый $g(T)$, такой, что для любых $x, y \in H$ выполнено

$$\langle g(T)x, y\rangle = \int_a^b g(t) d\mu_{x,y}(t).$$

При этом $\|f(T)\| \leq \|f\|$.

На лекции было построено борелево функциональное исчисление от самосопряженного оператора. Конструкция состояла из двух этапов, соответствующих вашим задачам 2 и 3. Давайте, как всегда, посмотрим, во что эта конструкция превращается для наших стандартных примеров "из мешка". Везде мы считаем, что соответствующий отрезок $[a,b]$ содержит спектр рассматриваемого оператора. Итак, пусть задана $g \in B[a,b]$

Задача на дом 1. Найти $g(P)$, где P — проектор.

Ответ: это $g(1)P + g(0)Q$, где $Q := \mathbf{1} - P$. Указание. Мы помним (вспомните!), что $f(P) = f(1)P + f(0)Q$, где $f \in C[a,b]$. Тогда видим (ср. задачу 2), что $\mu_{x,y}$ сосредоточена в в точках 1 и 0, и $\mu_{x,y}(1) = \langle P(x), y\rangle$, $\mu_{x,y}(0) = \langle Q(x), y\rangle$. Отсюда $\int_a^b g(t) d\mu_{x,y}(t) = \langle [g(1)P + g(0)Q](x), y\rangle$.

Задача на дом 2. Найти $g(\mathbf{t})$, где $\mathbf{t}$ — оператор умножения на независимую переменную в $L_2[a,b]$.

Ответ: это M_g, оператор умножения на $g(t)$. Указание. Мы помним (вспомните!), что $f(\mathbf{t}) = M_f$, где $f \in C[a,b]$. Тогда видим (ср. задачу 2), что $\int_a^b f(t)d\mu_{x,y}(t) = \int_a^b f(t)x(t)\bar{y}(t)$, откуда для борелева A выполнено $\mu_{x,y}(A) = \int_A x(t)\bar{y}(t)dt$ (то есть $d\mu_{x,y}(t) = x(t)\bar{y}(t)dt$). Поэтому $\int_a^b g(t)d\mu_{x,y}(t) = \langle M_g x, y\rangle$.

Задача на дом 3. Найти $g(T_\lambda)$, где T_λ — диагональный оператор в ℓ_2.

Ответ: это $T_{g(\lambda)}$, диагональный оператор с $g(\lambda) = (g(\lambda_1), g(\lambda_2, ...)$. Указание. Мы помним (вспомните!), что $f(T_\lambda) = T_{f(\lambda)}$, где $f \in C[a,b]$. Тогда видим (ср. задачу 2), что $\int_a^b f(t)d\mu_{x,y}(t) = \sum_n \lambda_n x_n \bar{y}_n$, откуда $\mu_{x,y}$ сосредоточена в точках λ_n, и $\mu_{x,y}(\lambda_n) = \lambda_n x_n \bar{y}_n$. Поэтому $\int_a^b g(t)d\mu_{x,y}(t) = \langle T_{g(\lambda)}\rangle$.

Дальше была введена спектральная мера $\mathbb{P}_T$ оператора T, определяемая для борелева A равенством $\mathbb{P}_T(A) = \chi_A(T)$.

Задача на дом 4. Найти $\mathbb{P}_P$, где P — проектор.

Ответ: $\mathbb{P}_P(A) = \chi_A(1)P + \chi_A(0)Q$. Рассмотрите 4 возможных случая в зависимости от того, какие из точек 1 и 0 лежат в A.

Задача на дом 5. Найти $\mathbb{P}_{\mathbf{t}}$, где $\mathbf{t}$ — оператор умножения на независимую переменную в $L_2[a,b]$.

Ответ: $\mathbb{P}_{\mathbf{t}}(A)$ — это оператор умножения на $\chi_A(t)$

Задача на дом 6. Найти $\mathbb{P}_{T_\lambda}$, где T_λ — диагональный оператор в ℓ_2.

Ответ: $\mathbb{P}_{T_\lambda}(A)$ — это диагональный оператор T_{h_A}, где $(h_A)_n$ принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, содержит ли A точку $\lambda_n \in [a,b]$.

Затем И.А. доказал вам спектральную теорему, сперва в аналитической форме восстановления оператора по его спектральной мере, т.е. $T = \int_a^b t d\mathbb{P}_T$ (как частный случай равенства $g(T) = \int_a^b g(t)d\mathbb{P}_T$).

Для конкретных операторов полезно уметь её доказывать эти равенства "в лоб".

Задача на дом 7. Непосредственно проверить, что оба равенства верны для каждого из трех операторов, фигурирующих в предыдущих задачах.

Указание. Зная спектральную меру нашего оператора, легко найти $\int_a^b h(t)d\mathbb{P}_T$ для случая простой $h(t)$. Затем надо представить заданную борелеву функцию $g(t)$ как равномерный предел простых и вспомнить общее определение интеграла $g(T) = \int_a^b g(t) d\mathbb{P}_T$.

А.Я.Хелемский. Задачи "он-лайн" на 20 мая для 302 группы.

Проверка домашнего задания 1. Найти $g(P)$, где P — проектор.

Проверка домашнего задания 2. Найти $g(\mathbf{t})$, где $\mathbf{t}$ — оператор умножения на независимую переменную в $L_2[a,b]$.

Проверка домашнего задания 3. Найти $g(T_\lambda)$, где T_λ — диагональный оператор в ℓ_2.

Проверка домашнего задания 4. Найти $\mathbb{P}_P$, где P — проектор.

Проверка домашнего задания 5. Найти $\mathbb{P}_{\mathbf{t}}$, где $\mathbf{t}$ — оператор умножения на независимую переменную в $L_2[a,b]$.

Проверка домашнего задания 6. Найти $\mathbb{P}_{T_\lambda}$, где T_λ — диагональный оператор в ℓ_2.

Проверка домашнего задания 7. Непосредственно проверить, спектральная теорема верна для каждого из трех операторов, фигурирующих в предыдущих задачах.

Вот важное следствие из спектральной теоремы

Задача на дом 1. Любой оператор аппроксимируется линейными комбинациями проекторов, а любой самосопряженный оператор аппроксимируется линейными комбинациями проекторов.

Забыл дать хорошую задачу на непрерывное функциональное исчисление:

Задача на дом 2. Любой оператор есть линейная комбинация четырех унитарных, а самосопряженный оператор — даже двух.

Указание. Для самосопряженного оператора нормы ≤ 1 операторы $f(T)$, где $f(t) := t \pm i\sqrt{1-t^2}$ — унитарные.

Повидимому, лекции закончились тем, что была доказана геометрическая форма спектральной теоремы, доставляющая модель самосопряженного оператора как оператора умножения на существенно ограниченную измеримую функцию. По поводу её доказательства:

На месте: проектор в пространстве размерности больше 2 никогда не бывает циклическим.

Задача на дом 3. Диагональный оператор T_λ является циклическим тогда, и только тогда, когда все числа λ_n — разные.

Задача на дом 4. Оператор умножения на непрерывную функцию в $L_2[a, b]$ является циклическим тогда, и только тогда, когда эта функция строго монотонна.

Задача на дом 5. Проверить "в лоб", что геометрическая форма спектральной теоремы верна для проектора, причем в качестве пространства с мерой можно взять $\mathbb{N}$ со считающей мерой. А для каких проекторов можно в качестве пространства с мерой взять отрезок?

Задача на дом 6. Проверить "в лоб", что геометрическая форма спектральной теоремы верна для диагонального оператора. А для каких диагональных операторов можно в качестве пространства с мерой взять отрезок?

Ответ на второй вопрос. Для каждого n число λ_n фигурирует в последовательности λ бесконечное число раз.