Лекция 12 (28) по функциональному анализу 29 апреля 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 24: Преобразование Фурье как оператор на $L_2(\mathbb{R})$ и на $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (продолжение).

Покажем теперь с помощью свойств преобразования Фурье, как в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ можно строить конкретные ортонормированные базисы.

Напомним результат о голоморфности преобразования Фурье.

Теорема 14.5. *(ii) Пусть для некоторого $a > 0$ функция f удовлетворяет условию $f(x)e^{a|x|} \in L(\mathbb{R})$. Тогда преобразование Фурье функции f может быть голоморфно продолжено в полосу комплексной плоскости $\{z : |\operatorname{Im} z| < a\}$.*

Теорема 24.4. *Пусть $\rho(x)$ — неотрицательная функция на прямой, равная нулю лишь на множестве меры нуль, которая при некотором $b > 0$ и $C > 0$ удовлетворяет оценке $\rho(x) \leqslant Ce^{-b|x|}$. Тогда если функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ такова, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^n f(x)\rho(x)\,dx = 0$$

при всех целых неотрицательных n, то $f(x) = 0$ в смысле $L_2(\mathbb{R})$ (то есть почти всюду).

Доказательство.
Рассмотрим функцию $F(x) = f(x)\rho(x)$. В силу неравенства КБШ она удовлетворяет условиям теоремы 14.5 (ii) при любом $a \in (0, b)$. Рассмотрим ее преобразование Фурье $\widehat{F}$, которое по указанной теореме голоморфно в полосе $\{|\operatorname{Im}\xi| < b\}$. В силу следствия из той же теоремы имеем

$$\widehat{F}^{(n)}(0) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x) e^{-i0x}\,dx = 0.$$

По формуле Тейлора $\widehat{F}(\xi) = 0$ в окрестности нуля, а по теореме единственности для голоморфных функций — и во всей полосе голоморфности. Тогда $f(x)\rho(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$ по теореме 14.3, что в силу условия положительности ρ почти всюду означает, что $f(x) = 0$ почти всюду. Теорема доказана.

Следствие. *Существуют такие многочлены H_n степени ровно n, $n \in \mathbb{Z}_+$, что функции $\varphi(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.*

Здесь c_n — нормировочные множители, которые будут найдены в теореме 24.5 (3).

Доказательство.
Применим к системе $\{x^n e^{-x^2/2}\}_{n=0}^{\infty}$ процесс ортогонализации Шмидта; получим функции φ_n указанного вида. Но функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ ортогональна всем φ_n тогда и только тогда, когда она ортогональна всем функциям исходной системы. А функция с последним свойством равна нулю по предыдущей теореме. Следствие доказано.

Эти многочлены, которые называются многочленами Эрмита, можно найти и в явном виде. Для этого положим

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{ и } \varphi_n(x) = c_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Теорема 24.5. *Многочлены Эрмита H_n и функции Эрмита φ_n обладают следующими свойствами:*

(1) H_n есть многочлен степени ровно n.

(2) Функции Эрмита удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{c_{n+1}}{c_n}\big(\varphi_n'(x) - x\varphi_n(x)\big).$$

(3) Функции φ_n попарно ортогональны в $L_2(\mathbb{R})$, и при подходящем выборе $\{c_n\}$ образуют ортонормированный базис этого пространства.

(4) Функции Эрмита являются собственными функциями оператора преобразования Фурье на $L_2(\mathbb{R})$, причем $\mathcal{F}\varphi_n = (-i)^n\varphi_n$.

Доказательство.

(1) Заметим, что если H_n — многочлен степени ровно n, то $(H_n e^{-x^2})' = (H_n' - 2xH_n)e^{-x^2}$, поэтому H_{n+1} будет многочленом степени $n+1$.

(2) Из определения функций Эрмита непосредственно получаем, что

$$\varphi_n'(x) = c_n \frac{d}{dx} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \\ = c_n x e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + c_n e^{x^2/2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2} = x\varphi_n(x) + \frac{c_n}{c_{n+1}}\varphi_{n+1}(x).$$

(3) Пусть, например, $n > m$. Тогда

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = c_n c_m \int\limits_{\mathbb{R}} e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}\,dx = c_n c_m \int\limits_{\mathbb{R}} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,dx.$$

Поскольку произведение подынтегральных функций стремится к нулю на бесконечности, то можно n раз проинтегрировать по частям и получить, что

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = (-1)^n c_n c_m \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^n}{dx^n} H_m(x)\right) e^{-x^2}\,dx = 0$$

в силу свойства (1), т.к. мы продифференцировали многочлен H_m больше раз, чем его степень.

Если же $n = m$, то заметим, что многочлен H_n имеет старший коэффициент $(-2)^n$ (это видно из доказательства свойства (1)), и получаем аналогично предыдущему

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = (-1)^n (c_n)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^n}{dx^n} H_n(x)\right) e^{-x^2}\,dx = 2^n n! (c_n)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Тем самым в качестве нормировочного множителя можно взять $c_n = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}$.

(4) Докажем утверждение по индукции. При $n = 0$ оно верно. Если оно верно для φ_n, то в силу доказанной рекуррентной формулы (3) и свойств преобразования Фурье имеем

$$\mathcal{F}\varphi_{n+1}(\xi) = \frac{c_{n+1}}{c_n}\big(\mathcal{F}\varphi_n'(\xi) + \mathcal{F}(x\varphi_n)(\xi)\big) = \frac{c_{n+1}}{c_n}\big(i\xi\mathcal{F}\varphi_n(\xi) - i(\mathcal{F}\varphi_n(\xi))'\big) = \\ = (-i)^n\frac{c_{n+1}}{c_n}\big((i\xi\varphi_n(\xi) - i\varphi_n'(\xi))\big) = (-i)^{n+1}\frac{c_{n+1}}{c_n}\big((\varphi_n'(\xi) - \xi\varphi_n(\xi))\big) = (-i)^{n+1}\varphi_{n+1}(\xi).$$

Теорема доказана.

Таким образом спектр оператора преобразования Фурье содержит точки ± 1 и $\pm i$. Других точек в нем нет, что непосредственно следует из уравнения $\mathcal{F}^4 = I$ и следующей **леммы о спектре многочлена от оператора**.

Лемма 24.3. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E и P — многочлен (с комплексными коэффициентами). Тогда $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$.*

Доказательство.
Зафиксируем $\mu \in \mathbb{C}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни (с учетом кратности) многочлена $P(t) - \mu$, тогда $P(t) - \mu = c\prod_{j=1}^{n}(t - \lambda_j)$ $(c \neq 0)$, откуда

$$P(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_n I).$$

Если все операторы $A - \lambda_j I$ обратимы, то есть $\lambda_j \notin \sigma(A)$, $\mu \notin P(\sigma(A))$, то оператор $P(A) - \mu I$ обратим как их композиция, и потому $\mu \notin \sigma(P(A))$.

С другой стороны, ясно, что операторы в правой части равенства попарно коммутируют (перестановочны). Пусть хотя бы один из операторов $A_j = A - \lambda_j I$ не обратим, то есть $\lambda_j \in \sigma(A)$, $\mu \in P(\sigma(A))$. Тогда либо $\ker A_j \neq \{0\}$, либо $\operatorname{Im} A_j \neq E$. В первом случае, переставим A_j на первое (правое) место в цепочке и получим, что $\ker(P(A) - \mu I) \neq \{0\}$. Во втором случае, переставим A_j на последнее (левое) место в цепочке и получим, что $\operatorname{Im}(P(A) - \mu I) \neq E$. Итак, оператор $P(A) - \mu I$ не обратим, то есть $\mu \in \sigma(P(A))$. Лемма доказана.

Тема 25: Свертки.

Определение. Пусть f и g – две функции на $\mathbb{R}$. Тогда их сверткой называется функция

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)\,dt,$$

где интеграл берется по стандартной мере Лебега на $\mathbb{R}$ — в тех точках, где эта функция существует.

Если в данной точке x существует $f * g(x)$, то замена переменной $s = x - t$ показывает, что

$$g * f(x) = -\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x - s)g(s)\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - s)g(s)\,ds$$

тоже существует и эти величины равны. Естественно, для того, чтобы свертка существовала, нужно наложить на функции f и g какие-то дополнительные условия. Приведем два важнейших случая, когда свертка существует.

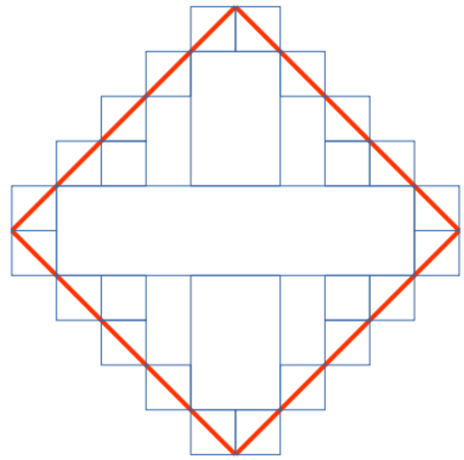
Лемма 25.1. *Если $f(x, y)$ измерима относительно плоской классической меры Лебега, то и $g(x, y) = f(x + y, x - y)$ измерима.*

Доказательство.

Поскольку

$$g^{-1}((c,+\infty)) = \{(x,y)\,(x+y,x-y) \in f^{-1}((c,+\infty)),$$

то достаточно доказать, что измеримость множества сохраняется при повороте на $\frac{\pi}{4}$ при гомотетии.



Последнее тривиально следует из того, что при гомотетии кольцо $R(S)$ сохраняется, а внешняя мера изменяется на коэффициент гомотетии. Проверим первое.

Поскольку повернутый прямоугольник можно сколь угодно точно приблизить конечным объединением не повернутых, то внешняя мера сохраняется при повороте.

Из тех же соображений повернутое множество из $R(S)$ можно сколь угодно точно приблизить конечным объединением не повернутых. Отсюда получается первое утверждение.

Теорема 25.1. *Пусть f и g – две функции из $L_1(\mathbb{R})$. Тогда их свертка существует для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и тоже является интегрируемой функцией на прямой. При этом для фиксированной g оператор $Af = f * g$ есть непрерывный линейный оператор на $L_1(\mathbb{R})$, для которого $\|A\| \leqslant \|g\|_1$.*

Доказательство.

Функция $|f(t)g(x-t)|$ является по лемме 25.1 неотрицательной измеримой функцией на плоскости. Поэтому, согласно теоремам Тонелли и Фубини, если повторный интеграл от нее хотя бы в одном порядке существует, то существует и двойной, и другой повторный, и они равны. Но

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,dx \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\,dx \right) dt = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Поэтому

$$\|f * g\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt \right| dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,dt \right) dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty.$$

Тем самым свертка существует и интегрируема, а оператор свертки с фиксированной g ограничен. Но его линейность очевидна. Теорема доказана.

Теорема 25.2. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда существует $f * g \in L_2(\mathbb{R})$. При этом для фиксированной g оператор $Af = f * g$ есть непрерывный линейный оператор на $L_2(\mathbb{R})$, причем $\|A\| \leqslant \|g\|_1$.*

Доказательство.
Прежде всего,

$$\|f*g\|_2^2 = \|g*f\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt \right|^2 dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|\,dt \right)^2 dx.$$

Преобразуя и применяя к внутреннему интегралу неравенство КБШ, имеем

$$\|f*g\|_2^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\sqrt{|g(t)|}\sqrt{|g(t)|}\,dt \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(t)|\cdot|f(x-t)|^2\,dt \right) dx.$$

Здесь первый интеграл не зависит от x и равен $\|g\|_1$. Второй интеграл есть L_1-норма свертки интегрируемых функций $|g|$ и $|f|^2$. Применяя к нему предыдущую теорему, получаем, что

$$\|f*g\|_2^2 \leqslant \|g\|_1\cdot\|g\|_1\cdot\|f^2\|_1 = (\|g\|_1\cdot\|f\|_2)^2.$$

Мы получили существование свертки почти всюду и требуемую оценку ее L_2-нормы. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь для указанных случаев связь свертки и преобразования Фурье.

Теорема 25.3. *(i) Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f*g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$.*
(ii) Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f*g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$.

Доказательство.
(i) Поскольку $|f(t)g(x-t)e^{-ix\xi}| = |f(t)g(x-t)| \in L_1(\mathbb{R}^2)$ при всех ξ, как уже показано в доказательстве теоремы 25.1, то по теореме Фубини имеем

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f*g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\,e^{-ix\xi}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(x-t)e^{-i(x-t)\xi}\,dx \right) dt = 2\pi\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi).$$

(ii) Выберем функции $f_n \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, сходящиеся к f в $L_2(\mathbb{R})$, например, произведения f на индикаторы расширяющихся отрезков. Тогда в силу доказанного в пункте (i) имеем

$$\widehat{f_n*g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}_n(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$$

Покажем, что в обеих частях равенства можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Действительно, по теореме 25.2 имеем $\|f_n*g - f*g\|_2 \leqslant \|f_n - f\|_2\cdot\|g\|_1 \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в силу изометричности оператора преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ имеем $\|\widehat{f_n*g} - \widehat{f*g}\|_2 \to 0$ при $n\to\infty$. С другой стороны, по той же теореме $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_2 \to 0$ при $n\to\infty$, а по теореме 14.1 функция $\widehat{g}$ равномерно ограничена, так что $\|\widehat{f}_n \cdot \widehat{g} - \widehat{f} \cdot \widehat{g}\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Свертки можно корректно определить и в некоторых случаях, когда одна или обе свертываемых функции — обобщенные.